CHENGREN YAOXUE GAODENG JIAOYU ZHUANKE JIAOCAI

成人药学高等教育专科教材

医药应用统计方法

YIYAO YINGYONG TONGJI FANGFA

成人药学高等教育专科教材编委会 组织编写

主编 杨保华

中国医药科技出版社

成人药学高等教育专科教材

医药应用统计方法

成人药学高等教育专科教材编委会　　**组织编写**

主　编　杨保华
副主编　王秀琴　宋晓新　徐琛梅
编　者（按姓氏笔画排序）
王秀琴（河南大学）
宋晓新（河南大学）
杜利敏（河南大学）
杨保华（河南大学）
徐琛梅（河南大学）

中国医药科技出版社

内 容 提 要

本书共分三个部分，第一部分为一元微积分学，包括函数的概念、函数的极限与连续，一元函数的导数、微分，一元函数的不定积分和定积分；第二部分为概率论初步，包括随机事件与概率、随机变量、分布函数、随机变量的数字特征以及大数定理和中心极限定理等；第三部分为数理统计，包括假设检验的原理，抽样分布、参数的估计、假设检验方法、方差分析、回归分析、正交试验设计和均匀设计等内容。

本书的特点是将一元微积分学作为基础知识，以满足读者学习数理统计方法的需要。本书主要适用于成人药学专科教育，也可适用于临床医学、预防医学、药剂学、生物制药学、生物学、医药贸易等专业，还可作为医药工作者业余自学的教材。

图书在版编目（CIP）数据

医药应用统计方法/杨保华主编. —北京：中国医药科技出版社，2007.5
成人药学高等教育专科教材
ISBN 978-7-5067-3688-6

Ⅰ. 医… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 医学统计-统计方法-成人教育：高等教育-教材
Ⅳ. R195.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 075898 号

美术编辑 陈君杞
责任校对 张学军
版式设计 郭小平

出版 中国医药科技出版社
地址 北京市海淀区文慧园北路甲 22 号
邮编 100082
电话 责编：010-62235640 发行：010-62244206
网址 www.cspyp.cn www.mpsky.com.cn
规格 787×1092mm 1/16
印张 15 1/4
字数 355 千字
版次 2007 年 5 月第 1 版
印次 2007 年 5 月第 1 次印刷
印刷 三河富华印刷包装有限公司
经销 全国各地新华书店
书号 ISBN 978-7-5067-3688-6
定价 28.00 元

成人药学高等教育专科教材
编写委员会

序　言

我国成人药学高等专科教育历史悠久，多年来为我国医药事业的发展做出了突出贡献，改革开放以来更是取得了较大、较快的发展。鉴于成人药学专科教育的教材建设相对滞后，建立一套自成体系、面向社会实践、符合实用型成人高等教育特色的教材显得十分必要。

河南大学成人高等教育药学专业作为河南省成人高等教育28个专业教学改革试点单位之一，根据多年来成人药学专科教育的发展特点以及社会医药领域（药品生产、药品销售、药品检验、药品使用等领域）对本专业实用型人才的需求状况，在开展对学生培养规格、教学模式、教材体系等一系列改革的基础之上，我们组织编写了本套教材。

教材编写遵循培养目标，在内容编排上除强调“三基”（基础理论、基本知识、基本技能）、“五性”（思想性、科学性、先进性、启发性、适用性）及能力培养外，注重体现《面向21世纪教育振兴行动计划》培养高素质人才的要求，并本着“简单明了，重点突出，深入浅出，新颖实用”的编写原则，力求突出成人教育的特点，使专业基础课内容与专业课内容有机融合，简明、实用。在编写过程中，还充分注意到药学成人高等专科教育中的脱产教育、函授（业余）教育等多种教学形式，力求使这些教材能具有通用性。

成人药学高等教育专科教材编委会

2006年10月

编写说明

数理统计方法在医药领域有着广泛的应用，在疾病的分类、诊断，流行病的预测、防治及预报，处方的设计，制药工艺的改进，药品质量的控制，药物的评价，生物鉴定及试验设计等方面发挥了不可替代的作用，取得了显著的成效。

为了贯彻理论联系实际的原则，结合成人教育的特点，立足于培养实用型人才，我们组织编写了《医药应用统计方法》一书。

本教材在编写时突出了以下特点：①突出医药应用的特点，尽量根据现代医药研究的最新成果选编例题与习题；②突出基本概念和应用方法，对于基本理论不作深入研究，减少不必要的理论推导，重点体现方法的应用，加强对学生数学应用意识的教育，培养学生的创新意识；③突出“简单明了，重点突出，深入浅出，新颖实用”的编写原则。

本书内容共分十章，第一部分为高等数学部分，包括函数和极限、一元函数微分学和一元函数积分学；第二部分为概率部分，包括随机事件与概率、随机变量的分布及数字特征；这些都是医药应用统计的基础；第三部分为统计部分，主要介绍抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、正交试验设计和均匀设计等内容。

本书主要适用于成人药学专科教育，同时也适用于临床医学、预防医学、药剂学、生物制药学、生物学、医药贸易等专业。全书共 72 学时，也可根据实际需要进行适当的增减。

由于编者水平有限，本书若有不当之处，敬请各位同仁及使用者批评指正，以便进一步修改和完善。

杨保华

2007 年 1 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象，极限是微积分学的基础，连续、导数、微分、积分等重要概念及运算都是建立在极限概念的基础上的。本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念及运算。

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

我们在研究实际问题的过程中，经常会遇到各种不同的量，其中有些量在过程中始终保持一定的数值，即数值不变的量称为常量（constant）；而有的量在过程中可以取不同的数值，即数值可变化的量称为变量（variable）。例如，自由落体运动的速度随时间而变；人或动物服药后，血液中的药物浓度也随时间而变；圆的面积随半径而变等等。

常量与变量的表示方法：通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，t 等表示变量。

例：正在发育成长的球形细胞的体积 V 与半径 r 的关系为：

$$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$$

在这个过程中，V 与 r 是变量，圆周率 π 是常量。

某个量究竟是常量还是变量，是相对于一定的过程和一定的条件的。常量可当作一种特殊的变量，这样我们就把“不变”统一在“变化”之中。在同一个研究过程中出现的几个变量是相互联系的，这就是函数关系。

2. 函数的概念

定义　设 x、y 是同一变化过程中的两个变量，如果变量 x 的每一个允许的取值，变量 y 按照一定的规律总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数（function）。这时，变量 x 称为自变量（independent），变量 y 又称为因变量（dependent），记为：

$$y=f(x)$$

自变量所允许取值的范围称为函数的定义域（domain of definition）。函数的定义域通常用区间来表示。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。称 $f(x_0)$ 为 y 在 x_0 点函数值，所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域。

函数有两个要素：一是函数关系；二是函数的定义域。

例：给一糖尿病患者按每千克体重口服葡萄糖 1.75g 后，在不同的时间 t 测定其血糖水平 y（表 1－1），则患者的血糖水平 y 是时间 t 的函数。它们之间的函数关系可由测得的数据表示为：

表 1－1 患者血糖水平数据表

口服葡萄糖后的时间 t（h）	0	0.5	1.0	2.0	3.0
患者的血糖水平 y（mg%）	115	150	175	165	120

二、初等函数

1. 基本初等函数

我们把幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathrm{R}$），指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$），对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot}x$ 统称为基本初等函数。很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数。

2. 复合函数

定义 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，那么对于相应的 u 使 $f(u)$ 有意义的自变量 x 值，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$。

注意复合函数有两方面要求：一方面，可以把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；另一方面，可以把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数。

例 1 已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数。

解：$y=\ln u=\ln x^2$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

例 2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数。

解：$y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$。

复合函数的中间变量可以不限于一个，见下。

例 3 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些简单函数复合而成的？

解：令 $u=\sin x$，则 $y=e^{u}$，故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^{u}$，$u=\sin x$ 复合而成的。

例 4 函数 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由哪些初等函数复合而成的？

解：令 $u=\tan(2\ln x+1)$，则 $y=u^3$；再令 $v=2\ln x+1$，则 $u=\tan v$。

故 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由 $y=u^3$；$u=\tan v$，$v=2\ln x+1$ 复合而成的。

例 5 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$。

解：令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^{u}$；再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$。

故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^{u}$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 复合而成的。

3. 初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一

个式子表示的函数，称为初等函数. 例如：

$$y=\frac{\sin x}{x^2+1},\ y=\log_a\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

等都是初等函数。

三、函数的简单性质

1. 有界性

设函数$f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果存在一个正数M，使对所有的$x\in(a, b)$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内有界。否则，称函数$f(x)$在(a, b)内无界。

例如，$y=\frac{1}{x}$在$(1, 2)$内有界，在$(0, 1)$内无界。

2. 单调性

设函数$f(x)$在区间(a, b)内有定义，x_1，x_2是(a, b)内的任意两点，当$x_1<x_2$时，若总有$f(x_1)<f(x_2)$成立，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内是单调递增的；若总有$f(x_1)>f(x_2)$成立，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内是单调递减的。

例如，$y=\sin x$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内是单调递增的；$y=x^2$在$(-\infty, 0)$内是单调递减的。

3. 奇偶性

在$y=f(x)$的定义域内，若有$f(-x)=-f(x)$成立，则称函数$f(x)$是奇函数；若有$f(-x)=f(x)$成立，则称函数$f(x)$是偶函数；奇函数的图像是与原点对称，而偶函数的图像是与y轴对称。

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$是奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$是偶函数。

4. 周期性

在$y=f(x)$的定义域内，若存在正数T，使得$f(x)=f(x+T)$成立，则称函数$f(x)$是周期函数，满足这个等式的最小正数T，称为函数的周期。

例如$y=\sin x$，$y=\cos x$都是周期函数，周期为2π。

四、分段函数

有些函数，对其定义域内不同自变量x的值，不能用一个解析式来表示，而要用两个或两个以上的解析式来表示，这样的函数称为分段函数（piecewise function）。

例：设某药物的每天剂量为y（单位：mg），对于16岁以上的成年人用药剂量是一常数，设为2mg；而对于16岁以下的未成年人每天用药剂量y与年龄x呈正比，比例系数为0.125mg/岁，其函数关系为：

$$y=\begin{cases}0.125x & 0<x<16\\ 2 & x\geqslant 16\end{cases}$$

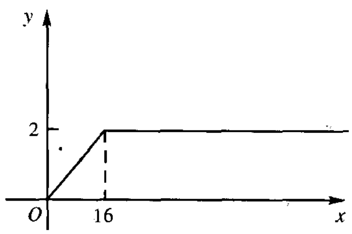

图1－1 药剂量y与年龄x的关系

这里，用药剂量y是年龄x的函数。图1－1是该

函数的图像。

应该注意：分段函数的图像是由几个各段不同的图形组成的。分段函数是一个函数而不是几个函数。求分段函数的函数值时，要根据自变量所在的范围，用相应的解析式来计算。

第二节 极 限

在研究实际问题时，不仅研究函数在变化过程中的取值，还需要研究当自变量变化时函数的变化趋势如何，这就是极限（limit）所要描述和解答的问题。本节根据自变量的变化过程，分两种情况来讨论函数的极限，即 $x\to\infty$ 时函数的极限和 $x\to x_0$ 函数的极限。

一、极限的概念

（一）$x\to\infty$ 时函数的极限

为了更好地理解 $x\to\infty$ 时函数的极限，下面先讨论数列的极限。

1. 数列的极限

两个数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots; \qquad (1) \qquad\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots. \qquad (2)$$

在数轴上表示（图 1－2）。

图 1－2 数列的变化趋势

数列（1）中的项无限趋近于 0，数列（2）中的项无限趋近于 1。

定义 当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称这个数列存在极限 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$；读作“当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A”；符号“$\to$”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 无限增大”。$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 有时也记作当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to A$，或 $a_n\to A$，$(n\to\infty)$。

若数列 $\{a_n\}$ 存在极限，也称数列 $\{a_n\}$ 收敛；若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

注意：（1）一个数列有无极限，应该分析随着项数的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数，如果这样的数存在，那么这个数就是所论数列的极限，否则数列的极限就不存在。

（2）常数数列的极限都是这个常数本身。

2. $x\to\infty$ 时函数的极限

$x\to\infty$ 包含以下两种情况：

(1) x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x\to-\infty$。若 x 不指定正负，只是 $|x|$ 无限增大，则写成 $x\to\infty$。

例：讨论函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势。

解：作出函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 的图像（图 1－3）。

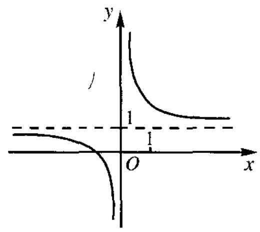

图 1－3　函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 的图像

当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$y=\frac{1}{x}+1\to1$，因此当 $x\to\infty$ 时，$y=\frac{1}{x}+1\to1$。

定义　如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$　或 $x\to\infty$，$f(x)\to A$。

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad\text{或}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例 1　作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图像，并判断下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$；(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$。

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

见图 1－4。

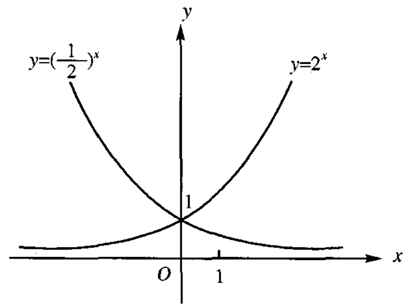

图 1－4　函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图像

例 2　讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限。

(1) $y=1+\frac{1}{x^2}$　　(2) $y=2^x$

解：(1) 当 $x\to+\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$；

当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$。因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 无限地接近于常数 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$。见图 1－5。

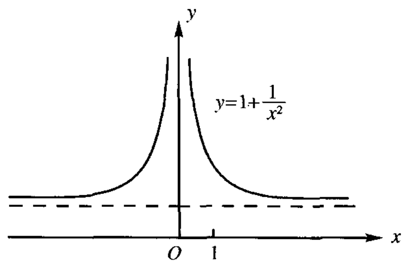

图 1－5　函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 的图像

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=2^x\to0$。

因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=2^x$ 不可能无限地趋近某一个常数，即 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在。

结论：当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在并且相等为 A 时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在为 A，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A。$$

（二）$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to x_0$ 包含以下两种情况：

（1）$x\to x_0^+$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

（2）$x\to x_0^-$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0。

记号 $x\to x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0，对从哪个方向趋近没有限制。

例 1 讨论当 $x\to2$ 时，函数 $y=x+1$ 的变化趋势。

解：作出函数 $y=x+1$ 的图像（图 1-6）。

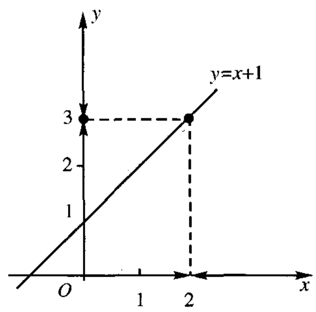

图 1-6 函数 $y=x+1$ 的图像

不论 x 从小于 2 的方向趋近于 2，或者从大于 2 的方向趋近于 2，函数 $y=x+1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈接近于 3，所以说

当 $x\to2$ 时 $y=x+1\to3$.

例 2 讨论当 $x\to1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势。

解：作出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像（图 1-7）.

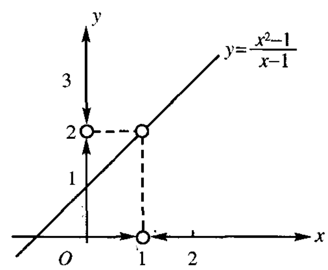

图 1-7 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像

函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$，在 $x=1$ 处函数没有定义，x 不论从大于 1 或从小于 1 两个方向趋近于 1 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值是从两个不同方向愈来愈接近于 2 的。我们研究当 x 趋近于 1 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势时，并不计较函数在 $x=1$ 处是否有定义，而仅关心函数在 $x=1$ 的邻近的函数值的变化趋势，也即我们认为在 $x\to1$ 时隐含一个要求：$x\neq1$。因此，

当 $x\to1$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2$。

1. 定义

如果当 $x\neq x_0$，$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 存在极限 A；数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

例：求下列极限：

（1）$f(x)=x$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；（2）$f(x)=C$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$（$C$ 为常数）。