

LIUTI LIXUE

# 流体力学

余志豪 苗曼倩 蒋全荣 杨平章 编著

(第三版)

气象出版社

China Meteorological Press

# 流体力学

(第三版)

余志豪 苗曼倩 编著  
蒋全荣 杨平章



气象出版社

## 内 容 简 介

本书是适用于大气科学的流体力学课程,其内容包括了一般流体力学的理论基础以及有关地球物理流体力学的部分。对流体动力学方程组(粘黏、湍流及边界层等)作了详细推导,并以小雷诺数流动为例介绍了理论求解的情况,并适当叙述了流体力学实验的相似性和量纲分析。另外,考虑到本书作为大气科学入门性的流体力学,也特别对流体涡旋和波动、层结和热对流、旋转效应、流体动力不稳定性以及计算流体力学等方面作了简要的概念性的介绍。本书经中国气象局高等学校气象类教材编审领导小组审查,确认为大学本科通用教材。

本书可作为高等院校有关大气科学专业流体力学的教材或教学参考书籍,也可供广大气象业务、科研和教学人员参考之用。

### 图书在版编目(CIP)数据

流体力学/余志豪等编著. —3版. —北京:气象出版社,2007.1

ISBN 978-7-5029-1646-6

I. 流… II. 余… III. 流体力学-高等学校-教材 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 009164 号

Liuti Lixue

## 流体力学

余志豪 苗曼倩 蒋全荣 杨平章 编著

责任编辑:林雨晨 终 审:周诗健

封面设计:阳光图文 责任技编:王丽梅 责任校对:王丽梅

---

出版发行:气象出版社

出版社地址:北京市海淀区中关村南大街 46 号

出版社电话:(010)68407112

网 址:<http://cmp.cma.gov.cn>

印 刷:北京昌平环球印刷厂

开 本:787mm×960mm 1/16

印 张:24.5

字 数:493千字

印 数:5001~10000

定 价:36.00元

邮政编码:100081

传真号码:(010)62176428

E-mail:qxchs@263.net

版 次:1980年2月第1版

1994年8月第2版

2004年6月第3版

印 次:2007年1月第2次印刷

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社发行部联系调换

## 第三版前言

20世纪80年代初本教材第一版(两次印刷)及90年代中期修订本版,先后共印1.65万册。目前,气象出版社应各方需求,在修订版基础上再出新版即第二版。值此机会,我们又对全书的文字、公式和图表等作了校正、修订、补充和适当润色。其中,第一章至第六章及第八章由蒋全荣教授阅校修正,其余均由余志豪教授完成并对全书整理审阅。

在配合本教材的施教过程中,曾不断收集和积累了有关内容的例题和习题,并作为习题的主要内容。1988年余志豪和蒋全荣将这些例题、习题经过整理后,由气象出版社出版成《流体力学习题解》一书,作为本教材的辅助读本。为了使读者将“学”和“练”紧密地联系起来,在出版第二版时,把该“习题集”中的题目,经遴选、修改和补充后,将它们附在每章之后,其中例题部分作为每章最后一节单独列出。这就使得本教材更具特色。

历经20多年,本教材在南京大学和各兄弟院校仍一直在继续使用,这是对编写该书工作的肯定。有关专家学者如庄逢甘、丑纪范等院士曾对此书作出了好评。本教材曾被江苏省教委评为省高校一类优秀课程(1998年),还多次获其他奖项。在此,对广大读者的肯定和厚爱,专家、院士们的指导、鼓励以及气象出版社的一贯支持,深表衷心谢意。

余志豪 蒋全荣  
2004年5月

## 修订本前言

我们这本流体力学问世,至今已有十几个年头了。感谢兄弟院校使用此教材,亦感谢众多的师生和读者们喜欢这本书。所以,该书第一版作了两次印刷,共印数1.5万册。

在这十多年中,我们南京大学大气科学系流体力学小组在施用这本教材过程中,又积累了许多教学经验,与此同时很多关心此书的同行们以及有关师生提出了不少宝贵的建设性建议。这些都为我们再版修改此书,提供了很好的依据。

这次再版修改,我们尽可能保持原书的体系,并作必要的修改和删补。其中第一章作了较多的改写并增加了§4速度的分析。第六章改动较大,去掉原先的§3~§5及§7~§8,增添新的§2势流波动。第八章和第九章的大部分作了改写,在第八章中增加了§7,以便让读者了解湍流研究的最新发展方向。最后增加了第十二章计算流体力学简介,为使读者对流体力学这一分支的出现和发展有所了解。在书后又加了附录Ⅲ希腊字母表及附录Ⅳ物理量的符号和单位。对第一版中存在的错漏,顺便作了勘误。

再版修改过程中,第八章和第九章的修改任务由苗曼倩负责完成。蒋全荣执笔写了第一章§4及第六章§2和完成该章的修改。中山大学大气科学系杨平章写了第十二章及第十章§5。葛孝贞审阅了第十二章的内容。其余所有章节均由余志豪负责修改,并由他对全书再版稿作统一整理和审阅。

我们感到这次再版还可能有错误和不足之处,恳请读者提出批评指正。

最后,藉本书再版之际,我们缅怀我们的老师和同事[王彦昌]教授。他是南京大学气象系最早执教流体力学课的老师之一,这本教材曾浸透着他的辛勤劳动。

余志豪等  
1994年春

## 第一版前言

流体力学是经典力学中的一个重要分支,是研究流体宏观运动规律的基础学科。它历史悠久,应用广泛;随着科学技术的飞速发展,流体力学领域中已出现许多新兴的分支学科。地球上的大气和海洋是最常见的自然流体,因而相应地形成了地球物理流体力学。如进一步考虑地球大气和海洋的各自特征,则又构成了大气动力学和海洋动力学,或称动力气象学和动力海洋学。而所有这些学科都以流体力学为共同基础,从这个意义上讲,流体力学是大气科学的重要理论基础之一。

把流体力学应用于气象科学,已有近百年的历史。20世纪初有皮耶克尼斯(V. Bjerknes)的斜压环流定理作为先驱性的开拓工作,其后经历了1940年代初大气长波理论的问世以及1950年代以来流体力学方法的数值天气预报的发展等重要阶段。这仅是一个方面的例子,流体力学已从许多方面渗透到大气科学的各个领域,显示出它在大气科学中与日俱增的重要性。因此,广大气象工作者,包括业务、科研和教学人员,经常需要有一本适用的流体力学参考书籍,以便在工作或学习中查阅。并且,高等学校大气科学有关专业也很需要一本合用的教学参考书。基于这些原因,我们依据在南京大学气象系多年执教的点滴经验,参阅国内外经典的及近期的流体力学有关著作,编著此书。

由于大气动力学本身就是斜压、层结和旋转流体力学,因此对气象工作者而言,本书只是一本流体力学入门书籍,着重于基本概念、基本方法和基础理论等方面的阐述。全书共十一章及附录,分三大部分,前四章为基本概念和基本方程等,这是最基础的内容;五、六、八、九章中既有一般的流体力学基础知识,又有结合大气科学特点的专题内容;七、十和十一章是流体力学结合大气科学较为专门的内容,在一般的流体力学书籍中很少介绍。根据我们长期在教学、科研中的体会,在浩瀚精深的流体力学中选取这三部分作

为基本内容,其目的是希望本书能成为内容简洁、基础扎实、概念清晰和方法较多且具有适用于大气科学特点的流体力学书籍。但是,限于我们的学识水平和编写经验不足,上述要求恐难实现,缺点和错误也在所难免,热诚希望广大读者批评指正。

本书第八、九章以及第二章的 § 4、§ 5 和第三章的 § 5 由王彦昌同志执笔,其余均由余志豪同志编写。南京气象学院顾钧禧教授审阅了全书,并提出了宝贵的修改意见,谨致深切谢意。南京大学气象系“流体力学教学小组”的同志们,在教学过程中曾提出许多有益的意见,石宗祥同志为本书绘制了全部插图,一并在在此致谢。

余志豪 王彦昌  
1980年2月

# 目 录

第三版前言

修订本前言

第一版前言

<b>第一章 基本概念</b> .....	( 1 )
§ 1 流体的物理性质和宏观模型.....	( 1 )
§ 2 流体速度和加速度.....	( 6 )
§ 3 迹线和流线.....	(13)
§ 4 速度的分解.....	(19)
§ 5 涡度、散度和形变率 .....	(21)
§ 6 速度势函数和流函数.....	(31)
§ 7 例题.....	(38)
习题一 .....	(42)
<b>第二章 基本方程</b> .....	(45)
§ 1 连续方程.....	(45)
§ 2 作用于流体的力、应力张量 .....	(48)
§ 3 运动方程.....	(55)
§ 4 能量方程.....	(60)
§ 5 简单情况下纳维-斯托克斯方程的一些准确解 .....	(66)
§ 6 例题.....	(71)
习题二 .....	(80)
<b>第三章 相似原理与量纲分析</b> .....	(83)
§ 1 流体力学的模型实验和相似概念.....	(83)
§ 2 相似判据.....	(85)
§ 3 无量纲方程.....	(89)
§ 4 特征无量纲数.....	(92)



§ 5	量纲分析和 $\pi$ 定理	(97)
§ 6	例题	(102)
	习题三	(107)
<b>第四章</b>	<b>黏性流体缓慢运动</b>	(108)
§ 1	小雷诺数缓慢黏性流动问题	(108)
§ 2	斯托克斯流动	(110)
§ 3	流体对小球的斯托克斯阻力	(114)
§ 4	奥森方程	(117)
§ 5	例题	(122)
	习题四	(126)
<b>第五章</b>	<b>涡旋动力学基础</b>	(127)
§ 1	环流定理	(128)
§ 2	涡度方程	(131)
§ 3	由涡度场确定流速场	(134)
§ 4	两直线涡旋及其运动	(137)
§ 5	涡层、卡曼涡列和兰金复合涡旋	(144)
§ 6	间断面	(152)
§ 7	例题	(156)
	习题五	(160)
<b>第六章</b>	<b>流体波动</b>	(162)
§ 1	波动的概念	(162)
§ 2	势流波动	(166)
§ 3	重力表面波和界面波	(171)
§ 4	群速	(175)
§ 5	例题	(178)
	习题六	(181)
<b>第七章</b>	<b>旋转流体动力学</b>	(183)
§ 1	旋转参考系中的流体运动方程	(183)
§ 2	旋转流体的无量纲方程和罗斯贝数	(186)
§ 3	普鲁德曼-泰勒定理	(189)
§ 4	泰勒流体柱	(191)

---

§ 5 地转流动 .....	(193)
§ 6 例题 .....	(196)
习题七 .....	(200)
<b>第八章 湍流</b> .....	<b>(201)</b>
§ 1 概述 .....	(201)
§ 2 湍流平均运动方程和雷诺应力 .....	(205)
§ 3 湍流半经验理论 .....	(208)
§ 4 湍流能量方程 .....	(212)
§ 5 湍流统计理论 .....	(218)
§ 6 湍流扩散 .....	(232)
§ 7 湍流问题的近况 .....	(236)
§ 8 例题 .....	(242)
习题八 .....	(248)
<b>第九章 边界层流体力学</b> .....	<b>(250)</b>
§ 1 层流边界层方程 .....	(251)
§ 2 层流边界层解例 .....	(255)
§ 3 湍流边界层 .....	(267)
§ 4 湍流边界层平均流速的分布 .....	(271)
§ 5 例题 .....	(277)
习题九 .....	(281)
<b>第十章 热对流</b> .....	<b>(282)</b>
§ 1 布西内斯克流体 .....	(283)
§ 2 热对流方程组及其分类 .....	(286)
§ 3 热对流中的无量纲数 .....	(289)
§ 4 贝纳问题 .....	(293)
§ 5 洛伦茨系统与非线性基本特征 .....	(300)
§ 6 例题 .....	(306)
习题十 .....	(310)
<b>第十一章 流体动力不稳定</b> .....	<b>(311)</b>
§ 1 流体不稳定的概念和分类 .....	(311)
§ 2 惯性不稳定 .....	(314)

§ 3	平等流不稳定的奥尔-索默费尔德方程	(317)
§ 4	瑞利定理和费约托夫定理	(320)
§ 5	层结流体的切变流动不稳定	(323)
§ 6	考虑流体表面张力的边值条件	(328)
§ 7	例题	(328)
	习题十一	(332)
<b>第十二章</b>	<b>计算流体力学简介</b>	<b>(333)</b>
§ 1	模型方程及其定解条件的适定提法	(335)
§ 2	差分网格与差分格式	(340)
§ 3	相容性、收敛性和稳定性	(344)
§ 4	例题	(348)
附录 I	矢量分析、张量简介	(354)
附录 II	曲线坐标	(361)
附录 III	希腊字母表	(373)
附录 IV	物理量的符号和单位	(374)
	<b>主要参考书目</b>	<b>(378)</b>

# 第一章 基础概念

在人类日常生活和生产活动中,经常要遇到像水、空气之类的流体。人们需要掌握它们的运动规律,例如河道中的水或者地球上的空气是怎样运动的。另外,也常常需要知道流体在运动时将会对处于其中的其他物体产生什么影响和作用,例如海流和海浪对于堤岸的冲击有多大;飞机、导弹等飞行器飞行时或者船舶航行时空气或水对它们的阻力等等。类似这些问题的研究和解决,均属于流体力学的基本内容。概括地讲,流体力学就是研究流体运动规律,以及流体和固体之间相互作用等方面的一门学科。在这一章中,将首先引入有关流体力学的基础概念,例如介绍如何描述流体运动等。

## § 1 流体的物理性质和宏观模型

在普通物理的质点力学中,牛顿运动定律不但表述了物体受力和运动状态变化的关系,即  $\vec{F} = m\vec{a}$ , 而且认为该物体的运动状态变化或加速度  $\vec{a}$  可以视作某一点(例如物体质量中心点)位置矢  $\vec{r}$  随时间的变化率,确切地讲是二次变化率  $d^2\vec{r}/dt^2$ 。所以,质点力学中的任何物体运动,均可当作一个点的运动,而且这个点具有与该物体相同的质量  $m$ , 故称作质点。这就是说,在一定的允许条件下(例如物体自身大小与运动规模相比小得多,以及不讨论物体自身的转动和形变等等),质点力学就把任何物体抽象概括为“质点”这样一个理论模型,在不失问题本质的情况下较简便地研究和讨论它的运动规律。流体力学也需要完全相类似地把实际流体抽象概括为一个宏观理论模型,再来讨论它的运动规律。这个理论模型不是质点力学中的“质点”,而是下文所要介绍的连续介质。

### 一、流体的物理性质

在引入连续介质的概念之前,先简单说明流体的一些宏观物理性质,即易流动性、黏性和压缩性。

自然界的物质按其凝聚态,或者以分子平均间距的不同,可分为三类——固体、液体和气体,其中液体和气体又统称为流体。也有的分成四类,再加一类等离子体,或等离子态(plasma)。2004年1月美国标准技术院和科罗拉多大学联合小组又提出了物质的第六态,即费米子凝聚态(Fermionic condensate),他们在1995年曾提出物质第五态为玻色-爱因斯坦凝聚。本书仍以经典的物质三态为讨论范畴。流体跟固体不同,它没有相对固定的形状,而具有极易形变和流动的性质。这是由于分子平均间距和相互作用力的不

同所决定的。倘若取常温常压条件下液体分子间平均距离为  $d_0$ ，则气体分子间的平均距离的量级为  $10d_0$ ，相反，固体分子间的平均距离则远小于  $d_0$ 。对简单分子情况， $d_0$  的量值约为  $10^{-8}\text{cm}$ ，并且如图 1.1 所示，当分子间距  $d$  小于  $d_0$  时为**近距斥力**，大于  $d_0$  时为**远距吸力**。由此可见，气体分子间相距甚远，彼此间以微弱的吸引力凝聚在一起，或者说气体分子在邻近分子力场中的位能远小于其自身的动能，所以气体中每一个分子都可以跟其邻近分子无关地自由运动，除非它们发生偶然的

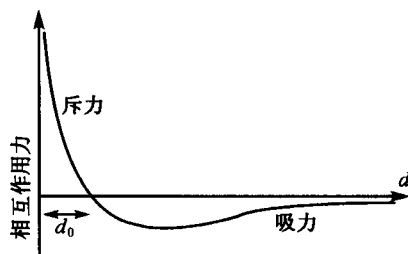


图 1.1 一个分子对另一个分子的作用力与分子间距离  $d$  的关系

碰撞，这就是通常所称的**理想气体**。而液体和固体分子，任何时候均处于邻近分子的强力场之中，分子间在斥力允许的范围内尽可能紧密地挤在一起。尤其在固体中，分子排列不仅紧密，而且位于大致有周期性变动的恒定晶体结构上，它们只能在各自的平衡位置附近振荡。液体分子虽不能像气体分子那样自由运动，但也不如固体分子那样被紧密限定在晶格附近振荡。它介于两者之间，呈部分有序的排列，即作为整体流动性的分子群，有时进入到另一群分子的规则排列中，有时分裂为另一小群分子。这种部分有序排列是呈连续变化的，因而作用于流体的任何一种力，都会使流体产生形变，只要作用力继续维持，形变就不断增加。表 1.1 给出了液体分子性状介于固体和气体之间的这些情况。就某些简单的微观量（如密度）而言，液体似乎近于固体；而从流动性方面讲，液体简直跟气体一样，于是两者可统称为流体。总之流体具有极易流动性的特点，它在静止时，不能承受任何微小的切应力，或者说任何微小的切应力，都会使它极易产生形变和流动。

表 1.1 各类物质的分子性状

物质	分子间作用力	无规热运动振幅与 $d_0$ 之比	分子排列	所需用的统计类型
固体	强	$\ll 1$	有序	量子
液体	中	同一个量级	部分有序	量子+经典
气体	弱	$\gg 1$	无序	经典

流体承受外切应力，将会产生切形变和流动，或者说流体层之间将会产生相对流动，这是流体极易流动的特性。同时，流体又存在另一种特性：当流体层之间存在相对运动或切形变时，流体会反抗这种相对运动或切形变，使流体渐渐失去相对运动。流体的这种抗切变性，或阻碍流体层相对运动的特性，称作**黏性**。对于流体的黏性，可以从宏观和微观两个方面来说明。从宏观上看，相对快速流层对慢速流层有一个拖带作用力，使慢速流层变快起来；相应地慢速流层将拽住快速流层让其减速，最终使流体层间的相对运动消失。流体层之间这种单位面积的作用力，称作**黏性应力**。再从微观上来看，流体

的黏性乃是分子输送的统计平均。即由于分子的不规则运动,在各流体层间交换宏观动量,结果使快、慢流体层的流动趋于均匀而无相对流动或切形变。由实验表明,黏性应力跟流体层相对速度或切形变率呈正比,其比例系数称作黏性系数,在下章有关内容中还将对此作详细介绍。

当流体黏性很小(例如空气和水等),其相对速度也不大时,其黏性应力对流动作用就不甚重要并可予以略去。这种不计黏性的流体,称作理想流体。从微观上讲,理想流体中不存在分子运动的宏观动量输送。在宏观上,理想流体没有抗切形变性。

流体的另外一种特性,就是它的体积元在运动过程中可以因压力、温度等因素的改变而有所变化。这种特性,称作压缩性。各种流体的压缩性是不同的,液体在常压常温下压缩性很小,几乎可当作不可压缩性流体。例如水在保持温度不变条件下,每增加1个大气压其体积比原来仅减少0.005%。而压力不变时,温度从20℃变化到100℃,水的体积加大4%。但是对某些特殊问题,如水中爆炸等压力骤变问题中,就要考虑液体的压缩性。气体的压缩性比液体明显,通常需作为可压缩性流体来处理。但由于流体的压缩性还跟流速有关(如表1.2所示),因此对于流动不快的气体,而且在流动过程中经受的压差和温差均不大时,它又可近似当作不可压缩流体。

表1.2 空气压缩性与速度的关系

空气流速(m/s)	50	100	150
体积变化率(%)	1	4	10

从微观上而言,液体与气体之间所以有如此不同的压缩性差别,乃是它们的分子间作用力所决定的。由于液体的分子间距较小,分子间的作用力较大,所以在宏观上很难改变它的体积,压缩性较小。相反,气体分子比较分散自由,分子间作用力十分微弱,在宏观上表现为较易改变它的体积,因而压缩性明显。

## 二、流体的连续介质假设

对于流体力学的对象即自然界的流体,在不失问题的本质并且力求方便研究的双重条件下,将引入连续介质假设,把它描述成理论模型。在介绍连续介质之前,先简单分析流体的微观分子结构。由图1.1知,分子间的作用是斥力还是吸力,取决于它们的平均间距(或平均自由程) $d_0$ 是小于还是大于临界间距 $d_c \sim 10^{-8}\text{cm}$ 。而一般流体的 $d_0$ 约为 $10^{-7} \sim 10^{-8}\text{cm}$ ,略超过临界间距 $d_c$ 或斥力的范围,所以流体分子总是尽可能紧挨着的。另一方面 $d_0$ 比之分子自身线尺度又大得多,因此实际流体是由无数流体分子彼此间以比其自身线尺度大得多的空隙分离间隔而构成的。对于这种由离散分子构成的真实流体,该如何研究它的运动呢?由于日常生产和生活中所指的流体运动,皆属于经典力学范畴的宏观运动,它并不要求涉及分子运动和分子的微观结构。所以,为了简化流体运动的数学分析,就可以不考虑流体的离散分子结构状态,而把流体当作连续介质来

处理,也就是说把离散分子构成的实际流体,看作是由无数流体质点没有空隙连续分布而构成的,这就是**连续介质假设**。

把离散分子结构的流体,假设成由一个紧挨一个连续分布的**流体质点**所构成的连续介质,其关键之处是引入了流体质点这一重要概念。这里引入的流体质点简称为**流点**,显然不再是个别流体分子,而是大量流体分子的集合,又可称作**流体微团**或**流体微元**。而且要求流点或微团,在微观上要足够地大,在宏观上要充分地小。在微观上足够地大,就是要求流点的线尺度  $L_2$  比之分子运动的线尺度  $L_1$  (或平均间距  $d'_0$ ) 要足够地大,以保证流点中包含足够多的分子,对它们进行统计平均能取得稳定的宏观量值,不会因少量分子出入流点而影响该宏观量值。同时,又要求宏观上充分地小,即要求流点的线尺度  $L_2$  和流动范围线尺度  $L_3$  相比要充分在地小,以致可以把流点近似地看成在几何上没有维度的点。经宏观上这样选取尺度后,流点所具有的宏观物理量,在流体域内是连续分布的,从而构成了各种物理量场,便于场论等数学分析工具的应用。所以,对连续介质假设中的流点,其线尺度  $L_2$  应满足如下关系,即

$$L_1 \ll L_2 \ll L_3 \quad (1.1)$$

以下举流体密度为例,来进一步阐明这种既大又小的流点概念。假若流体由  $n$  种物质组成,则在其中取出一体积元  $\delta\tau$  (如图 1.2 所示),其内所含的质量为

$$\delta m = \sum_{i=1}^n N_i m_i \quad (1.2)$$

式中  $N_i$  是第  $i$  种物质在体积元  $\delta\tau$  中的分子

数,  $m_i$  是第  $i$  种物质的分子量,  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  为分子总数。显然,在体积元  $\delta\tau$  内流体的平均密度为

$$\bar{\rho} = \delta m / \delta\tau \quad (1.3)$$

现在来确定流点的密度。取流点自身的线尺度为  $L_2$ , 于是相应的流体密度定义为

$$\rho = \lim_{\delta\tau \rightarrow (L_2)^3} \delta m / \delta\tau \quad (1.4)$$

上列极限式是否有确定值,显然取决于  $L_2$  的取值。或者,流点是否有稳定的宏观密度值,依赖于流点的大小(即  $L_2$ ) 的选取是否合适。图 1.3 给出了流点密度  $\rho$  与其线尺度  $L_2$  的关系。当线尺度  $L_2$  微观上不是足够大而是取得与分子运动线尺度  $L_1$  同阶大小,就不能保证体积元  $\delta\tau$  内有足够多的分子数  $N$ , 因而随机进出流点的分子将会引起(1.4)式的极限没有确定的值,相应地反映在图 1.3 左侧密度曲线,上下起伏很剧烈。相反,若流点线尺度  $L_2$  宏观上又不是充分小而是与流动范围尺度  $L_3$  相当,则密度在流体空间中分

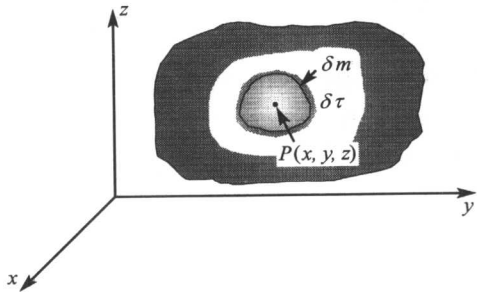


图 1.2 流点  $P$  及其质量  $\delta m$  和体积  $\delta\tau$  示意图

布的不均匀也将影响流点密度变化,而使得(1.4)式无确定的极限值,如图1.3右侧所示。只有当 $L_1 \ll L_2 \ll L_3$ 时,即流点既大又小,(1.4)式才有确定的极限值,如图1.3中部所示流点密度稳定不变,可近似看成一个几何点上的局部值。

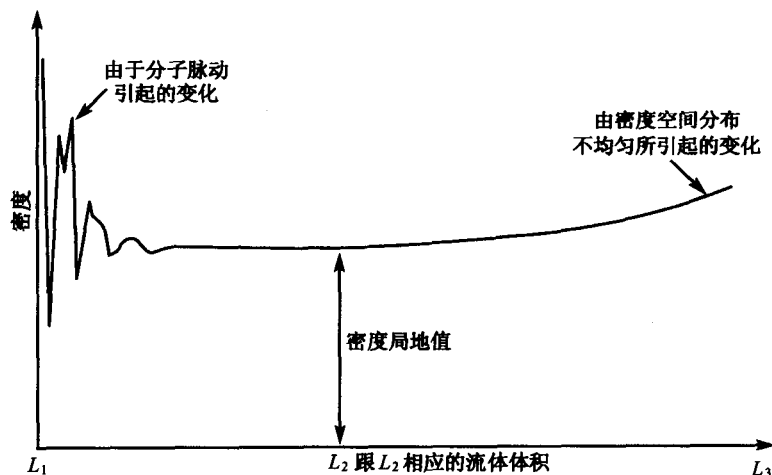


图 1.3 密度  $\rho$  与  $L_2$  相应的体积  $\delta\tau$  之间的关系

一般来说,按照时-空对应关系,跟前述微观上足够大宏观上充分小的流点相一致,还具有微观上足够长宏观上充分短的时间尺度。而且在该时间尺度内分子间有足够多次的碰撞,可保证进行统计平均有稳定的值。同时,在宏观上该时间尺度与流场变化所需的时间相比,又可看成一个瞬间。时、空尺度如此统一的流点,将使得(1.4)式在任一点  $(x, y, z)$  和任一瞬间  $t$  都有确定的极限值,因而就得到了时、空均为连续的密度场  $\rho(x, y, z, t)$ 。

引入既足够大又充分小的这种流点概念,对于讨论流动问题及简化数学分析是必要的,并且在实际上又是可能的。例如,在通常条件下,  $1\text{cm}^3$  的空气中含有  $2.7 \times 10^{19}$  个分子。因此,取  $10^{-3}\text{cm}$  为边长的立方体(即  $10^{-9}\text{cm}^3$ )作为流点,它对于一般流动规模已是充分地小到可当作一点,而它还含有  $2.7 \times 10^{10}$  个分子,这就可认为它仍相当大,能够具有确定的平均效应。在通常条件下,  $1\text{cm}^3$  内的气体分子在  $1\text{s}$  内要碰撞  $10^{29}$  次,因此在  $10^{-9}\text{cm}^3$  的很小体积内,如取  $10^{-6}\text{s}$  的很短时段,分子仍要碰撞  $10^{14}$  次,这对微观上求稳定的统计平均值已是足够了。而  $10^{-6}\text{s}$  的时段,相对于流动的宏观变化时间,确又是非常之短,可近乎当作某一瞬间。

对于大多数情况的流体,一般均可以当作连续介质来考虑,但在某些特殊场合下连续介质假设并不适用。例如,稀薄气体运动或者空气动力学中的激波区就无法取定合适的既大又小的流点。对于前者,流点必须取得很大,这就会失去点的意义。对于后者,由



于在激波区宏观物理量在非常小的线尺度内就有剧烈的变化,因而流点只能相应地取得很小,结果无法包含大量分子来确定该点的物理量(即图 1.3 中的曲线几乎没有中间平直段),所以这个假设也不适用。但是在一般情况下,如把激波考虑成物理量场的间断面或不连续面,则仍可以保持取连续介质的假设。对于气象学或者大气科学,除高层稀薄大气外,通常也是将大气当作连续介质来考虑的,并且对于地球范围的大气运动而言,测风气球就相当于那种既大又小的流点。至于到什么高度大气才算是稀薄气体呢?我们引入分子自由程  $l$  和物体特征长度(如测速感应体的线尺度) $L$  之比数  $l/L$ , 称作克努森(Knudsen)数,并记作  $Kn = l/L$ 。当  $l/L \ll 1$  时才适用连续介质假设。表 1.3 给出了各高度上大气的克努森数,由该表可见,在 50km 左右的高空大气,仍然可以作为连续介质。在更高的地方,大气就不能看作连续介质,而是非连续的稀薄气体。在本书后文中,除特殊说明外,一般都把流体当作连续介质来处理。

表 1.3 各高度上大气的克努森数

海拔高度(km)	分子自由程 $l$	克努森数 $Kn = \left(\frac{l}{L}\right)^*$
1	$<10^{-4}\text{cm}$	$<10^{-5}$
50	$\sim 0.1\text{cm}$	$\sim 10^{-2}$
100	$\sim 10\text{cm}$	$\sim 1$
150	$\sim 100\text{m}$	$\sim 10^3$
200	$\sim 100\text{km}$	$\sim 10^6$

\* 此处  $L$  取为 10cm。

根据克努森数  $Kn = l/L$ , 可将流体运动分成如表 1.4 所示的三类流型。其中对于连续介质流,流体具有连续介质的性状;滑动(Slip)流时,流体的连续介质模型开始失效;自由分子流,是指流体中的分子平均自由程大到如此程度,以致分子碰撞主要出现于壁面,内部碰撞既稀少又不重要。

表 1.4  $Kn$  数与流动类型

$Kn$ 数	$<10^{-2}$	$<10^{-2} < Kn < 10^1$	$>10^1$
流型	连续介质流	滑动流	自由分子流

## § 2 流体速度和加速度

上节已说明,实际流体可当作连续介质这样一个理论模型来处理,也就是说,流体可视为连续分布的流点系。因此,流体运动可当作流点系的运动来讨论。

### 一、两种表述流动的方法

对于如何描述流体运动,在流体力学中存在着两种着眼点不同的描述方法,它们是