



总主编◎李朝东
JINGLUN XUEDIAN

重难疑点 详尽解读 各种题型 一网打尽

教材解析

人教国标

数学

八年级(下)

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，揉以为轮，其曲中规，虽有槩，不复挺者，揉使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；积水成渊，蛟龙生焉；积善成德，而神明自得，圣心备焉。故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。骐骥一跃，不能十步；驽马十驾，功在不舍。锲而不舍，朽木可折；锲而不舍，金石可镂。蚓无爪牙之利，筋骨之强，上食埃土，下饮黄泉，用心一也。蟹六跪而二螯，非蛇鳝之穴无可寄托者，用心躁也。

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，揉以为轮，其曲中规，虽有槩，不复挺者，揉使之然也。故木受绳则直，金就砺则利。君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

中国少年儿童新闻出版社
中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

经纶学典·教材解析. 八年级数学. 下/李朝东主编.
—北京: 中国少年儿童出版社, 2006. 10

ISBN 7-5007-8333-7

I. 经... II. 李... III. 数学课—初中—教学
参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 128916 号

经纶学典·教材解析 数学 八年级(下) (配人教国标版)

 出版发行: 中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

出版人: 海飞
执行出版人: 赵恒峰

总主编: 李朝东
责任编辑: 赵海力 朱玉兰

封面设计: 杭永鸿
责任印务: 栾永生

地址: 北京市东四十二条 21 号
电话: 010-62006940
E-mail: dakaiming@sina.com

邮政编码: 100708
传真: 010-62006941

印刷: 皖南海峰印刷包装有限公司

经销: 各地书店

开本: 880 × 1230 1/32
2006 年 12 月第 1 版
字数: 200 千字

印张: 10
2006 年 12 月安徽第 1 次印刷
印数: 10000 册

ISBN 7-5007-8333-7/G·6217

定价: 13.80 元

图书若有印装问题,请随时向承印厂退换。
版权所有,侵权必究。

目 录

第十六章 分式

16.1 分式

A 知识详解 1

B 典型题解 6

C 趁热打铁 12

D 详解答案 18

E 数学故事 20

F 课后练习题解题指导 21

16.2 分式的运算

A 知识详解 23

B 典型题解 29

C 趁热打铁 34

D 详解答案 42

E 数学故事 44

F 课后练习题解题指导 45

16.3 分式方程

A 知识详解 48

B 典型题解 52

C 趁热打铁 58

D 详解答案 63

E 数学故事 65

F 课后练习题解题指导 66

本章总结

A 知识网络归纳 68

B 最新中考热点聚焦 68

C 中考热题选讲 69

D 常错题剖析 75

E 课后复习题解题指导 77

第十七章 反比例函数

17.1 反比例函数

A 知识详解 79

B 典型题解 85

C 趁热打铁 90

D 详解答案 94

E 数学故事 96

F 课后练习题解题指导 97

17.2 实际问题与反比例函数

A 知识详解 99

B 典型题解 102

C 趁热打铁 108

D 详解答案 113

E 数学故事 115

F 课后练习题解题指导 116

本章总结

A 知识网络归纳 118

B 最新中考热点聚焦 118

C 中考热题选讲 118

D 常错题剖析 122

E 课后复习题解题指导 123

第十八章 勾股定理

18.1 勾股定理

A 知识详解 124

B 典型题解 128

C 趁热打铁 134

D 详解答案 138

E 数学故事 140

F 课后练习题解题指导 141

18.2 勾股定理的逆定理

A 知识详解 143

B 典型题解 145

C 趁热打铁 151

D 详解答案 153

E 数学故事 154

F 课后练习题解题指导	155
-------------------	-----

本章总结

A 知识网络归纳	157
----------------	-----

B 最新中考热点聚焦	157
------------------	-----

C 中考热题选讲	157
----------------	-----

D 常错题剖析	167
---------------	-----

E 课后复习题解题指导	168
-------------------	-----

第十九章 平行四边形

19.1 平行四边形

A 知识详解	169
--------------	-----

B 典型题解	174
--------------	-----

C 趁热打铁	182
--------------	-----

D 详解答案	185
--------------	-----

E 数学故事	187
--------------	-----

F 课后练习题解题指导	188
-------------------	-----

19.2 特殊的平行四边形

A 知识详解	190
--------------	-----

B 典型题解	198
--------------	-----

C 趁热打铁	208
--------------	-----

D 详解答案	215
--------------	-----

E 数学故事	218
--------------	-----

F 课后练习题解题指导	219
-------------------	-----

19.3 梯形

A 知识详解	223
--------------	-----

B 典型题解	227
--------------	-----

C 趁热打铁	233
--------------	-----

D 详解答案	238
--------------	-----

E 数学故事	241
--------------	-----

F 课后练习题解题指导	242
-------------------	-----

本章总结

A 知识网络归纳	244
----------------	-----

B 最新中考热点聚焦	244
------------------	-----

C 中考热题选讲	244
----------------	-----

D 常错题剖析	258
---------------	-----

E 课后复习题解题指导	259
-------------------	-----

第二十章 数据的分析

20.1 数据的代表

A 知识详解	261
--------------	-----

B 典型题解 264

C 趁热打铁 270

D 详解答案 276

E 数学故事 279

F 课后练习题解题指导 280

20.2 数据的波动

A 知识详解 284

B 典型题解 287

C 趁热打铁 293

D 详解答案 298

E 数学故事 301

F 课后练习题解题指导 302

本章总结

A 知识网络归纳 304

B 最新中考热点聚焦 304

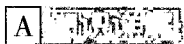
C 中考热题选讲 304

D 常错题剖析 311

E 课后复习题解题指导 312

第十六章 分 式

16.1 分 式



知识点一 分式的概念

分式 $\frac{A}{B}$ 中, A 、 B 是整式, B 中含有字母,且 $B \neq 0$,其中 A 叫分子, B 叫分母,分式的概念是学习分式的基础,因此是本节的重点.

例1 下列各式中,分式有_____.

① $\frac{2}{x}$; ② $\frac{x}{2}$; ③ $\frac{x+y}{x}$; ④ $\frac{5a}{\pi}$; ⑤ $\frac{b}{2+a}$; ⑥ $5x+6y+1$.

解析 判断是不是分式,先判断分子和分母是不是整式,然后看分母中是不是含有字母且分母不等于零.

答案 ①、③、⑤.

例2 式子 $\frac{x+y}{5}$ 与 $\frac{5}{x+y}$ 都是分式吗?

答案 $\frac{x+y}{5}$ 不是分式,因为它的分母中不含有字母; $\frac{5}{x+y}$ 是分式,它的分子分母都是整式,且分母中含有字母.

点评 1. π 是一个常数,不是一个字母.所以 π 即使在分母上,只要没有其他字母,那么这个有理式就是一个整式而不能把它看作是一个分式.

2. 判断一个有理式是否为分式关键在于“两看”:一看有没有分母;二看分母中含不含字母.

具体运用时,“一看”若没有分母,就不用“二看”了,一定是整式;“一看”若有

分母,再“二看”,其中若有字母,就说明是分式,若其中不含有字母,就是整式.

知识点二 分式的意义及取值

分式的分母起于除数,由于除数不能为0,所以分式的分母不能为0,即 $B \neq 0$ 时,分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义,反之, $B=0$ 时,分式无意义.如果没有特别说明,所遇到的分式都是有意义的,只有在有意义的前提下,才能谈分式的值,即值为0、值为负数、值为正数、值为非正数、值为非负数等.此知识点内容较多,针对不同情况应该个别解决,因此为难点.

例3 下列分式中,当 x 取何值时,分式有意义?

$$(1) \frac{x}{x^2+1} \quad (2) \frac{x+1}{2x-1} \quad (3) \frac{1}{2x-5} \quad (4) \frac{x+2}{x^2-4}$$

解析 分式是否有意义主要是看能否使分母等于0.

答案 (1)因为 $x^2+1 \neq 0$,所以无论 x 取什么值,这个分式都有意义.

(2)当 $2x-1 \neq 0$ 时,分式有意义,即 $x \neq \frac{1}{2}$ 时,分式有意义.

(3)当 $2x-5 \neq 0$ 时,分式有意义,即 $x \neq \frac{5}{2}$ 时,分式有意义.

(4) $x^2-4 \neq 0$ 时,分式有意义,即 $x \neq 2$ 或 $x \neq -2$ 时,分式有意义.

例4 下列分式中,当 x 取何值时,分式无意义?

$$(1) \frac{x}{2x-3} \quad (2) \frac{x}{2-|x|} \quad (3) \frac{3}{\sqrt{x}-1} \quad (4) \frac{x+1}{x^2-1}$$

解析 当分母为0时,分式无意义,因此令每一个分母为0就可以求出 x 的值.

答案 (1)当 $2x-3=0$,即 $x=\frac{3}{2}$ 时,分式无意义.

(2)当 $2-|x|=0$,即 $x=2$ 或 $x=-2$ 时,分式无意义.

(3)当 $\sqrt{x}-1=0$,即 $x=1$ 时,分式无意义.

(4)当 $x^2-1=0$,即 $x=1$ 或 $x=-1$ 时,分式无意义.

例5 当 x 取何值时,下列分式的值为0?

$$(1) \frac{x+5}{x+7} \quad (2) \frac{x-1}{2x^2+11} \quad (3) \frac{2-x}{3x+1} \quad (4) \frac{x^2-4}{2x^2+4}$$

解析 分式值为0的条件是分子为0,分母不为0.

答案 (1)当 $x+5=0$,即 $x=-5$ 时,分式值为0.

(2) $x-1=0$,即 $x=1$ 时,分式值为0.

(3) $2-x=0$,即 $x=2$ 时,分式值为0.

(4) $x^2-4=0$,即 $x=2$ 或 $x=-2$ 时,分式的值为0.

例6 解答:(1)当 m 为何值时,分式 $\frac{2m-1}{|m|}$ 的值为非负数?

(2)当 x 为何值时,分式 $\frac{3-x}{x-2}$ 的值为负数?

(3)当 a 取何值时,分式 $\frac{1}{a-3}$ 的值为正数?

解析 这三个题应根据有理数的除法的法则来解.

答案 (1)因为 $|m| \geq 0$,所以 $2m-1 \geq 0$ 且 $m \neq 0$ 时,分式 $\frac{2m-1}{|m|}$ 的值为非负数,

即 $m \geq \frac{1}{2}$ 时,分式的值为非负数.

(2)当 $\begin{cases} 3-x > 0, \\ x-2 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3-x < 0, \\ x-2 > 0 \end{cases}$ 时,分式的值为负数,

即 $x < 2$ 或 $x > 3$ 时,分式的值为负数.

(3)当 $a-3 > 0$,即 $a > 3$ 时,分式的值为正数.

点评 1. 如果没有特别说明,所遇到的分式都是有意义的,也就是说分式中分母的值不等于0,如 $\frac{a^2bc}{ab}$ 中隐含着分式 $ab \neq 0$,即 $a \neq 0$ 、 $b \neq 0$.

2. 分式有意义,要令分母不等于0;分式无意义,要令分母等于0.应特别注意分母含二次根号和绝对值时的情况,二次根号里的数为非负数,绝对值应当有两种情况.

3. 对于“ x 取何值时,分式的值为0?”的题,若分子、分母有公因式,要考虑分式首先有意义.如 $\frac{x^2-4}{x+2}$,要令分式值为0, x 只能等于2而不能等于 ± 2 .

4. 针对分式取值为非零的题,分两类:一类是分子为一个数,此时根据同号得正,异号得负的原则确定分母取值而列出不等式解决即可;另一类是分子、分母都

含未知数,此时根据同号得正,异号得负的原则分成多种情况,列出不同的不等式组,解出结果之后,经过讨论来确定正确的值.

知识点三 分式的基本性质

在理解分式基本性质的基础上记忆分式的基本性质并不难.

分式的分子与分母同乘(或除以)一个不为0的整式,分式的值不变,用式子表示为:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} (C \neq 0), \text{其中 } A, B, C \text{ 为整式.}$$

这里应当关注一个字“同”,它有两层含义:一是分子与分母必须同时乘(或除以一个整式,不能只分子乘(或除以)而分母不乘(或除以),也不能只分母乘(或除以),而分子不乘(或除以);二是分子与分母乘(或除以)的整式必须是同一个整式.这是本节的一个重点.

例7 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

$$(1) \frac{1}{xy} = \frac{z}{xyz} (z \neq 0)$$

$$(2) \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1} (x+1 \neq 0)$$

$$(3) \frac{bx}{a^2x} = \frac{b}{a^2}$$

$$(4) \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}$$

答案 (1)等式左边的分式的分子、分母都乘以 z 得到等式右边.

(2)等式左边的分式的分子、分母都乘以 $(x+1)$ 得到等式右边.

(3)等式左边的分式的分子、分母都除以 x 得到等式右边.

(4)等式左边的分式的分子、分母都除以 $(a+b)$ 得到等式右边.

例8 填空.

$$(1) \frac{x+y}{xy} = \frac{(\quad)}{x^2y}$$

$$(2) \frac{x+y}{x^2} = \frac{(\quad)}{x^2y}$$

$$(3) \frac{a^2+ab}{a^2} = \frac{a+b}{(\quad)}$$

$$(4) \frac{a-b}{a+b} = \frac{(\quad)}{(a+b)^2}$$

答案 根据分式的基本性质可得:

$$(1)x^2 + xy; (2)xy + y^2; (3)a; (4)a^2 - b^2.$$

点评 1. 基本性质中的 A 、 B 、 C 表示的都是整式, 其中 $B \neq 0$, 一般在解题过程中不需要强调, $C \neq 0$ 是在解题过程中另外附加的条件, 在运用分式的基本性质时, 一定要特别注意这一前提条件.

2. 分式的分子、分母、分式本身三者的符号, 改变其中任意两个, 分式的值不变; 改变一个或三个, 分式的值改变.

3. 要求未知的分子(或分母), 需从已知的分子(或分母)分析, 推出其变化的“原因”, 即是乘(或除以)哪一个整式, 再根据规律计算未知的分子或分母.

知识点四 通分

与分数的通分类似, 我们利用分式的基本性质, 使分子和分母同乘适当的整式, 不改变分式的值, 把异分母分式化成相同分母的分式, 这样的分式变形叫做分式的通分. 通分的关键是确定几个分式的最简公分母, 一般取各分母所有因式的最高次幂的积作公分母, 它就叫最简公分母. 通分在本节是一个难点.

例 9 找出下列各分式的最简公分母.

$$(1)\frac{1}{ab}, \frac{2}{bc}, \frac{1}{ac^2} \quad (2)\frac{1}{2xy}, \frac{x}{3y^2}, \frac{5}{9x^3y} \quad (3)\frac{1}{a(x+1)}, \frac{1}{b(x-1)}$$

答案 (1)的最简公分母是 abc^2 ; (2)的最简公分母是 $18x^3y^2$; (3)的最简公分母是 $ab(x+1)(x-1)$.

例 10 通分.

$$(1)\frac{b}{3a^2c^2}, \frac{c}{-2ab}, \frac{a}{5b^3c} \quad (2)\frac{1}{3xy^3}, \frac{1}{2x^2y}, \frac{1}{9x^3y}$$

$$(3)\frac{1}{xy^2}, \frac{c}{x(a-b)}, \frac{2}{y(b-a)} \quad (4)\frac{1}{x^2-4}, \frac{1}{4-2x}$$

答案 (1) $\frac{-10b^4}{-30a^2b^3c^2}, \frac{15ab^2c^3}{-30a^2b^3c^2}, \frac{-6a^3c}{-30a^2b^3c^2};$

$$(2)\frac{6x^2}{18x^3y^3}, \frac{9xy^2}{18x^3y^3}, \frac{2y^2}{18x^3y^3};$$

$$(3)\frac{a-b}{xy^2(a-b)}, \frac{cy^2}{xy^2(a-b)}, -\frac{2xy}{xy^2(a-b)};$$

$$(4) \frac{2}{2(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{2(x+2)(x-2)}.$$

点评 通分的依据是分式的基本性质,通分的关键是寻求几个分式的最简公分母,寻求最简公分母应注意以下三点:

(1)“各分母所有因式的最高次幂”是指凡出现的字母(或含字母的式子)为底数的幂取指数最大的;

(2)如果分母是单项式,应取系数的最小公倍数,相同字母的最高次幂,以及每一个不同字母的积作最简公分母;

(3)如果分母是多项式,应当先分解因式,然后(若有系数,取系数的最小公倍数)取相同因式的最高次幂,以及每一个不同因式的积作最简公分母.

知识点五 约分

与分数的约分类似,我们利用分式的基本性质,约去分式的分子和公因式,不改变分式的值,这样的分式变形叫做约分.约分时,由于分子、分母都除以的整式是它们的公因式,所以由原分式有意义可知,分子与分母的公因式一定不为0,故运用约分时,不必强调公因式不为0,而是直接约去即可.

例 11 约分.

$$(1) \frac{27a^3bc^4}{48a^5b^2c} \quad (2) \frac{m^2-3m}{9-m^2} \quad (3) \frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6} \quad (4) \frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$$

答案 (1) $\frac{9c^3}{16a^2b}$; (2) $-\frac{m}{m+3}$; (3) $\frac{x+1}{x-2}$; (4) $\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

点评 约分的依据是分式的基本性质,约分的关键是找出分子与分母的公因式,找公因式的方法:先分解因式,之后系数取最大公约数,字母(或字母因式)取相同字母(或相同字母因式)的最低次幂.约分的方法是:先把分子、分母分解因式(分子、分母是多项式)然后约去它们的公因式.



一、分式的认识

例 1 在代数式① $-7x$; ② $\frac{2x}{y}$; ③ $-\frac{4}{9}a$; ④ $\frac{1}{4}x^2y-5xy^3$; ⑤ $\frac{7}{7+m}$; ⑥ $\frac{2x+1}{\pi}$; ⑦ $\frac{x-1}{6}$

中属于整式的有_____；属于分式的有_____.

解析 判断是不是分式,主要看分母中是不是含有字母.

答案 整式有:①、③、④、⑥、⑦;分式有:②、⑤.

二、分式有无意义的问题

例2 当取什么值时:

(1) 分式 $\frac{x+2}{x^2-4}$ 有意义?

(2) 分式 $\frac{2x-6}{(x+1)(x-3)}$ 无意义?

(3) 分式 $\frac{|x|-3}{x+3}$ 的值为零?

(4) 分式 $\frac{x-5}{|x+4|}$ 的值小于零?

答案 (1) 当 $x^2-4 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 2$ 时, 分式 $\frac{x+2}{x^2-4}$ 有意义.

(2) 当 $(x+1)(x-3) = 0$, 即 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时, 分式 $\frac{2x-6}{(x+1)(x-3)}$ 无意义.

(3) 当 $\begin{cases} |x|-3=0 \\ |x+3| \neq 0 \end{cases}$, 即 $x=3$ 时, 分式 $\frac{|x|-3}{x+3}$ 的值为零.

(4) 因为 $|x+4| \geq 0$, 所以当 $x-5 < 0$ 且 $|x+4| \neq 0$, 即 $x < 5$ 且 $x \neq -4$ 时, 分式 $\frac{x-5}{|x+4|}$ 的值小于零.

三、字母取值影响分式取值问题

例3 如果把分式 $\frac{x+2y}{x}$ 中的 x 和 y 都扩大 10 倍, 那么分式的值 ()

A. 扩大 10 倍 B. 缩小 10 倍 C. 扩大 2 倍 D. 不变

答案 把 x 和 y 都扩大 10 倍后, 分式化为: $\frac{10x+20y}{10x}$, 约分后得 $\frac{x+2y}{x}$, 故选 D.

四、分式约分问题

例4 约分:

$$(1) \frac{-56x^2y^2z}{70xy^3};$$

$$(2) \frac{6x^2y(a-1)}{18xy^2(1-a)};$$

$$(3) \frac{x^2-2x+1}{1-x^2}.$$

答案 (1) $\frac{-56x^2y^2z}{70xy^3} = -\frac{4xz}{5y};$

$$(2) \frac{6x^2y(a-1)}{18xy^2(1-a)} = -\frac{6x^2y(a-1)}{18xy^2(a-1)} = -\frac{x}{3y};$$

$$(3) \frac{x^2-2x+1}{1-x^2} = \frac{(x-1)^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{[-(1-x)]^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x}{1+x}.$$

例5 指出下列分子与分母的公因式:

$$(1) \frac{27a^2b^2c}{36ab^3c^2};$$

$$(2) \frac{3a+3b}{a^2+2ab+b^2}.$$

答案 (1) 公因式是: $9ab^2c$;

(2) 公因式是: $(a+b)$.

五、分式通分问题

例6 通分:

$$(1) \frac{4c}{5a^2b} \text{ 与 } \frac{3b}{2ac^2};$$

$$(2) \frac{x}{2(x+1)} \text{ 与 } \frac{1}{x^2-1}.$$

答案 (1) 公分母是: $10a^2bc^2$,

$$\text{所以 } \frac{4c}{5a^2b} = \frac{8c^3}{10a^2bc^2},$$

$$\frac{3b}{2ac^2} = \frac{15ab^2}{10a^2bc^2};$$

(2) 公分母是: $2(x+1)(x-1)$,

$$\text{所以 } \frac{x}{2(x+1)} = \frac{x^2-x}{2(x+1)(x-1)},$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{2}{2(x+1)(x-1)}.$$

例7 指出下列各组分式的最简公分母:

$$(1) \frac{1}{(x+2)(x-2)} \text{ 与 } \frac{x}{x-2};$$

$$(2) \frac{1}{x^2-2} \text{ 与 } \frac{1}{4-2x}.$$

答案 (1) 最简公分母是: $(x+2)(x-2)$;

(2) 最简公分母是: $2(x+2)(x-2)$.

六、分式的化简与求值问题

例8 化简求值:

$$(1) \frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^3}, \text{ 其中 } x=1, y=-2;$$

$$(2) \frac{x+1}{x^2-1}, \text{ 其中 } x=3.$$

答案 (1) $\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^3} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{1}{x-y},$

把 $x=1, y=-2$ 代入得: $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-2)} = \frac{1}{3};$

$$(2) \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1},$$

把 $x=3$ 代入得: $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$

七、分式性质直接应用问题

例9 不改变分式的值, 把分式 $\frac{\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y}{\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y}$ 的分子与分母中各项系数化为整数.

答案 因为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的最简公分母是 6, 所以把分式的分子和分母都乘以 6 得:

$$\frac{\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y}{\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y} = \frac{6\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)}{6\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)} = \frac{3x+4y}{3x-4y}.$$

例10 不改变分式的值, 使下列分式的分子与分式本身不含负号:

$$(1) -\frac{x+2y}{x-2y};$$

$$(2) -\frac{-m-n}{2m-n}.$$

答案 (1) $-\frac{x+2y}{x-2y} = \frac{x+2y}{-(x-2y)} = \frac{x+2y}{2y-x};$

(2) $-\frac{-m-n}{2m-n} = -\frac{-(m+n)}{2m-n} = \frac{m+n}{2m-n}.$

八、巧解分式值问题

例 11 已知 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4\frac{1}{4}$, 求 $a - \frac{1}{a}$ 的值.

答案 分式 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4\frac{1}{4}$ 的两边都减去 2, 得: $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 2\frac{1}{4},$

即: $a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 2\frac{1}{4}.$

所以 $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

所以 $a - \frac{1}{a} = \pm \frac{3}{2}.$

例 12 已知 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5$, 求 $\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}$ 的值.

答案 因为 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$, 通分、合并得 $\frac{x+y}{xy} = 5,$

所以 $x+y=5xy.$

所以 $\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y} = \frac{2(x+y)-3xy}{x+y+2xy} = \frac{10xy-3xy}{5xy+2xy} = \frac{7xy}{7xy} = 1.$

九、分式有无大小值的问题

例 13 分式 $\frac{1}{1+a^2}$ 有最___值(填“大”或“小”), 其值为___. 此时, $a = \underline{\hspace{1cm}}.$

答案 因为 $a^2 \geq 0,$

所以 $1+a^2$ 的最小值为 1.

所以 $\frac{1}{1+a^2}$ 有最大值, 其值是 1.

此时, $a=0.$

十、分式的拓展性问题

例 14 当取哪些整数时,分式 $\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}$ 的值是整数?

答案 因为 $\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+4}{x+1} = \frac{x+1+3}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$,

所以当 $x+1=3$ 即 $x=2$ 时,分式值是整数;当 $x+1=1$ 即 $x=0$ 时,分式值是整数;当 $x+1=-1$ 即 $x=-2$ 时,分式值是整数;当 $x+1=-3$ 即 $x=-4$ 时,分式值是整数.

例 15 如果 $-5 < x < 3$ 且 $x \neq 0$,分式 $\frac{|x+5|}{x+5} - \frac{|x-3|}{3-x} + \frac{|x|}{x}$ 的值是多少?

答案 因为 $-5 < x < 3$,

$$\text{所以 } \frac{|x+5|}{x+5} - \frac{|x-3|}{3-x} + \frac{|x|}{x} = \frac{x+5}{x+5} - \frac{3-x}{3-x} + \frac{|x|}{x} = \frac{|x|}{x}.$$

$$\text{当 } 0 < x < 3 \text{ 时,原式} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1;$$

$$\text{当 } -5 < x < 0 \text{ 时,原式} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

例 16 如果分式 $\frac{2}{3-x}$ 的值为正数,则 x 的非负整数解有_____.

答案 由 $\frac{2}{3-x} > 0$,

$$\text{得 } 3-x > 0,$$

$$\text{所以 } x < 3.$$

所以 x 的非负整数解是0、1、2.

例 17 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$,求分式 $\frac{x-y}{x-2y+3z}$ 的值.

答案 设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = m$,

$$\text{则 } x=3m, y=4m, z=5m,$$

$$\text{所以 } \frac{x-y}{x-2y+3z} = \frac{3m-4m}{3m-8m+15m} = \frac{-m}{10m} = -\frac{1}{10}.$$