新世纪地方高等院校专业系列教材

实分析引论

于延栋　编著

南京大学出版社

全国教育科学"十五"规划课题项目
江苏省高等学校立项建设精品教材

实分析引论

于延栋　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实分析引论/于延栋编著. —南京:南京大学出版社,
2007.7

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 978-7-305-05103-6

Ⅰ. 实… Ⅱ. 于… Ⅲ. 实分析—高等学校—教材
Ⅳ. 0174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 095832 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左　健

丛 书 名 新世纪地方高等院校专业系列教材
书　　名 实分析引论
编　　著 于延栋
责任编辑 吴　华　　　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 787×960 1/16 印张 15.75 字数 272 千
版　　次 2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 1～3000
ISBN 978-7-305-05103-6
定　　价 23.80 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

新世纪地方高等院校专业系列教材

编　委　会

前　言

本书是以我们最近几年讲授实分析引论的讲稿为基础编写而成的，主要讲述关于实测度与实积分的基本理论，其中突出了勒贝格测度和勒贝格积分理论.本书既可以作为普通高等学校数学与应用数学专业和概率论与数理统计专业的本科生教材，也可以供相关专业的研究生和工程技术人员参考.

在确定本书的取材范围、理论体系和具体表述形式时，我们是这样考虑的：

(1) 我国目前流行的实变函数论教材主要讲述勒贝格测度和勒贝格积分的基本理论.事实上，学生在学习泛函分析和概率论等课程时不仅需要勒贝格测度和勒贝格积分知识，还需要更一般的测度和积分知识.这样一来，在泛函分析和概率论等课程的教材中不得不介绍与勒贝格测度和勒贝格积分知识大体平行的测度和积分知识.毫无疑问，这样安排教学内容是有一定道理的；尤其是在上世纪 90 年代前专业课总教时较多的情况下，这样安排教学内容是合适的.然而，目前专业课的总教时明显偏少，要保持各门课程所包含的知识总量有增无减，不得不考虑如何节省总教时的问题.因此我们尝试适当调整实变函数论课程的教学内容，一步到位，直接讲述一般的实测度和广义实值函数的积分理论.由于没有找到合适的教材，我们只好自编讲义，反复试用，边用边改.值得庆幸的是，几年来的试验结果告诉我们，这样安排教学内容基本上是可行的，不必过多地担心学生的接受能力问题.

(2) 充分利用半环上的满足一定条件的非负广义实值函数可以延拓成适当的环上的可加性测度和完全可加性测度的事实来定义约当测度、勒贝格测度、勒贝格-斯蒂尔切斯测度和积测度.这样处理，不仅揭示了一般规律，还避免了不少重复论证.对待约当测度与对待一般测度一样，利用卡拉泰奥多里条件来定义，这样处理可以给人以一气呵成的感觉.

(3) 每章配备一定数量难易程度不一的练习题.其中大多数练习题不难，配备这类练习题的目的是使一般学生都能通过练习加深对课文的理解，适当扩充知识面，提高自己的语言表达能力和推理能力.在打上星

号的练习题中,有些确实比较难,配备这类练习题的目的是培养部分学生的研究能力,教师可以根据学生的具体情况指导他们选做一些. 为了使用的方便,本书配有教学参考书——《实分析引论习题详解》(南京大学出版社,2007 年 7 月出版),主要供教师布置作业时参考,也可以供学生复习和准备考研时参考.

(4) 书中采用的数学术语和外国人的汉译名与 2005 年科学出版社出版的《新英汉数学词汇》一致,采用的记号一般都是国内或国际上通用的记号. 为了醒目,在定理(引理)的证明结束时都打上了证毕号"□". 对于没有证明的定理(引理),在叙述完毕时就打上了证毕号,这意味着该定理(引理)很容易证明或者留给学生自己证明.

(5) 课文中将要用到关于 p 进无限小数的一些知识. 虽然这些知识是数项级数知识的简单应用,但是一般学生都没有接触过. 因此我们编写了关于 p 进无限小数的一个附录,留给学生在预习时自学,不作为正式的教学内容.

(6) 我们认为,让学生了解一些著名数学家的成才之路和主要贡献是有好处的. 因此书中安排了与本书内容有关的 8 位著名数学家的生平简介,作为附录,让学生课外阅读.

讲完全书内容大约需要 72 教时. 如果对于证明难度较大的定理只讲证明思路,也能在 54 教时内讲完.

本书编写得到了江苏省教育厅高教处领导、省内同行专家与盐城师范学院领导和同事们的大力支持. 中国科学技术大学成志新博士仔细阅读了本书的初稿,并提出了不少有益的意见和建议. 编者在此一并向他们表示衷心的谢意. 此外,我们还应特别感谢本书的责任编辑吴华老师,她不仅热情支持本书的出版,而且为本书的编辑工作付出了大量的辛勤劳动.

协助编写本书的有钱明忠、戴风明、王住登、何新龙、史雪荣、袁兰兰和姜海波等. 由于编者的水平和能力有限,书中肯定会有不少疏漏之处. 我们恳切希望读者及时提出批评和进一步修改的建议.

于延栋

2006 年 10 月 16 日

于盐城师院蕴秀亭

目　　录

第1章　集　合

集合论是现代数学的一个特殊的分支，它几乎渗透到其他所有的数学分支，成为整个现代数学的基础. 本章回顾和介绍以后各章中将要用到的集合论知识，其中有不少内容是读者已经熟悉的，因此可以较快地读完本章，进入下一章的学习.

§1.1　集合及其基本运算

在集合论中，集合和元素是两个原始概念. 对待这两个概念，就像几何学中对待“线”和“点”一样，不下定义，只用人们熟知的一些概念来描述.

我们将具有某种特征的个体事物的全体称为一个**集合**，简称集；组成一个集合的各个个体事物都称为该集合的**元素**或**点**. 此外，我们约定，存在唯一的一个没有元素的集合，它叫做**空集**，记作$\varnothing$.

我们将全体正整数、全体整数、全体有理数和全体实数分别组成的集合依次称为**正整数集**、**整数集**、**有理数集**和**实数集**，依次记作$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$和$\mathbb{R}$. 此外，对于任意的正整数 n，我们将从 1 到 n 这 n 个连续的正整数组成的集合称为$\mathbb{N}$的一个**截段**，记作$|1,n|$.

仅有一个元素的集合称为**单点集**. 当 x 是一个元素时，我们将由 x 组成的单点集记作$\{x\}$；一般地，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是n(n 为正整数)个不同元素时，将由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的集合记作$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

设 x 和 y 都是元素. 若 x 和 y 是同一个元素，则称 x **等于** y，记作 $x=y$；否则，称 x **不等于** y，记作 $x\neq y$.

设 A 是一个集合，x 是一个元素. 若 x 是 A 的元素，则称 x **属于** A，记作 $x\in A$；否则，称 x **不属于** A，记作 $x\notin A$.

由于一个集合就是具有某种特征的个体事物的全体，因此每一个集合伴随着一个特征，不同的集合伴随着不同的特征. 这样一来，只要我们把一个集合的所有元素都具有的那个特征表达清楚了，这个集合是什么

也就清楚了. 一般地说,当伴随某个集合 A 的特征为 P 时,我们就用记号 $\{x \mid p(x)\}$ 表示集合 A,其中 $p(x)$ 表示命题"元素 x 具有特征 P". 例如, $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ 且 $x^2 = 1\}$ 表示集合 $\{-1, 1\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ 且 $x^2 < 5\}$ 表示集合 $\{1,2\}$,等等.

设 A 和 B 都是集合. 若 A 的元素都属于 B,则称 A 为 B 的**子集**,或者称 A **包含于** B,记作 $A \subset B$;当 A 包含于 B 时也称 B **包含** A. 若 A 和 B 是同一个集合,则称 A **等于** B,记作 $A = B$;否则,称 A **不等于** B,记作 $A \neq B$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A **真包含于** B 或 A 为 B 的**真子集**;当 A 真包含于 B 时也称 B **真包含** A. 我们约定:空集是任何集合的子集,也就是说,对于任何集合 A,总有 $\varnothing \subset A$.

设 A 是一个集合. A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集,记作 2^A. 例如,

$$2^{\varnothing} = \{\varnothing\},\ 2^{\{1\}} = \{\varnothing, \{1\}\},\ 2^{\{1,2\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

为了避免逻辑上的麻烦,这里约定:我们已经取定了一个"充分大的集合",叫做**论域**. 今后凡是提到具体的元素都是这个集合的元素;凡是提到具体的集合都是这个集合的真子集. 我们只讨论论域的真子集,不关心论域本身.

容易验证,集合之间的包含关系具有如下性质:对于任意的集合 A, B 和 C,

1° $A \subset A$;

2° $A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A = B$;

3° $A \subset B$ 且 $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

定义 1.1.1 设 A 和 B 是两个集合. 集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并**,记作 $A \cup B$(读作 A 并 B);集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交**,记作 $A \cap B$(读作 A 交 B)(参看图 1-1 和图 1-2). 当 $A \cap B = \varnothing$ 时,称 A 与 B **不相交**.

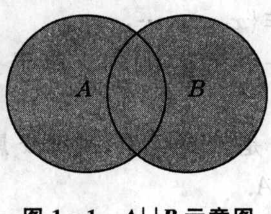

图 1-1 $A \cup B$ 示意图

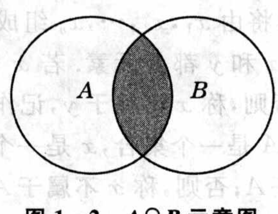

图 1-2 $A \cap B$ 示意图

例如,若 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ 且 $0 < x \leqslant 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ 且 $x > 2\}$,则

$$A \cup B = (0, +\infty),\ A \cap B = \varnothing.$$

定理 1.1.1 对于任意的集合 A,B 和 C,总有

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A$; **(幂等律)**

(2) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$; **(交换律)**

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; **(结合律)**

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; **(分配律)**

(5) $A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C, A\cap C\subset B\cap C$; **(单调性)**

(6) $A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

证明 这里只证明等式 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 成立,其余留作练习.

事实上,对于任意的元素 x,我们有

$$x\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B\text{,或者 } x\in A \text{ 且 } x\in C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ 或 } x\in A\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

所以 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. □

容易明白,由于集合的并和交都满足交换律和结合律,在对三个和三个以上的集合连续施行其中的一种运算时,不必添加括号来规定运算次序. 例如,对于任意四个集合 A,B,C 和 D,可以直接写 $A\cup B\cup C\cup D$ 和 $A\cap B\cap C\cap D$,不需添加任何括号;任意交换式中 A,B,C 和 D 的次序,都不影响运算的结果.

我们约定:对于任意的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(n 为正整数),当 $n=1$ 时,记号 $\bigcup_{j=1}^{n}A_j$ 和 $\bigcap_{j=1}^{n}A_j$ 都表示集合 A_1;当 $n>1$ 时,记号 $\bigcup_{j=1}^{n}A_j$ 和 $\bigcap_{j=1}^{n}A_j$ 分别表示集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 和 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. $\bigcup_{j=1}^{n}A_j$ 和 $\bigcap_{j=1}^{n}A_j$ 分别称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**并与交**. 显然,

$$\bigcup_{j=1}^{n}A_j=\{x\mid \forall j\in\{1,n\} \text{ 且 } x\in A_j\},$$
$$\bigcap_{j=1}^{n}A_j=\{x\mid x\in A_j, \forall j\in\{1,n\}\}.$$

定义 1.1.2 设 A 和 B 是两个集合.

(1) 集合 $\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差**,记作 $A\setminus B$(读作 A 减 B)(参看图 1-3).

(2) 当 $B\subset A$ 时,$A\setminus B$ 又称为 B 相对于 A 的**补**.

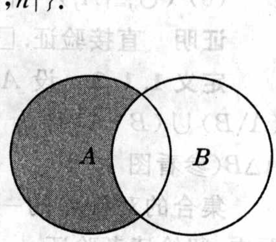

图 1-3 $A\setminus B$ 示意图

如下两条定理列举了集合的减法的一些性质.

定理 1.1.2 对于任意的集合 A,B 和 C,总有

(1) $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$;

(2) $B\subset C\Rightarrow A\backslash C\subset A\backslash B$;

(3) $A\subset B\Rightarrow A\backslash C\subset B\backslash C$. □

定理 1.1.3 若 A 和 $B_1,B_2,\cdots,B_n$(n 为任意的正整数)都是集合,则

$$A\backslash\bigcup_{k=1}^n B_k=\bigcap_{k=1}^n(A\backslash B_k),A\backslash\bigcap_{k=1}^n B_k=\bigcup_{k=1}^n(A\backslash B_k).$$

(德摩根律)

证明 对于任意的元素 x,我们有

$$x\in A\backslash\bigcup_{k=1}^n B_k\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin\bigcup_{k=1}^n B_k\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B_k,\forall k\in\{1,n\}$$
$$\Leftrightarrow x\in A\backslash B_k,\forall k\in\{1,n\}\Leftrightarrow x\in\bigcap_{k=1}^n(A\backslash B_k),$$

所以 $A\backslash\bigcup_{k=1}^n B_k=\bigcap_{k=1}^n(A\backslash B_k)$. 同理可证,$A\backslash\bigcap_{k=1}^n B_k=\bigcup_{k=1}^n(A\backslash B_k)$. □

假设 X 是某个非空集合,并且只关心 X 的子集. 这时,我们将 X 称为**基本集**;对于任意的 $A\in 2^X$,A 相对于集合 X 的补 $X\backslash A$ 简称为 A 的**补**,记作 A^c.

显然,$\varnothing^c=X,X^c=\varnothing$.

我们约定,从现在起,如无特别声明,X 表示任意给定的非空集合;凡是提到 X 的某个子集的补都是指该集合相对于集合 X 的补.

定理 1.1.4 对于任意的 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n\in 2^X$(其中 n 为任意正整数),总有

(1) $(A^c)^c=A$;

(2) $A\cup X=X,A\cap X=A$;

(3) $A\cup A^c=X,A\cap A^c=\varnothing$;

(4) $A\backslash B=A\cap B^c$;

(5) $A\subset B\Leftrightarrow B^c\subset A^c$;

(6) $(\bigcup_{j=1}^n A_j)^c=\bigcap_{j=1}^n A_j^c,(\bigcap_{j=1}^n A_j)^c=\bigcup_{j=1}^n A_j^c$. **(德摩根律)**

证明 直接验证. □

定义 1.1.3 设 A 和 B 是两个集合. 集合 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 称为 A 与 B 的**对称差**,记作 $A\Delta B$(参看图 1-4).

集合的对称差的一些性质列在习题 1 第 5 题中,留给读者验证.

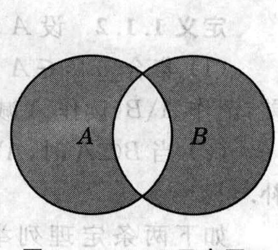

图 1-4 $A\Delta B$ 示意图

§1.2 映 射

定义 1.2.1 设 A 是非空集合. 我们称 φ 为(定义在)A 上的一个**映射**,是指 φ 为这样一个对应法则:对于每一个 $x\in A$,按照对应法则 φ,有唯一确定的一个元素 y 与 x 对应. 当 φ 为 A 上的映射时,A 称为 φ 的**定义域**. 这时,对于每一个 $x\in A$,按照对应法则 φ,与 x 对应的那个元素 y 称为 x 在 φ 之下的**像**或 φ 在 x 的**值**,记作 $y=\varphi(x)$;对于 A 的任意子集 S,集合 $\{\varphi(x)\mid x\in S\}$ 称为 S 在映射 φ 之下的**像**,记作 $\varphi(S)$;特别地,$\varphi(A)$ 称为 φ 的**值域**.

显然,对于任意的映射 φ,有 $\varphi(\varnothing)=\varnothing$.

由定义可知,对于任意的非空集合 A,总存在 A 上的映射. 例如,可以任意取定一个元素 y_0,定义 A 上的映射 φ 如下:

$$\varphi(x)=y_0,\ \forall\, x\in A.$$

这样的映射 φ 称为**常值映射**. 此外,对于任意的非空集合 A,还可以定义 A 上的映射 ι_A 如下:

$$\iota_A(x)=x,\ \forall\, x\in A.$$

ι_A 称为 A 的**单位映射**.

定义 1.2.2 设 A 是非空集合,φ 和 ψ 是 A 上的映射. 若 $\varphi(x)=\psi(x)$, $\forall\, x\in A$,则称 φ **等于** ψ,记作 $\varphi=\psi$;否则,称 φ **不等于** ψ,记作 $\varphi\neq\psi$.

定义 1.2.3 设 A 是非空集合,φ 为 A 上的映射.

(1) 若对于任意的 $x,y\in A$,总有

$$x\neq y\Rightarrow\varphi(x)\neq\varphi(y),$$

则称 φ 为**单射**.

(2) 若一个集合 B 满足 $\varphi(A)\subset B$,则称 φ 为 **A 到 B 的映射**,记作 φ: $A\to B$. 特别地,当 $\varphi(A)=B$,称 φ 为 **A 到 B 的满射**或 **A 到 B 上的映射**;不致混淆时,简称 φ 为满射.

(3) 若 φ 既是单射,又是 A 到 B 的满射,则称 φ 为 **A 到 B 的双射**;不致混淆时,简称 φ 为双射. 双射又称为 **1—1 对应**.

显然,当 φ 为 A 上的单射时,φ 就是 A 到 $\varphi(A)$的双射.

定义 1.2.4 设 φ:$A\to B$, $y_0\in B$, $T\subset B$.

(1) 若存在 $x_0\in A$,使得 $y_0=\varphi(x_0)$,则称 x_0 为 y_0 在 φ 之下的一个**原像**;否则,称 y_0 在 φ 之下没有原像.

(2) T 中所有元素的所有原像组成的集合称为 T 在 φ 之下的**原像**，记作 $\varphi^{-1}(T)$，即

$$\varphi^{-1}(T)=\{x\mid x\in A \text{ 且 } \varphi(x)\in T\}.$$

由定义可知，若 $\varphi:A\to B$，则 $\varphi^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\varphi^{-1}(B)=A$.

下面的定理 1.2.1 列出了集合在映射之下的像和原像的一系列性质，非常有用.

定理 1.2.1 设 A 和 B 都是非空集合；φ 是 A 到 B 的映射；$S_1,S_2\subset A$；$T_1,T_2\subset B$. 那么，下列命题成立：

(1) $\varphi(S_1\cup S_2)=\varphi(S_1)\cup\varphi(S_2),\varphi(S_1\cap S_2)\subset\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$；

(2) $\varphi^{-1}(T_1\cup T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cup\varphi^{-1}(T_2)$，
$\varphi^{-1}(T_1\cap T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cap\varphi^{-1}(T_2)$；

(3) $S_1\subset\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$；

(4) 若 φ 是单射，则 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1)),\varphi(S_1\cap S_2)=\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$；

(5) $\varphi(\varphi^{-1}(T_1))\subset T_1$；

(6) 若 φ 是满射，则 $\varphi(\varphi^{-1}(T_1))=T_1$；

(7) 若 φ 是双射，则 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1)),\varphi(\varphi^{-1}(T_1))=T_1$；

(8) 若 φ 是双射，并且 $A=B$，则 $\varphi^{-1}(\varphi(S_1))=\varphi(\varphi^{-1}(S_1))=S_1$；

(9) $\varphi^{-1}(T_1\setminus T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\setminus\varphi^{-1}(T_2)$.

证明 对于任意的 $y\in B$，有

$$\begin{aligned}y\in\varphi(\varphi^{-1}(T_1))&\Rightarrow\text{存在 }x\in\varphi^{-1}(T_1)\text{，使得 }\varphi(x)=y\\&\Rightarrow y=\varphi(x)\text{ 且 }\varphi(x)\in T_1\Rightarrow y\in T_1,\end{aligned}$$

因此 $\varphi(\varphi^{-1}(T_1))\subset T_1$，即命题(5)成立.

当 φ 为满射时，对于任意的 $y\in B$，有

$$\begin{aligned}y\in T_1&\Rightarrow\text{存在 }x\in A\text{，使得 }\varphi(x)=y\text{ 且 }y\in T_1\\&\Rightarrow y=\varphi(x)\in\varphi(\varphi^{-1}(T_1)).\end{aligned}$$

因此 $T_1\subset\varphi(\varphi^{-1}(T_1))$. 根据命题(5)，$\varphi(\varphi^{-1}(T_1))\subset T_1$，所以 $\varphi(\varphi^{-1}(T_1))=T_1$. 这就表明命题(6)成立.

其余命题的证明留作练习. □

定义 1.2.5 设 A 是非空集合，φ 是 A 上的单射. 定义 $\varphi(A)$ 到 A 的映射 ψ 如下：对于任意的 $y\in\varphi(A)$，有

$$\psi(y)=x\text{，若 }\varphi(x)=y.$$

ψ 称为 φ 的**逆映射**，记作 $\psi=\varphi^{-1}$.

显而易见，当 φ 是 A 上的单射时，$\varphi(A)$ 的任一子集 T_1 在 φ 的逆映射 φ^{-1} 之下的像与 T_1 在映射 φ 之下的原像是同一个集合，因此记号 $\varphi^{-1}(T_1)$

没有歧义.

定义 1.2.6 设 A,B,C 和 D 都是非空集合,$\varphi: A\to B,\psi: C\to D$,并且 $\varphi(A)\subset C$. 定义 A 上的映射 τ 如下:

$$\tau(x)=\psi(\varphi(x)),\ \forall x\in A.$$

τ 称为 φ 与 ψ 的**复合(映射)**,记作 $\tau=\psi\circ\varphi$.

定理 1.2.2 设 A,B,C,D,E 和 F 都是非空集合,$\varphi: A\to B,\psi: C\to D$, $\tau: E\to F$,并且 $\varphi(A)\subset C,\psi(C)\subset E$. 那么,下列命题成立:

(1) $(\tau\circ\psi)\circ\varphi=\tau\circ(\psi\circ\varphi)$;

(2) 若 φ 和 ψ 都是单射,则 $\psi\circ\varphi$ 也是单射;

(3) 若 φ 和 ψ 都是满射,并且 $B=C$,则 $\psi\circ\varphi$ 也是满射;

(4) 若 φ 和 ψ 都是双射,并且 $B=C$,则 $\psi\circ\varphi$ 也是双射;

(5) 若 φ 是双射,则 $\varphi^{-1}\circ\varphi=\iota_A,\varphi\circ\varphi^{-1}=\iota_B$;

(6) 若 φ 是双射,并且 $A=B$,则 $\varphi^{-1}\circ\varphi=\varphi\circ\varphi^{-1}=\iota_A$.

证明 这里只证明命题(1)成立,其余命题的证明留作练习.

事实上,对于任意的 $x\in A$,有

$$\begin{aligned}((\tau\circ\psi)\circ\varphi)(x)&=(\tau\circ\psi)(\varphi(x))=\tau(\psi(\varphi(x)))\\&=\tau((\psi\circ\varphi)(x))=(\tau\circ(\psi\circ\varphi))(x),\end{aligned}$$

所以 $(\tau\circ\psi)\circ\varphi=\tau\circ(\psi\circ\varphi)$. □

定义 1.2.7 设 A 是非空集合,φ 为 A 上的映射,S 是 A 的非空子集. 定义 S 上的映射 ψ 如下:

$$\psi(x)=\varphi(x),\ \forall x\in S.$$

ψ 称为 φ 在 S 上的**限制**,记作 $\psi=\varphi|_S$.

定义 1.2.8 设 $A\subset X$. 定义 X 到 $\{0,1\}$ 的映射 χ_A 如下:对于任意的元素 $x\in X$,

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A,\\0, & 若\ x\notin A.\end{cases}$$

χ_A 称为 A 相对于 X 的**特征函数**,不致混淆时,简称为 A 的特征函数.

显然,对于任意的 $A,B\subset X$,有

$$A\subset B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x),\ \forall x\in X;$$

$$A=B\Leftrightarrow\chi_A=\chi_B;$$

$$\chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x),\ \forall x\in X;$$

$$\begin{aligned}\chi_{A\cup B}(x)&=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\chi_B(x)\\&=\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\},\ \forall x\in X;\end{aligned}$$

$$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)=\min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\},\ \forall x\in X;$$

$$\chi_{A\setminus B}(x)=\max\{\chi_A(x)-\chi_B(x),0\},\ \forall x\in X.$$

例 1.2.1 设 A 为$[0,1]$中全体有理数组成的集合，则 A 相对于$[0,1]$的特征函数 χ_A 就是我们熟知的狄利克雷函数.

任意给定正整数 m 和 n.

我们称 φ 为一个**有序 n 元组**，是指 φ 为$|1,n|$上的一个映射. 当我们将$|1,n|$上的一个映射 φ 称为有序 n 元组时，一般将 φ 写成如下形式：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $x_k=\varphi(k)(k\in|1,n|)$称为该有序 n 元组的**第 k 分量**或**第 k 坐标**.

有序 2 元组又称为**有序对**；有序 1 元组(x_1)就理解为元素 x_1，并记作 x_1.

设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是两个有序 n 元组. 我们称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$**等于**$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记作

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

是指：它们作为$|1,n|$上的映射是相等的映射，即 $x_k=y_k,\ \forall k\in|1,n|$；否则，称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$**不等于**$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记作

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

此外，我们约定：当$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n})$分别是有序 m 元组和有序 n 元组时，我们将

$$((x_1,x_2,\cdots,x_m),(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n}))$$

理解为有序 $m+n$ 元组$(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n})$.

定义 1.2.9 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(n 为正整数)都是集合. 我们将集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in A_k,\ \forall k\in|1,n|\}$$

称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**直积**或**笛卡儿积**，记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 或 $\times_{k=1}^{n}A_k$. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，将 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 简记作 A^n.

根据以上约定，对于任意的 $m+n$(m 和 n 为任意正整数)个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+n}$，有

$$(\times_{k=1}^{m}A_k)\times(\times_{k=m+1}^{m+n}A_k)=\times_{k=1}^{m+n}A_k;$$

对于任意的集合 A，有

$$A^1=A,A^m\times A^n=A^{m+n}.$$

我们称 φ 为一个**序列**，是指 φ 为$\mathbb{N}$上的一个映射. 当我们将$\mathbb{N}$上的一个映射 φ 称为序列时，常常将 φ 写成如下形式：

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,\text{或}\{x_n\}_n,\text{或}(x_n)_n,$$

其中，对于每一个正整数 n，$x_n=\varphi(n)$称为该序列的**第 n 项**或**第 n 坐标**.

显然,各项都是数的序列,就是我们熟知的数列;各项都是函数的序列称为**函数列**;各项都是集合的序列称为**集列**.

有时候,我们还将一般的序列说成**点列**;将"一个点列"、"一个实数列"、"一个函数列"和"一个集列"分别说成"一列元素"、"一列实数"、"一列函数"和"一列集合",等等.

设$(x_n)_n$和$(y_n)_n$是两个序列.我们称$(x_n)_n$ **等于**$(y_n)_n$,并且记作$(x_n)_n=(y_n)_n$,是指它们作为$\mathbb{N}$上的映射是相等的映射,即$x_n=y_n$,$\forall n\in\mathbb{N}$;否则,称$(x_n)_n$ **不等于**$(y_n)_n$,记作$(x_n)_n\neq(y_n)_n$.我们称$(y_n)_n$为$(x_n)_n$的**子列**,是指:存在$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的映射f,使得

$$m,n\in\mathbb{N},m>n\Rightarrow f(m)>f(n);y_n=x_{f(n)},\forall n\in\mathbb{N}.$$

定义 1.2.10 设$\{A_n\}_n$是一列集合.将集合$\{(x_n)_n \mid x_n\in A_n,\forall n\in\mathbb{N}\}$称为这一列集合的**直积**或**笛卡儿积**,记作$\times_{n=1}^{\infty}A_n$.特别地,当所有的A_n都是同一个集合A时,将$\times_{n=1}^{\infty}A_n$简记作A^{ω}.

在下一节中,我们还要对集列作进一步讨论.

§1.3 集 族

所有元素都是集合的集合又称为**集类**.空集也称为集类.

若$\mathscr{C}$是一个集类,A是一个集合,并且$A\in\mathscr{C}$,则称A为$\mathscr{C}$中的集合.若一个集类$\mathscr{C}$中的任意两个不同的集合都不相交,则称$\mathscr{C}$为**两两不相交的集类**.空类以及仅由一个集合组成的集类也被认为是两两不相交的集类.

显然,任何集合的幂集都是集类.集类同普通的集合一样,可以对它们本身施行并、交和减法等运算.另一方面,又可以对集类中的集合施行这些运算.

定义 1.3.1 设Γ是非空集合,φ是Γ上的映射.

(1) 我们称φ为**集族**,是指φ的值域为集类.

(2) 当φ是集族时,常常将φ表示成如下形式:$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,其中$A_\gamma=\varphi(\gamma)$,$\forall\gamma\in\Gamma$.集合$\Gamma$称为该集族的**指标集**,$\Gamma$的每个元素$\gamma$都称为**指标**,所有的$A_\gamma(\gamma\in\Gamma)$都称为该集族中的集合.

(3) 若一个集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$满足条件

$$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma\text{ 且 }\gamma_1\neq\gamma_2\Rightarrow A_{\gamma_1}\cap A_{\gamma_2}=\varnothing,$$

则称$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$为**两两不相交的**.