教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

微积分初步

WEIJIFENCHUBU

赵坚　顾静相　编

中央廣播電視大學出版社

Central Radio & TV University Press

网址 http://www.crtvup.com.cn

ISBN 978-7-304-03742-0

9 787304 037420 >

定价：17.00元

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

微积分初步

赵　坚　顾静相　编

中央广播电视大学出版社

北　京

图书在版编目（CIP）数据

微积分初步 /赵坚，顾静相编．—北京：中央广播电视大学出版社，2006.12

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

ISBN 978－7－304－03742－0

Ⅰ．微…　Ⅱ．①赵…②顾…　Ⅲ．微积分－电视大学－教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 161263 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

微积分初步

赵　坚　顾静相　编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：发行部：010－58840200

总编室：010－68182524

网址：http://www.crtvup.com.cn

地址：北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编**：100039

经销：新华书店北京发行所

策划编辑：何勇军　　**责任编辑**：申　敏

印刷：北京宏伟双华印刷有限公司　　**印数**：19001～30000

版本：2006 年 12 月第 1 版　　2007 年 8 月第 3 次印刷

开本：787×1092　1/16　　**印张**：11.5　　**字数**：259 千字

书号：ISBN 978－7－304－03742－0

定价：17.00 元

（如有缺页或倒装，本社负责退换）

前　　言

微积分初步是遵照中央广播电视大学2006年制定的数控技术专业教学实施方案，为数控技术专业及广播电视大学理工科高职高专的公共数学课程教学而编写。

本书吸收了近年来职业教育关于数学课程教学改革和教材建设的宝贵经验，并结合理工科高职高专的实际需要，在编写过程中注意了以下4个方面：

（1）明确学习对象，充分考虑到利用多种媒体进行远程学习的特点；

（2）不追求数学理论上的系统性，削减纯理论或与理工科高职高专的实际应用不直接、后续课程运用不多或不集中的内容；

（3）注意启发式和几何直观，便于学生对于教学内容理解和掌握；

（4）强调基本知识、基本运算的掌握，避免教学内容中的复杂计算、技巧和变换。

参加本书编写的有中央广播电视大学的赵坚和顾静相老师，具体分工如下：第1章函数、极限和连续，第2章导数与微分，第4章不定积分与定积分由赵坚编写；第3章导数应用，第5章积分应用由顾静相编写；全书的编写工作由赵坚主持。

本书初稿完成之后由北京师范大学丁勇教授等进行审定，对本书的编写提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，兼之作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者和同仁不吝批评指正。

编　者
2006年9月

目　　录

开篇　一元微积分

微积分是应用最广泛的数学分支之一．今天没有哪所大学的理工科学生不学习微积分，许多大学社会科学方面的学生也要学习微积分．人们已经不仅仅把微积分看成是一门数学课程．这是由于微积分中蕴含了许多深刻的哲学思想，变量与常量，有限与无限，收敛与发散等，无不体现出对立统一和辩证法的思想．如果仅仅把学习微积分看成是掌握一种数学知识，那么你学习的收获就会小很多．数学家 Demollins 曾经说过："没有数学，我们无法看透哲学；没有哲学，人们无法看透数学的深度；而若两者都没有，人们就什么也看不透．"

恩格斯曾经指出："数学中的转折点是笛卡尔的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……" 实际上，与笛卡尔同时代的伟大数学家费尔马对解析几何的创立也有重要贡献．而解析几何的创立是微积分产生的序曲．微积分的起源主要来自两个方面：一是一些力学和天文学问题，例如求变速运动的瞬时速度、加速度、路程等问题；二是几何方面的一些经典问题，例如求曲线的切线，曲线的长度，不规则几何图形的面积、体积等问题．这些古老的问题在古代就有许多数学家研究过，实际上当时人们遇到的两类问题就是今天的微分学和积分学问题，但是很久都没有把它们联系起来．发现这两类问题显著联系的是牛顿和莱布尼茨，联系的桥梁就是著名的牛顿-莱布尼茨公式．微积分的发展在科学史上具有非凡的意义．

现在微积分的内容安排总是按照函数、极限、连续、导数、微分、积分这个次序，实际上极限和连续的概念产生于微积分之后．微积分这座辉煌的大厦刚开始建立的时候，基础是很不牢固的，极限、连续等概念正是在加固微积分基础的时候产生的．19 世纪在柯西、维尔斯特拉斯等数学家的共同努力下，才完成了微积分的严格化．

在本书中，我们主要学习一元微积分最基本的知识，只涉及函数、极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分最基本的内容．最感遗憾的是，由于篇幅的限制，无法给大家介绍微积分丰富的应用实例．

1 函数、极限与连续

内容简介

微积分以变量为研究对象，本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念和性质.

学习目标

1. 了解常量和变量的概念；理解函数的概念；了解初等函数和分段函数的概念；熟练掌握求函数的定义域、函数值的方法；掌握将复合函数分解成较简单函数的方法.

2. 了解极限概念，会求简单极限.

3. 了解函数连续的概念，会判断函数的连续性，并会求函数的间断点.

1.1 函数概念

1.1.1 常量与变量

当我们研究一个自然现象或社会现象时，所遇到的量可分为两类：常量和变量. 在研究过程中保持不变的量称为**常量**，而变化着的量称为**变量**. 例如，圆的周长与直径之比是一个常量，称为圆周率，记作 π. 又如汽车在某一段时间内行驶的路程是一个变量，它是随行驶的时间而变化的.

需要指出的是，常量和变量都是相对的概念. 同一个量在一定的条件下或在某个问题中是常量，而在另一个条件下或在另一个问题中则可能是变量. 例如，人民币的银行存款利率，在短期内（如一个季度）可以是常量，在较长的一段时间（如十年）就是一个变量.

通常用字母 a，b，c，…表示常量，用字母 x，y，z，t，u，…表示变量.

在本书中，如无特别说明，则假定各种量所取的数值都是实数，由实数组成的集合称为

数集.

如果变量 x 的变化是连续不断的，则它的变化范围可以用区间来表示．常用区间有以下几类：

1. 涵盖整个数轴的区间，记作 $(-\infty, +\infty)$，它表示 x 适合 $-\infty < x < +\infty$.

2. 对于给定的实数 a，以 a 为左边的端点而右边不加限制的区间，按端点是否包含在该区间内的情况分别记作 $[a, +\infty)$ 和 $(a, +\infty)$，它分别表示变量 x 适合 $a \leqslant x < +\infty$ 和 $a < x < +\infty$；类似地可以定义以 a 为右边的端点而左边不加限制的区间 $(-\infty, a]$ 和 $(-\infty, a)$，它分别表示变量 x 适合 $-\infty < x \leqslant a$ 和 $-\infty < x < a$.

3. 对于适合 $a<b$ 的实数，以及 a，b 分别为左、右端点的区间有以下 4 种：

(1) $[a, b]$ 表示 $a \leqslant x \leqslant b$，称为闭区间；

(2) (a, b) 表示 $a < x < b$，称为开区间；

(3) $[a, b)$ 表示 $a \leqslant x < b$，称为左闭右开区间；

(4) $(a, b]$ 表示 $a < x \leqslant b$，称为左开右闭区间.

以上的类型 1 和 2 统称为无限区间，类型 3 称为有限区间.

设 a 为实数，δ 是正数，满足不等式 $|x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 **δ 邻域**，它相当于集合 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, |x-a| < \delta\}$（其中 $\mathbf{R}$ 是实数集）．此时，点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径，显然，以点 a 为中心的 δ 邻域就是长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$．有时用到的邻域会将邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，成为点 a 的**去心的 δ 邻域**，它就是集合 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < |x-a| < \delta\}$.

1.1.2 函数的定义

在一个过程中出现两个变量，通常不是彼此独立地变化，而是其中一个变量的变化会引起另一个变量跟随它作相应的变化．其中一个是主动变化的量，另一个是被动变化的量．例如，由于时间的变化，使得行驶的路程随之相应地变化，时间是主动变化的量，而路程是被动变化的量，在路程与时间这两个变量之间存在着对应的关系，实际上，这种对应关系是由某种对应法则所决定的，这种对应关系被称为变量之间的函数关系.

定义 1.1 设 x，y 是两个变量，如果当 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，y 按照一定的关系总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的**一元函数**，简称**函数**，记作

$$y=f(x)$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．自变量 x 的取值范围称为函数的**定义域**，因变量 y 的取值范围称为函数的**值域**.

函数记号 $y=f(x)$ 表示将对应法则 f 作用在 x 上，从而将两个变量相联系．它既表明了两个变量之间的相互依赖关系，又表明了把它作用在 x 上，可以得到唯一的 y 值和 x 对应．两个变量的函数关系可以用式子表示，例如，$y=f(x)=x^2+2x-5$，$y=f(x)=\lg(x-5)$，也可以用

图形和表格来表示.

用解析式子表示函数不一定总是用一个式子，有时在定义域的不同范围上要用不同的式子来表示对应关系，这时的函数称为**分段函数**.

例 1.1 某通信公司销售光传输设备，其中光模块的价格是随传输的距离而定的. 当传输距离在 40 km 之内（含 40 km），则 170 元/个；当传输距离在 40~80 km 之间（含 80 km），则 190 元/个；当传输距离在 80~210 km 之间（含 210 km），则 210 元/个. 我们可以将销售价格表示成传输距离的函数.

解 设 x 表示传输的距离，y 表示设备的售价，

$$y=\begin{cases}170, & 0<x\leqslant 40\\ 190, & 40<x\leqslant 80\\ 210, & 80<x\leqslant 210\end{cases}$$

其中定义域为 $(0, 210]$.

例 1.2 设

$$y=\begin{cases}x+1, & -\infty<x\leqslant 0\\ 1, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

我们可以看到，这个函数的定义域是整个数轴. 当自变量 x 在区间 $(-\infty, 0]$ 内取值时，对应的函数值应按 $y=x+1$ 的式子计算；当自变量 x 在区间 $(0, +\infty)$ 内取值时，对应的函数值应按 $y=1$ 的式子计算. 例如，$f(-1)=1+1=0$，$f(3)=1$，函数的图形如图 1-1 所示.

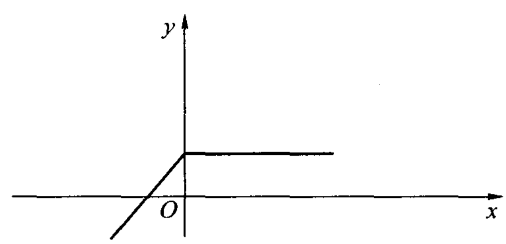

图 1-1 例 1.2 中函数的图形

1.1.3 函数的特殊性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于任意的 x_1，$x_2\in I$，且满足 $x_1<x_2$：

若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**递增函数**；

若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**递减函数**；

若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**不减函数**；

若有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**不增函数**.

递增函数、递减函数分别称为**严格单调增加函数**和**严格单调减少函数**，而不减函数和不增函数分别称为**单调增加函数**和**单调减少函数**. 有时，为叙述简单，对于严格单调增加（减少）的函数也称为单调增加（减少）的函数.

例如，$y=x^3$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加的函数.

函数 $y=x^2+1$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$，而在区间 $[0, +\infty)$ 函数严格单调增加，在区

间（$-\infty$，0）上函数严格单调减少.

由此可见，函数的单调性与所讨论的区间密切相关，若在某区间上给定的函数为单调的，就称这个区间为该函数的一个**单调区间**. 因此，在上例中，$[0, +\infty)$ 为函数 $y = x^2 + 1$ 的单调增加区间，$(-\infty, 0)$ 为函数 $y = x^2 + 1$ 的单调减少区间，而函数 $y = x^3$ 在整个定义域内是单调增加的函数.

单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1－2 所示；单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1－3 所示 $y = x^2 + 1$ $(-\infty, 0)$ 部分.

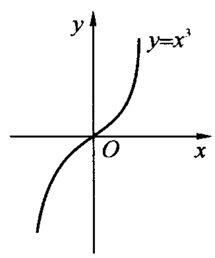

图 1－2 函数 $y = x^3$ 的图形

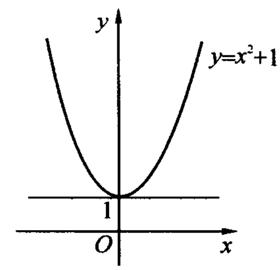

图 1－3 函数 $y = x^2 + 1$ 的图形

2. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$，其定义域 D 关于原点对称（即当 $x \in D$，就有 $-x \in D$），若对其定义域 D 内的任意 x，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对其定义域 D 内的任意 x，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的.

例如，函数 $y = x^3$ 是奇函数，函数 $y = x^2 + 1$ 是偶函数，读者可以从图 1－2 和图 1－3 中看到它们的图形分别是关于原点对称和关于 y 轴对称的.

例 1.3 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^3 - x$;

(2) $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$;

(3) $f(x) = \sin x + \cos x$.

解 本题各函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，是关于原点对称的.

(1) 因为 $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$,

所以 $f(x) = x^3 - x$ 是奇函数.

(2) 因为 $f(-x) = \dfrac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x)$,

所以$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$是偶函数．

(3) 因为$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq f(x)$，

同时$f(-x)\neq -f(x)$，所以$f(x)=\sin x+\cos x$既不是偶函数也不是奇函数．

3. 有界性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，如果存在正数M，使得对于D中的x，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$y=f(x)$在D上有界，或称$y=f(x)$ 是D上的**有界函数**．而每一个具有上述性质的正数M，都是函数的界．

例如，函数$y=\frac{1}{1+x^2}$是有界函数，因为对任意的x，都有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$$

这里的1就可以看作是函数的界．

从几何直观上看，有界函数的图形在两条平行于x轴的直线$y=M$及$y=-M$所确定的带形区域内（见图1-4）．

如果这样的正数M不存在，就称函数$y=f(x)$在D上无界．即为，对于任意给定的正数M，不论它有多么大，总存在某个$x_0\in D$，使得不等式$|f(x_0)|>M$成立，这时$y=f(x)$在D上无界．

例如，$y=\frac{1}{x}$是无界函数．

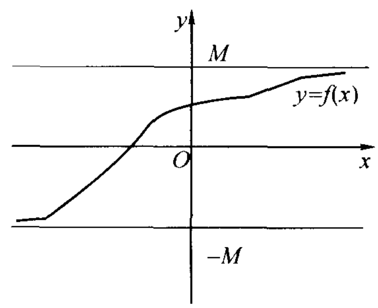

图1-4 有界函数的图形

4. 周期性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，若存在常数$T>0$使得对于每一个$x\in D$，有$x+T\in D$，且总有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数$y=f(x)$为**周期函数**，满足上式的最小正数T（如果这样的最小正数存在）为函数$y=f(x)$的**周期**．

例如，正弦函数$y=\sin x$是以2π为周期的周期函数．

1.1.4 基本初等函数

在微积分的学习中，我们会大量地遇到函数，而这些函数都是以基本初等函数为元素的，为此有必要复习以下基本初等函数．

1. 常数函数

函数

$$y=c\ (c\text{为常数})$$

称为**常数函数**.

常数函数的图形是一条过（0，c）点，平行于 x 轴的直线，如图 1－5 所示.

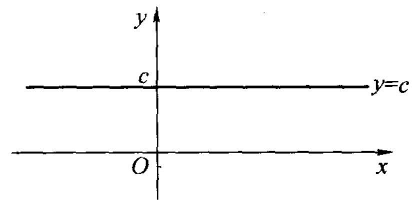

图 1－5　$y=c$ 的图形

2. 幂函数

函数

$$y = x^{\alpha}\ (\alpha\text{为任意实数})$$

称为**幂函数**.

当 $\alpha = 0$，则 $y = 1$ 是常数函数；

当 $\alpha = 2$，则 $y = x^2$ 是我们熟悉的抛物线（见图 1－6）.

幂函数的定义域是随 α 的取值不同而异的，例如，幂函数 $y = x^3$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而幂函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$，幂函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，如图 1－7 所示.

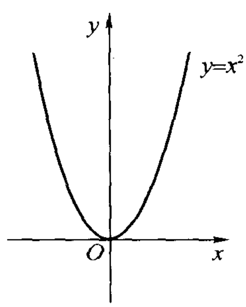

图 1－6　$y=x^2$ 的图形

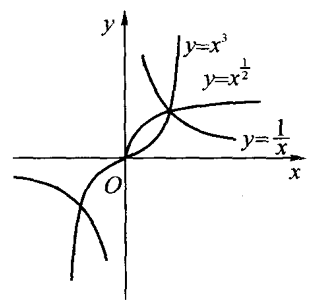

图 1－7　$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的图形

但是，无论 α 取何值，在区间 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的，且 $y = x^{\alpha}$ 的图形一定过 (1，1) 点.

3. 指数函数

函数

$$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$$

称为**指数函数**.

指数函数 $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，函数的图形在 x 轴的上方，且过（0，1）点. 对于 $0<a<1$ 和 $a>1$，指数函数的形态是不同的：当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，当 $a>1$ 时，函数单调增加. 见图 1－8.

其中函数

$$y = \mathrm{e}^x$$

的底数

$$e = 2.71828\cdots$$

是一个无理数.

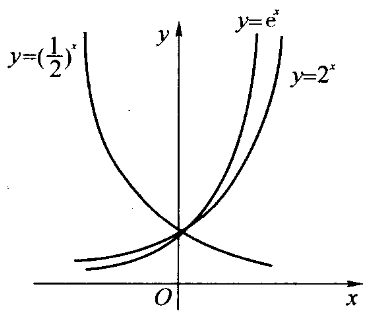

图 1-8 指数函数的图形

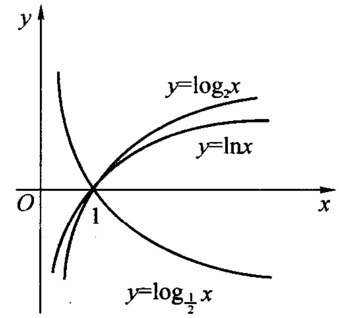

图 1-9 对数函数的图形

4. 对数函数

函数

$$y = \log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

称为**对数函数**.

对数函数 $y = \log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，值域为 $(-\infty,\ +\infty)$，函数的图形在 y 轴的右方，且过 $(1,\ 0)$ 点，如图 1-9 所示.

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加.

特别地，以 10 为底和以 e 为底的对数函数分别称为常用对数函数和自然对数函数，记作 $\lg x$ 和 $\ln x$，这是两种经常用到的对数函数.

5. 三角函数

(1) 正弦函数

函数

$$y = \sin x$$

称为**正弦函数**.

正弦函数的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $[-1,\ 1]$，它是以 2π 为周期的有界奇函数，图形如图 1-10 所示.

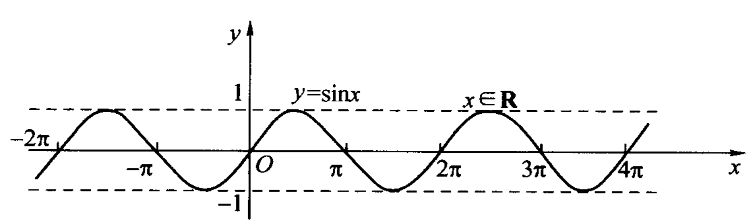

图 1-10 正弦函数的图形

(2) **余弦函数**

函数

$$y = \cos x$$

称为**余弦函数**.

余弦函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，它是以 2π 为周期的有界偶函数，图形如图 1-11 所示.

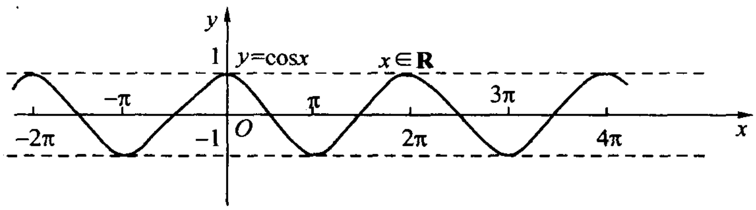

图 1-11 余弦函数的图形

(3) **正切函数**

函数

$$y = \tan x$$

称为**正切函数**.

正切函数在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$（k 为任意整数）处无定义，值域为 $(-\infty, +\infty)$，它是以 π 为周期的无界奇函数，图形如图 1-12 所示.

(4) **余切函数**

函数

$$y = \cot x$$

称为**余切函数**.

余切函数在 $x = k\pi$（k 为任意整数）处无定义，值域为 $(-\infty, +\infty)$，它是以 π 为周期的无界奇函数，图形如图 1-13 所示.

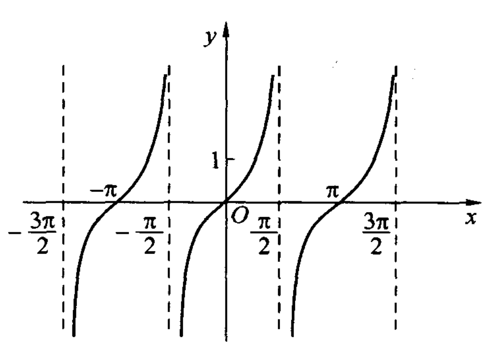

图 1-12 正切函数的图形

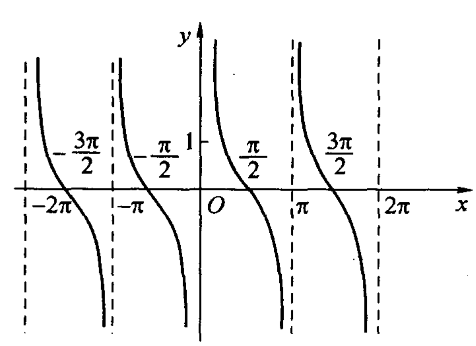

图 1-13 余切函数的图形