· 经济数学基础 ·

线性代数

学习指导

胡金德　编著

中国人民大学出版社

· 经济数学基础 ·

线性代数

学习指导

胡金德 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/胡金德编著.
北京：中国人民大学出版社，2007
(经济数学基础)
ISBN 978-7-300-08172-4

Ⅰ.线…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082929 号

经济数学基础

线性代数学习指导

胡金德　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京密兴印刷厂		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 7 月第 1 版
印　　张	23.75	**印　　次**	2007 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	435 000	**定　　价**	28.50 元

总　　序

随着教学改革的不断深入和办学规模的扩大，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时，全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大，其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言，经过多年调整，实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点：作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程，《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲，融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围；突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练；内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求和分级教学的需要，本套教材推出了《高级经济数学教程》分册，该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外，作为高等数学知识的进一步延伸和扩展，本套教材同时推出了《实用运筹学》分册，该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识，并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是，基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，以便于学生自习。另一方面，《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充，增加相当数量的研究生入学考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面，帮助学生实现跨越，达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此，这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的

功能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有20年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006年10月

前　言

本书是与经济数学基础系列教材中的《线性代数》(胡金德主编)配套的学习辅导书。

经济数学基础系列教材中的《线性代数》是在对教育部教学指导委员会颁布的经济和管理类线性代数教学大纲(修改稿)和全国硕士研究生入学考试经济和管理类(数学三、数学四)数学考试大纲进行协调统一下编写的教材。本书作为该教材的配套辅导书,紧扣教材编写大纲,围绕基本概念、基本方法和基本计算,精心组织典型例题和习题,力求在帮助读者同步学习或期末复习或考研备考过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能。

本书每章由五部分内容组成。

一、知识结构与内容提要　知识结构:归纳总结了本章知识点的联系与逻辑结构,以及与后续各章的联系;内容提要:列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,增强读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性的错误。学习内容提要后,即可直接阅读本书其他内容。

知识结构图列于每章之首,虽然便于读者了解全章概貌,但事实上更宜于在精读全章后再仔细回顾和品味,这将有助于读者达到我国著名数学家、教育家华罗庚先生倡导的“从厚到薄”的治学境界。

二、难点重点　说明本章学习中应注意的重点、难点,明确学习要求,其中有些也是考研的重点与难点。

三、典型例题解析　根据各章的知识点和问题类型的顺序安排典型例题分析的次序,通过各种典型例题的详尽分析,巩固和加深对基本概念的理解,增强知识间的相互联系,扩展和活跃解题思路,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力。

典型例题的选择以“助学”和“提高”为原则,采取从易到难、循序渐进、点面结合、前后联系的方法处理。其中既有对教材基本知识解读的基础题,也有历届硕士研究生入学考试中具有代表性和典型性的提高题;既有开拓思路、广泛联系的一题多解题,也有解题以后提出问题、推广引申、举一反三的思考题。

典型例题的形式以结合考研题型为主。有(1) 填空题(以基本计算为主),(2) 选择题(四选一,以基本概念为主),(3) 解答题(以概念性的计算题、综合题为主,还配备了一定数量的证明题)。

四、综合练习题 为了使读者获得更多的解题能力的训练，也为了弥补教材中习题数量及广度和深度上的不足，本书每章都选编了一定数量的与“典型例题解析”搭配的习题，供读者练习。

五、综合练习题解答与提示 本书每章最后一部分提供了所有综合习题的参考答案，其中较难的习题还提供了提示或解题思路。

此外，在本书的最后，我们将配套教材中的全部习题作了解答，以帮助读者解决在课程学习中遇到的困难。

“解题可以认为是人最富有特征的活动。……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能靠模仿与实践才能学会。……你想在解题中得到最大的收获，就应该在新做的题目中找到它的特征，那些特征在求解其他问题时，能起到指导作用。一种解题方法，若是经过你自己努力得到的，或是从别人那里学来的或听来的，只要经过自己的体验，那么对你来讲，它就是一种楷模，碰上类似的问题时，就成为你仿照的模型。”这是著名数学家、教育家乔治·波利亚(G. Polya)的一段名言，在这里和本书一起奉献给读者。引领读者到数学的海洋中去模仿，去实践，去体验。

由于编者水平所限，错误和不妥之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编著者

2007 年 1 月

目　　录

第1章　行　列　式

一、知识结构与内容提要

- 行列式
  - 概念 — 行列式的递归定义
  - 性质
    1. $|A^{T}|=|A|$
    2. 一行为零或两行成比例⇒$|A|=0$（充分条件）
    3. 拆项（加法）
    4. 提公因子 $k(k\neq 0)$（数乘）
    5. 两行互换，行列式变号
    6. 某行 k 倍加到另一行，其值不变

    （4～6）$\xrightarrow{\text{后续章节}}$ 初等变换
  - 展开式
    - 余子式
    - 代数余子式
    - $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}A_{lj}=\begin{cases}0 & k\neq l\\ |A| & k=l\end{cases}\xrightarrow{\text{后续章节}} AA^{*}=|A|E$
  - 计算
    - 数值型、含参型、抽象型 —
      1. 消零展开、降阶法或三角形法
      2. 拆项法
      3. 加边法
      4. 递推法
      5. 归纳法
      6. 利用范德蒙行列式

      $\xrightarrow{\text{后续章节}}$ 方阵乘积的行列式；分块矩阵的行列式；用特征值求行列式
  - 应用
    - 克莱姆法则及其应用
    - 行列式表示的函数，代数方程的根

    $\xrightarrow{\text{后续章节}}$ 可逆阵的判别；用 A^{*} 求 A^{-1}；线性相关性判别；矩阵的秩；求矩阵的特征值；正定矩阵的判别

（一）行列式的定义

二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n 阶行列式的定义：

由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式，其中，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 行第 j 列元素. 当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，定义

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

而 M_{1j}是 D_n 中去掉第 1 行第 j 列元素后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

我们称 M_{1j}为元素 a_{1j}的余子式，A_{1j}为元素 a_{1j}的代数余子式.

（二）行列式的性质

(1) **性质 1** 行列式的行和列（按原顺序）互换，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

由此，行列式对行成立的性质，对列也适用.

(2) 与一行（列）有关的性质：

性质 2 行列式中某行（列）元素全为零，则行列式的值为零.

性质 3 行列式中某行（列）元素有公因子 $k(k\neq 0)$，则可将 k 提到行列式的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则行列式可拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 与两行(列)有关的性质:

性质 5 行列式中两行(列)互换,行列式的值反号. ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$表示第 i 列与第 j 列互换.

性质 6 行列式中某两行(列)元素对应相等或对应成比例,行列式的值为零.

性质 7 行列式某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变. ⓘ$+k$ⓙ表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行,$[i]+k[j]$表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(三) 行列式的展开定理

(1) 余子式:在行列式$|\boldsymbol{A}|$中,去掉元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列,由剩下的元素按原来的位置顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij}的余子式,记成 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 代数余子式:带有正负号$(-1)^{i+j}$的余子式称为元素 a_{ij}的代数余子式,记为 A_{ij},即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

M_{ij},A_{ij}与 a_{ij}的大小、正负无关,与 a_{ij}所在的第 i 行、第 j 列元素无关,而与其

他元素有关.

(3) 行列式的展开公式:

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}(j=1,2,\cdots,n),$$

且有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,\ i\neq k,$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0,\ j\neq k.$$

故

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n.$$

(四) 克莱姆法则

(1) 克莱姆法则:若 n 个方程 n 个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,则方程组有唯一解,且

$$x_i=|\boldsymbol{A}_i|/|\boldsymbol{A}|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

其中,$|\boldsymbol{A}_i|$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 i 列元素(即 x_i 的系数)替换成方程组右端的常数项 b_1, $b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

(2) 推论:

若包含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,则方程组有唯一零解.

反之,若齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

二、难点重点

行列式在线性代数中有广泛应用.行列式的逆序定义是学习本章的难点,本书回避了逆序定义而采用递归定义,但还是希望读者对逆序定义有所了解.了解行列式的定义应抓住以下三条:

(1) n 阶行列式全部展开式总共有 $n!$ 项.

(2) 每项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,并冠以正号或负号,且其中一半项取正号,一半项取负号.

(3) 行列式的值是一个数,当行列式元素中引入参数或未知量时,则成为函数.

利用定义、性质、展开定理计算行列式或判别行列式是否为零是本章的重点.计算行列式有很多方法和技巧,充分理解行列式的性质、展开定理是计算行列式的基础.

对三、四阶行列式的计算要求准确、熟练,除掌握定义、性质、展开定理外,还要求针对具体的行列式的特点、元素的规律性,采用适当的方法,要不断总结经验,提高分析和运算能力.

对 n 阶行列式的要求应适度,本章的部分习题与后续章节有关,且采用了后续章节的符号,这部分习题可以等到后续各章讲课以后再学习或练习.

克莱姆法则在理论上是重要的.克莱姆法则关于齐次方程组的两个推论其实都是充分必要条件,也是重要结论.

三、典型例题解析

(一) 行列式定义及其应用

例 1-1 一个 n 阶行列式,全部展开后,共有多少项?每项是怎样组成的?其中正项项数、负项项数各是多少?

解 n 阶行列式全部展开后,共 $n!$ 项,因 D_n 由定义按第 1 行展开,共 n 项,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \qquad (*)$$

其中，$A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$是元素a_{1j}的代数余子式，是带正负号的$n-1$阶行列式，再由定义将A_{1j}按第1行展开，则上述n项中每一项都可展成$n-1$项，且每项中有一个$n-2$阶代数余子式，即共有$n(n-1)$项，…，如此继续展开，共有$n!$项.

n阶行列式的全部展开式的$n!$项中，每项均由取自不同行不同列的n个元素的乘积组成，由式($*$)知，D_n按第1行展开后的n项是$a_{1j}A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$. 因$A_{1j}$中不含$D_n$的第1行和第$j$列元素，故包含有$a_{1j}$的项不会再有第1行的元素和第$j$列的元素. 类似地继续展开，直到最后，$D_n$的全部展开式的$n!$项中，每项是$n$个元素的乘积，且$n$个元素取自不同的行、不同的列.

全部展开式中正项项数、负项项数各占一半，这是因为前面的展开式中无论正负号是如何定的，展开到二阶行列式时，共有$\frac{n!}{2}$项，设其中正项为k项，则负项为$\frac{n!}{2}-k$项，由于二阶行列式展开后是两项，一项为正，一项为负，则全部展开式中：

正项项数为$k+\left(\frac{n!}{2}-k\right)=\frac{n!}{2}$项；

负项项数也是$k+\left(\frac{n!}{2}-k\right)=\frac{n!}{2}$项.

正项项数、负项项数各占一半. ▍

例 1-2 一个n阶行列式中，等于零的元素个数多于n^2-n，证明该行列式为零.

证明 根据行列式的定义，全部展开后共有$n!$项的代数和，而每项均由来自不同行不同列的n个数相乘，因n阶行列式共有n^2个元素，其中等于0的元素个数多于n^2-n个，则不等于零的元素个数少于n个，从而该行列式的全部展开式的每项中至少有一个元素是零，故每项都是零，则行列式等于零. ▍

例 1-3 证明

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

证明 直接利用定义按第1行展开计算，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$
= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}
$$

$$
= 0.
$$

▍

例 1-4 利用定义证明：若 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素为 1 或 -1，则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于偶数.

证明 因 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素是 1 或 -1，由行列式定义知，行列式共有 $n!$ 项，此时每项为 1 或 -1，设 r 项为 -1，则 $n!-r$ 项为 $+1$. 因为 $n!$ $(n\geqslant 2)$ 是偶数，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= (n!-r)\cdot 1 + r\cdot(-1) \\
&= n! - 2r.
\end{aligned}
$$

从而得证 $|\boldsymbol{A}|$ 是偶数. ▍

例 1-5 利用行列式的定义证明：

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.
$$

证明 由行列式定义知其是 $n!$ 项的代数和，每项是不同行不同列的 n 个元素的积. 上述行列式中除主对角元素乘积一项是奇数 1 外，其余各项(共 $n!-1$ 项)的每项中至少有一个 2，故均是偶数. $n!-1$ 个偶数之和仍是偶数，再和 1 相加，是奇数，不可能是零，故上述行列式不等于零. ▍

（二）用定义、性质、展开定理计算行列式

1. 主(副)对角线和上(下)三角形行列式(称为一条线的行列式)的计算

例 1-6 直接展开计算行列式：

$$
D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

解

$$
D_n = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.
$$

▍

评注 显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

上述三个行列式从左至右分别称为主对角形行列式、左下三角形行列式、右上三角形行列式，其值为主对角元素的连乘积.

例 1-7 直接展开计算(一条线的)行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3\,n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{1n}a_{2\,n-1}(-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3\,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4\,n-3} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}(-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1}\cdots(-1)^{2+1}$$

$$= a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}(-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1}\cdots(-1)^{2+1}(-1)^{1+1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+2n} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

▌

评注 显然有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$