

研究生力学丛书

Mechanics Series for Graduate Students

# 计算动力学

## Computational Dynamics

张 雄 王天舒 编著

Zhang Xiong Wang Tianshu

清华大学出版社

研究生力学丛书

Mechanics Series for Graduate Students

# 计算动力学

Computational Dynamics

张 雄 王天舒 编著

Zhang Xiong Wang Tianshu

清华大学出版社  
北 京

## 内 容 简 介

本书将计算结构动力学、计算冲击动力学和计算多体系统动力学内容有机整合,系统讲授工程结构和机械系统在各类瞬态载荷作用下动力学行为的数值分析方法和程序实现技术。全书分为9章和3个附录。第1章从加权余量法出发,讲述达朗贝尔-拉格朗日原理、哈密顿原理和广义变分原理。第2章以平面三结点三角形单元为例,讲述有限元法的一般过程,详细讨论了有限元法的程序实现方法,并给出了有限元法示例程序STAP90。第3章详细讲述大型特征值问题的求解方法及误差估计问题,给出了广义雅可比法、子空间迭代法和Lanczos迭代法的FORTRAN 90程序。第4章阐述大型离散系统运动方程的求解方法,给出了时间积分示例程序TIP90。第5章讲述大型复杂系统动力分析的有效方法—动态子结构法。第6章讲述几何非线性、材料非线性和边界条件非线性动力学问题的有限元法分析方法,重点阐述了冲击和爆炸等高速动力学问题的模拟方法,也兼顾了非线性结构动力学的模拟问题,给出了高速碰撞分析显式有限元程序EFEP90。第7章简要地介绍并行计算方法,给出了并行版的高速碰撞分析显式有限元程序PEFEP90。第8章讲述伽辽金型无网格法的基本原理,详细阐述了在冲击爆炸等问题中应用较为成功的SPH和物质点法。第9章讲述多刚体系统和柔性多体系统动力学的建模和数值求解方法,给出了多刚体系统动力学分析示例程序MBSim。附录A简要地介绍张量指标记号、Voigt记号和张量运算法则。附录B介绍Tecplot进行有限元后处理的相关功能。附录C讲述FEAP程序的使用方法、程序结构以及进行二次开发的方法,便于学生在FEAP程序的基础上快速开展自己的研究工作。

本书可作为力学、机械、航空航天、土木水利、汽车等专业的研究生和高年级本科生教材及科研人员的参考书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

计算动力学/张雄,王天舒编著. —北京:清华大学出版社,2007.12  
(研究生力学丛书)

ISBN 978-7-302-15292-7

I. 计… II. ①张… ②王… III. 动力学-研究生-教材 IV. O313

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第073859号

责任编辑:佟丽霞 杨 倩

责任校对:赵丽敏

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

[c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

社总机:010-62770175

邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015

客户服务:010-62776969

印刷者:北京密云胶印厂

装订者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170×230 印 张:35 字 数:645千字

版 次:2007年12月第1版 印 次:2007年12月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:55.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:019637-01

# 前言

动力学问题在国民经济和科学技术的发展中有着广泛的应用。当物体的局部位置受到扰动（如载荷作用、参数变化等）时，该扰动就会逐渐传播到未扰动的区域去，这种现象称为**应力波的传播**。当载荷作用时间短（即载荷变化快）且受力物体在加载方向上的尺寸又足够大时，应力波的传播就显得特别重要。此时，材料对外载荷的动态响应必须通过应力波来研究。例如，无限介质中的局部扰动引起的动态响应、半无限介质表面受到撞击以及爆炸和高速冲击所引起的动态响应都属于这类问题。它的研究在结构的抗震设计、人工地震勘探、无损损伤、动能武器、穿甲、空间碎片防护等领域都有广泛的应用背景。

对于薄板、薄壳以及梁、拱这样一类结构，如果外载的作用时间较长并且变化较缓慢，应力波在结构中的传播时间比外载的作用时间要短的多，应力波在其中来回反射多次后应力趋于均匀化，结构的动态响应主要表现为结构的变形并且随时间而发展，甚至引起结构的断裂、贯穿或破坏。这类问题称为**结构动力学问题**。例如，地面的高层建筑和厂房、核电站的安全壳和热交换器、近海工程的海洋石油平台等在强风、水流、地震以及波浪等各种动力载荷作用下的响应问题。这类结构的破裂、倾覆和垮塌，将给人民的生命财产造成巨大的损失，因此对其进行正确分析和设计，在理论和实际上都具有重要的意义。

应力波的传播问题将物体的动态响应作为一个过程来研究，而结构动力学则忽略扰动传播过程，直接研究结构的变形、断裂及其与时间的关系。

工程中除了房屋建筑、桥梁等结构外，在机械、航空航天、汽车、机器人等领域中存在大量的机构。结构在正常工况下构件间没有相对运动，而机构在运行过程中部件间存在相对运动，如航空航天器、机车与汽车、操作机械臂、机器人等复杂系统。这些复杂机械系统可以模型化为多个物体通过运动副连接的系统，称为**多体系统**。随着科技的发展，机械系统的构型越来越复杂，因此研究多体系统的动力学特性具有很重要的理论和实际意义。

本教材将**计算结构动力学、计算冲击动力学和计算多体系统动力学**内容有

机整合,系统讲授工程结构和机械系统在各种瞬态载荷作用下动力学行为的数值分析方法和程序实现技术。

王天舒负责编写第9章,张雄负责编写其他章节及全书的统稿。本教材的讲义已在清华大学航天航空学院试用了多年,许多研究生都作出了重要贡献。邢向华参与编写了第4.10节和第4.12节,并编写了时间积分法示例程序 TIP90,马上参与编写了第6.10节、第6.11节、第8.4节和附录B,刘岩参与编写了第4.8节,汪敏参与编写了附录C和 Lanczos90程序,王汉奎参与编写了第7章。

本书具有以下特点:

1. 注重基本概念的阐述,力图使学生在掌握各类方法基本原理的同时,理解各类方法之间的内在联系与区别。

2. 注重培养学生的程序设计能力。本课程要求学生除掌握基本原理以外,还必须具有较强的程序阅读和设计能力,因此本书中给出了大量的源程序,如结构分析程序 STAP90;特征值分析程序 JACOBI90、SSPACE90 和 LANCZOS90、时间积分程序 TIP90 (包括中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法、Wilson $\theta$  法、精细积分法和基于伽辽金弱形式的时间积分方法)、高速碰撞显式有限元分析程序 EFEP90 和多刚体系统动力学程序 MBSIM。这些程序均可在本教材的网站 <http://xzhang.comdyn.cn/comdyn> 下载。

3. 力图反映相关研究领域中的最新研究进展,如精细积分法、基于伽辽金弱形式的时间积分法、无网格法、光滑粒子流体动力学法 (SPH)、物质点法 (MPM) 等,使学生尽快进入到相关的研究领域中。

全书共分为9章和3个附录。运动微分方程要求在求解域内任意点任意时刻均满足,对于一些简单问题可以解析求解,但对于复杂问题只能通过数值方法寻求其近似解。第1章从加权余量法出发,讲述了达朗贝尔-拉格朗日原理、哈密顿原理和广义变分原理,将运动微分方程转化为等效积分弱形式或泛函(哈密顿作用量)的驻值问题,不再要求微分方程在求解域内任意点任意时刻均满足,而只要求微分方程在某种平均意义下满足,便于构造近似解。第2章以平面三结点三角形单元为例,讲述了在复杂求解域上建立近似解的常用方法—有限元法的一般过程,建立了离散系统的运动方程,详细讨论了有限元法的程序实现方法,并给出了有限元法示例程序 STAP90\*。求解无阻尼系统的自由振动问题最终转化为求解特征值问题,因此第3章详细讲述了大型特征值问题的求解方法及误差估计问题,并给出了广义雅可比法、子空间迭代法和 Lanczos 迭代法的

\*STAP90 是在 KJ Bathe 教授用 FORTRAN IV 编写的 STAP 程序<sup>[2]</sup>的基础上用 FORTRAN 90 语言改写而成的,其结构与 SAP 和 ADINA 程序结构类似。

FORTRAN 90 程序。第 4 章阐述了大型离散系统运动方程的求解方法,包括振型叠加法和直接积分法,并给出了时间积分示例程序 TIP90。用有限元法离散大型复杂结构(如高层建筑、飞机结构等)时系统的自由度数可达几十万甚至几百万,仅按第 3 章和第 4 章讲述的方法求解是很困难的,因此第 5 章讲述了大型复杂系统动力分析的有效方法—动态子结构法。

第 6 章讲述了几何非线性、材料非线性和边界条件非线性动力学问题的有限元分析方法,重点阐述了冲击和爆炸等高速动力学问题的模拟方法,也兼顾了非线性结构动力学的模拟问题,并给出了高速碰撞分析显式有限元程序 EFEP90。对于大型复杂结构的非线性动力学问题,在单机上求解是很困难的,需要采用并行计算技术,因此第 7 章简要地介绍了并行计算方法,并给出了并行版的高速碰撞分析显式有限元程序 PEFEP90。

在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速冲击、裂纹动态扩展、流固耦合、局部化等涉及特大变形的问题时,有限元网格可能发生严重扭曲,不仅需要网格重构,而且严重地影响解的精度,甚至导致计算失败。无网格法是近年来发展起来的一种近似方法,它采用基于点的近似,可以彻底或部分地消除网格,不需要网格的初始划分和重构,不仅可以保证计算的精度,而且可以大幅度减小网格生成的工作量,在涉及特大变形的问题中具有诱人的应用前景。第 8 章讲述了伽辽金型无网格法的基本原理,并详细阐述了在冲击爆炸等问题中应用较为成功的 SPH 和物质点法。

第 9 章讲述了多刚体系统和柔性多体系统动力学的建模和数值求解方法,并给出了多刚体系统动力学分析示例程序 MBSim。

为了叙述和推导方便,本书使用了指标记号和张量运算。附录 A 简要地介绍了指标记号、Voigt 记号和张量运算法则。有限元分析结果的数据量很大,必须借助于后处理软件对计算结果进行可视化处理。Tecplot 是功能强大的数据可视化软件,可以将科学或工程计算中得到的大量数据形成直观图形,包括绘制 XY 曲线、轮廓图、云图、等值线、向量图、离散点图等。Tecplot 也能够读取和处理二维和三维的有限元网格的数据,绘制应力云图,可作为有限元程序的后处理软件。附录 B 介绍了 Tecplot 进行有限元后处理的相关功能。

FEAP 程序是与 O. C. Zienkiewicz 和 R. L. Taylor 编写的教材(The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 2005 年第 5 版)配套的教学程序,由美国加州大学伯克利分校土木与环境工程系 Robert L. Taylor 教授研制开发。该程序采用宏命令程序设计方法,用户可以很方便地在 FEAP 中增加自己的命令,实现相应的功能。FEAP 程序也可以作为本课程的教学程序,让学生在 FEAP

程序的基础上完成课程的项目训练,以便于学生将来在 FEAP 程序的基础上快速开展自己的研究工作。因此附录 C 讲述了 FEAP 程序的使用方法、程序结构以及进行二次开发的方法。

本书可作为力学、机械、航空航天、土木水利、汽车等专业的研究生和高年级本科生教材及科研人员的参考书。

# 目录

|                 |    |
|-----------------|----|
| 前言              | I  |
| 第1章 线弹性动力学变分原理  | 1  |
| 1.1 加权余量法       | 1  |
| 1.2 达朗贝尔-拉格朗日原理 | 5  |
| 1.3 哈密顿原理       | 7  |
| 1.4 约束条件的施加方法   | 14 |
| 1.5 广义变分原理      | 18 |
| 第2章 有限元离散       | 21 |
| 2.1 三结点三角形单元    | 23 |
| 2.2 运动方程        | 27 |
| 2.3 质量矩阵        | 30 |
| 2.4 阻尼矩阵        | 34 |
| 2.5 刚度矩阵        | 35 |
| 2.6 有限元程序实现     | 39 |
| 2.7 STAP90程序    | 55 |
| 第3章 大型系统特征值问题   | 58 |
| 3.1 特征解的性质      | 59 |
| 3.2 误差估计        | 64 |
| 3.3 向量迭代法       | 66 |
| 3.4 变换法         | 76 |
| 3.5 瑞利-里兹法      | 94 |
| 3.6 子空间迭代法      | 98 |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 3.7 Lanczos迭代法            | 123        |
| <b>第4章 运动方程的解法</b>        | <b>140</b> |
| 4.1 振型叠加法                 | 140        |
| 4.2 直接积分法的稳定性             | 144        |
| 4.3 中心差分法                 | 147        |
| 4.4 Houbolt法              | 155        |
| 4.5 Newmark法              | 162        |
| 4.6 Wilson $\theta$ 法     | 169        |
| 4.7 广义 $\alpha$ 法         | 177        |
| 4.8 精细积分法                 | 181        |
| 4.9 时间域离散                 | 187        |
| 4.10 基于伽辽金法弱形式的时间积分法      | 191        |
| 4.11 各种方法的比较              | 201        |
| 4.12 时间积分程序TIP90          | 207        |
| <b>第5章 动态子结构方法</b>        | <b>215</b> |
| 5.1 静力凝聚和静力子结构法           | 216        |
| 5.2 固定界面模态综合法             | 219        |
| 5.3 自由界面模态综合法             | 225        |
| 5.4 复模态理论                 | 230        |
| <b>第6章 冲击动力学问题的有限元模拟</b>  | <b>236</b> |
| 6.1 网格描述                  | 237        |
| 6.2 连续介质力学基础              | 241        |
| 6.3 拉格朗日法                 | 259        |
| 6.4 方程求解                  | 266        |
| 6.5 人工体积粘性                | 273        |
| 6.6 沙漏模态                  | 275        |
| 6.7 应力更新                  | 282        |
| 6.8 材料模型                  | 285        |
| 6.9 接触-碰撞算法               | 301        |
| 6.10 高速碰撞分析显式有限元程序 EFEP90 | 317        |
| 6.11 LS-DYNA程序介绍          | 322        |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| <b>第7章 并行计算</b>              | <b>328</b> |
| 7.1 并行计算和并行机                 | 328        |
| 7.2 任务分配                     | 330        |
| 7.3 MPI并行库                   | 333        |
| 7.4 EFEP90程序并行化              | 342        |
| <b>第8章 无网格法</b>              | <b>348</b> |
| 8.1 移动最小二乘近似                 | 351        |
| 8.2 伽辽金型无网格法                 | 363        |
| 8.3 光滑质点流体动力学方法              | 379        |
| 8.4 物质点法                     | 387        |
| <b>第9章 计算多体系统动力学</b>         | <b>395</b> |
| 9.1 引言                       | 395        |
| 9.2 刚体运动学                    | 396        |
| 9.3 约束及约束方程                  | 416        |
| 9.4 运动学分析                    | 428        |
| 9.5 动力学分析                    | 431        |
| 9.6 多刚体系统动力学方程的数值分析方法        | 444        |
| 9.7 静力学分析和逆动力学分析             | 451        |
| 9.8 柔性多体系统动力学建模方法            | 452        |
| 9.9 多刚体系统动力学分析示例程序           | 473        |
| <b>附录 A 张量</b>               | <b>508</b> |
| A.1 指标记号与求和约定                | 508        |
| A.2 张量运算                     | 511        |
| A.3 Voigt记号                  | 515        |
| <b>附录 B 用TECPLOT进行有限元后处理</b> | <b>518</b> |
| <b>附录 C FEAP程序</b>           | <b>525</b> |
| C.1 FEAP程序                   | 525        |
| C.2 程序结构                     | 529        |
| C.3 单元子程序的执行过程               | 533        |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| C.4 时间积分法的实现过程 . . . . . | 535 |
| C.5 特征值求解过程 . . . . .    | 539 |
| 索引                       | 542 |
| 参考文献                     | 548 |

# 第1章

## 线弹性动力学变分原理

为了讨论方便,本书采用小写字母下标 $i, j$ 表示与各空间坐标方向对应的物理量,如用 $x_i$ 表示 $(x, y, z)$ ,用 $u_i$ 表示 $(u, v, w)$ 。线弹性动力学的控制方程为:

$$\text{运动方程} \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{在} V \text{中} \quad (1.1)$$

$$\text{应变-位移关系} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

$$\text{应力-应变关系} \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.3)$$

$$\text{边界条件} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad \text{在} S_\sigma \text{上} \quad (1.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在} S_u \text{上} \quad (1.5)$$

$$\text{初始条件} \quad u_i|_{t=0} = \bar{u}_i^0 \quad (1.6)$$

$$\dot{u}_i|_{t=0} = \bar{\dot{u}}_i^0 \quad (1.7)$$

其中 $\sigma_{ij}$ 、 $\varepsilon_{ij}$ 和 $u_i$ 分别为应力张量、应变张量和位移矢量, $\bar{f}_i$ 、 $\bar{T}_i$ 和 $\bar{u}_i$ 分别是域 $V$ 中的体力、边界 $S_\sigma$ 上的给定面力和边界 $S_u$ 上的给定位移,它们都是时间 $t$ 和空间坐标 $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )的函数。 $\bar{u}_i^0$ 和 $\bar{\dot{u}}_i^0$ 分别为初位移矢量和初速度矢量。本章中采用了重复指标求和约定,即重复下标表示对该下标在其取值范围内求和,见附录A。

### 1.1 加权余量法

对于一些简单问题,可以采用解析方法求出其精确解,它在域 $V$ 中任一点任一时刻均满足运动方程(1.1),在边界 $S_\sigma$ 上任一点任一时刻均满足边界条件(1.4)。然而,对于复杂的实际问题,只能采用数值方法来求其近似解。近似解通常不能

精确满足运动方程(1.1)和边界条件(1.4), 即

$$R_i = \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i \neq 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (1.8)$$

$$\bar{R}_i = \sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i \neq 0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (1.9)$$

式中  $R_i$  和  $\bar{R}_i$  分别为运动方程(1.1)和边界条件(1.4) 的余量。

加权余量法 (weighted residual methods) 是求解微分方程近似解的一种常用方法, 它允许运动方程和边界条件在各点都存在余量, 但要求这些余量在域  $V$  中和边界  $S_\sigma$  上的加权积分为零, 即要求满足余量方程:

$$\int_V R_i v_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{R}_i \bar{v}_i dS = 0 \quad (1.10)$$

式中,  $v_i$  和  $\bar{v}_i$  分别为定义在域  $V$  和边界  $S_\sigma$  上的权函数 (test function)。

若积分方程(1.10)对任意权函数  $v_i$  和  $\bar{v}_i$  都成立, 则微分方程(1.1)在域  $V$  内任一点任一时刻都满足, 边界条件(1.4)在边界  $S_\sigma$  上任一点任一时刻都满足, 因此式(1.10)是微分方程(1.1)和边界条件(1.4)的等效积分形式。

一般可将近似解取为一族已知函数的线性组合, 即

$$u_i = \sum_{I=1}^N \phi_I a_{iI} \quad (1.11)$$

其中  $a_{iI}$  为待定参数, 它们由式(1.10)确定。  $\phi_I$  为定义在整个求解域上的已知函数, 称为试探函数 (trial function) (或基函数、形函数), 它取自完全的函数序列 (即任一函数都可以用此函数序列展开), 并且是线性独立的。加权余量法实质上是选择合适的待定参数强迫余量在某种平均意义下为零。

任何相互独立的完备函数集都可以作为权函数, 选取不同的权函数就得到不同的加权余量法。为了简单起见, 在下面的讨论中, 假设近似函数精确满足边界条件 (即  $\bar{R}_i = 0$ ), 因此只考虑域内余量。权函数可以取为  $N$  个函数的线性组合, 即

$$v_i = \sum_{I=1}^N W_I b_{iI} \quad (1.12)$$

式中  $b_{iI}$  为待定系数。将上式代入式(1.10)中, 考虑到待定系数  $b_{iI}$  的任意性, 得:

$$\int_V R_i W_I dV = 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.13)$$

下面将讨论几种常用的权函数。

### 1.1.1 配点法

权函数取为Dirac- $\delta$ 函数:

$$W_I = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.14)$$

将上式代入式(1.13)中, 并利用Dirac- $\delta$ 函数的性质可得:

$$R_i(\mathbf{x}_I) = 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

这种方法相当于简单地强迫余量在域内的 $N$ 个离散点(称为配点)上为零。上式共有 $3N$ 个方程, 可以解出 $3N$ 个待定系数 $a_{iI}$ 。

### 1.1.2 子域法

权函数在 $N$ 个子域 $V_I$ 内取为1, 而在子域 $V_I$ 外取为零, 即

$$W_I = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in V_I \\ 0 & \mathbf{x} \notin V_I \end{cases} \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.16)$$

子域法的实质是强迫余量在这 $N$ 个子域 $V_I$ 的积分为零。

### 1.1.3 最小二乘法

最小二乘法要求调整近似函数中的参数 $a_{iI}$ , 使余量的均方和为最小, 即

$$\frac{\partial}{\partial a_{iI}} \int_V R_i^2 dV = 2 \int_V R_i \frac{\partial R_i}{\partial a_{iI}} dV = 0 \quad (1.17)$$

与式(1.13)相比, 可知最小二乘法的权函数为

$$W_I = \frac{\partial R_i}{\partial a_{iI}} \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.18)$$

### 1.1.4 伽辽金法

伽辽金法利用近似解的试探函数序列 $\phi_I$ 作为权函数, 即

$$W_I = \phi_I \quad (1.19)$$

相应的余量方程为:

$$\int_V R_i \phi_I dV = 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

在许多情况下,伽辽金法得到的求解方程的系数矩阵是对称的,因而在用加权余量法建立有限元格式时主要采用伽辽金法。另外当存在相应的泛函时,伽辽金法与变分法往往给出同样的结果。

例 1-1 用各种加权余量法求解图1.1中弹性基础梁的挠度。

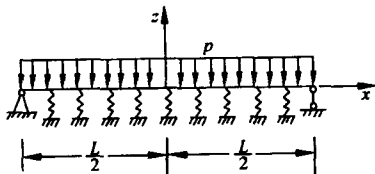


图 1.1 弹性基础梁

解: 图示弹性基础梁的基本微分方程和边界条件为

$$\begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha w + 1 = 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ w(-1) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

上式采用了无量纲形式,其中无量纲参数  $x$ 、 $w$  和  $M$  应分别乘上系数  $L/2$ 、 $pL^4/(16EI)$  和  $pL^2/4$  才是实际的坐标、挠度和弯矩。参数  $\alpha = kL^4/(16EI)$ ,  $k$  为基础刚度系数,  $EI$  为梁抗弯刚度。

作为一级近似,把试探函数  $\phi_1$  取为当  $\alpha = k = 0$  时的精确解,即  $\phi_1(x) = -\frac{1}{24}(5-x^2)(1-x^2)$ 。近似解为

$$w_1(x) = \phi_1 a_1 = -\frac{a_1}{24}(5-x^2)(1-x^2)$$

上式满足边界条件,因此只有域内存在余量。把上式代入式(1.21)中,得到微分方程的残差为

$$R_1(x, a_1) = -a_1 - \alpha \frac{a_1}{24}(5-x^2)(1-x^2) + 1$$

1. 配点法 要求在  $x = 0$  处余量为零,即

$$R_1(0, a_1) = -a_1 - \frac{5\alpha}{24}a_1 + 1 = 0$$

得

$$a_1 = \left(1 + \frac{5\alpha}{24}\right)^{-1}$$

2. 子域法 要求余量在区域中的积分为零

$$\int_{-1}^1 R_1 dx = -a_1 - \frac{2\alpha}{15} a_1 + 1 = 0$$

得

$$a_1 = \left(1 + \frac{2\alpha}{15}\right)^{-1}$$

3. 最小二乘法

$$\frac{\partial R_1}{\partial a_1} = -1 - \frac{\alpha}{24}(5-x^2)(1-x^2)$$

由  $\int_{-1}^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_1} dx = 0$  得

$$a_1 = \left(1 + \frac{2\alpha}{15}\right) \left(1 + \frac{4\alpha}{15} + \frac{62\alpha^2}{2835}\right)^{-1}$$

4. 伽辽金法 权函数取为  $\phi_1 = -\frac{1}{24}(5-x^2)(1-x^2)$ , 由余量方程  $\int_{-1}^1 R_1 \phi_1 dx = 0$  得

$$a_1 = \left(1 + \frac{31\alpha}{189}\right)^{-1}$$

表1.1比较了以上各种方法得到的在  $x=0$  处的挠度值和精确解。

表 1.1 用各种加权余量法求解弹性基础梁的挠度

| $\alpha$ | 精确解      | 配点法      | 子域法      | 伽辽金法     | 最小二乘法    |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 0.1788   | 0.1724   | 0.1838   | 0.1790   | 0.1832   |
| 10       | 0.07836  | 0.06757  | 0.08929  | 0.07891  | 0.08304  |
| 100      | 0.01134  | 0.00954  | 0.01453  | 0.01197  | 0.05818  |
| 1000     | 0.001025 | 0.000995 | 0.001551 | 0.001262 | 0.006068 |

从表1.1可以看出, 随着 $\alpha$ 的增大, 近似解的误差逐渐增大。

## 1.2 达朗贝尔-拉格朗日原理

利用加权余量法, 将权函数 $v_i$ 和 $\bar{v}_i$ 分别取为真实位移的变分 $\delta u_i$ 及其边界值的负值, 则得运动方程(1.1)和力边界条件(1.4)的等效积分形式

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i) dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) dS = 0 \quad (1.22)$$

式中的积分在  $t$  瞬时遍及整个区域  $V$  和  $S_\sigma$ 。利用分部积分, 并考虑到  $\delta u_i|_{S_u} = 0$  (在  $S_u$  处位移  $u_i$  已知, 其变分为零),  $S = S_\sigma \cup S_u$ ,  $\delta u_{i,j}\sigma_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$ , 有

$$\begin{aligned}\int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} dV &= \int_V [(\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta u_{i,j} \sigma_{ij}] dV \\ &= \int_S \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S_\sigma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV\end{aligned}\quad (1.23)$$

将式(1.23)代入式(1.22), 最终得

$$-\int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV - \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (1.24)$$

式中第一项为惯性力系的虚功, 第二项为内力系的虚功, 最后两项为外力系的虚功。上式即为线弹性动力学的达朗贝尔-拉格朗日原理, 它表明力系(外力、内力、惯性力)在虚位移  $\delta u_i$  和虚应变  $\delta \varepsilon_{ij}$  上所作的虚功和为零。虚位移  $\delta u_i$  和虚应变  $\delta \varepsilon_{ij}$  应满足如下条件

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (1.25)$$

$$\delta u_i|_{S_u} = 0 \quad (1.26)$$

在导出达朗贝尔-拉格朗日原理时, 未涉及物理方程(应力-应变关系), 所以达朗贝尔-拉格朗日原理不仅可以用于线弹性问题, 而且可以用于非线性弹性及弹塑性等非线性问题。

如果一个函数及其直至  $n-1$  阶导数连续, 其第  $n$  阶导数具有有限个不连续点但在域内可积, 则将其称为具有  $C_{n-1}$  阶连续性的函数。具有  $C_{n-1}$  阶连续性的函数将使包含该函数直至其  $n$  阶导数的积分项成为可积。

式(1.24)为运动方程(1.1)和边界条件(1.4)的等效积分“弱”形式, 它所包含的位移函数  $u_i$  对坐标导数的最高阶次为1, 比式(1.22)降低了一阶。为了使各项可积, 式(1.24)中的位移函数  $u_i$  必须具有  $C_0$  阶连续性, 而式(1.22)中的位移函数必须具有  $C_1$  阶连续性。可见达朗贝尔-拉格朗日原理降低了对位移函数  $u_i$  连续性的要求, 更便于构造近似解。可以证明, 如果试探函数取自完全的函数序列(即具有完备性), 并满足连续性要求, 则当试探函数的项数不断增加时, 近似解可趋近于精确解。