

材料力學精解

奇澤一雄・井田晃著／張春榮編譯

正言出版社印行

材料力學精解

奇澤一雄・井田晃著／張春榮編譯

正言出版社印行

目 次

第 1 章 應力及應變

1.1	彈性及虎克定律	1
1.2	垂直應力	1
1.3	應 變	2
1.4	剪應力	2
1.5	剪應變	2
1.6	熱應力	2
1.7	單純應力狀態	3
1.8	應力與應變之關係	4
1.9	二次元應力狀態	5
1.10	莫爾應力圖	5
1.11	彈性常數間的關係	7
1.12	承受引張棒之應變能	7

第 2 章 材料的機械性質

2.1	材料試驗	13
2.2	應力應變圖	13
2.3	材料的性質	14
2.4	由於塑性變形的諸現象	15
2.5	潛 變	15
2.6	疲 乏	16
2.7	破損的形式	17
2.8	破損定律	17
2.9	應力集中	17
2.10	安全因數	17
第 1 章・第 2 章 問 題		19
第 1 章・第 2 章 問題解答		33

第3章 梁

3.1	支點的種類	81
3.2	梁的種類	81
3.3	負荷的種類	81
3.4	靜定梁與靜不定梁	82
3.5	剪力與彎曲力矩	82
3.6	剪力及彎曲力矩的符號	85
3.7	負荷，剪力與彎曲力矩的關係	85
3.8	斷面一次力矩（面積力矩）	91
3.9	斷面二次力矩（慣性矩）	92
3.10	斷面極慣性矩	92
3.11	梁的彎曲理論	92
3.12	斷面係數	93
3.13	彎曲應力	93
3.14	梁的剪應力	94
3.15	梁的撓度	95
3.16	梁的撓度莫爾定理	99
3.17	連續梁	102
3.18	由於彎曲的應變能	111
3.19	諸計算的步驟	112
	第3章 問題	113
	第3章 問題解答	127

第4章 柱的穩定，長柱的皺曲

4.1	歐拉公式	233
4.2	柱的實驗公式	236
	第4章 問題	240
	第4章 問題解答	241

第 5 章 平板的彎曲及安定

5.1	平板的同樣彎曲	245
5.2	承受橫負荷平板的彎曲	246
5.3	平板的安定	248
	第 5 章 問 題	251
	第 5 章 問題解答	253

第 6 章 棒的扭轉

6.1	圓棒的扭轉	258
6.2	傳達馬力車軸	261
6.3	承受扭轉及彎曲的棒	262
6.4	由於扭轉的應變能	263
6.5	螺旋彈簧	264
	第 6 章 問 題	267
	第 6 章 問題解答	272

第 7 章 圓筒

7.1	厚壁圓筒	285
7.2	組合圓筒	287
7.3	承受內壓薄壁圓筒	288
7.4	迴轉圓輪	290
	第 7 章 問 題	294
	第 7 章 問題解答	296

第 8 章 應變能定理

8.1	功	302
8.2	互換定理	305
8.3	卡思的義安諾定理	308
8.4	最小功定理	312

8.5	補助能 (complementary energy)	313
	第八章 問題	316
	第8章 問題解答	323
	綜合練習問題	358
	綜合練習問題解答	368

第1章 應力及應變

1.1 彈性及虎克(HOOKE)定律

物體受外力作用，此物體將發生形變。若此外力除去，則其形變消失及恢復物體原來形狀，此種性質稱為彈性 (elasticity)，又此時的限度稱為彈性限度。

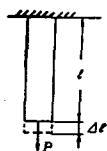
虎克*發現於彈性限度內，有如下的關係。

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE}$$

E ：縱彈性係數** (或彈性係數，楊氏係數***)

P ：負荷， A ：斷面積， l ：長度，

Δl = 伸長量



1.1 圖

虎克定律為伸長量與負荷 (力) 及長度成正比，和斷面積及彈性係數成反比。

* Robert Hooke (英) 於 1678 年發現虎克定律 (Hooke's Law)。

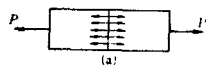
** 縱彈性係數 (modulus of elasticity)

*** 楊氏彈性係數 (Young's modulus)

1.2 垂直應力(NORMAL STRESS)

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(P ：軸向負荷， σ ：垂直應力， A ：截面積)



1.2 圖(a)引伸應力

1.2 圖(b)壓縮應力

(tensile stress)

(compressive stress)

2 材料力學精解

1.3 應變(STRAIN)

- (1) 縱應變 (longitudinal strain) 軸負荷方向所生應變

$$\epsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

- (2) 橫應變 (lateral strain)

$$\epsilon' = \frac{d' - d}{d}$$



1.3 圖(a) Tension

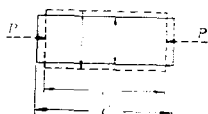
(d : 形變前的直徑, d' : 形變後的直徑)

- (3) 卜易生比 (Poisson's ratio)

$$\nu = \frac{1}{m} = -\frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

ν : 卜易生比

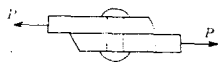
m : 卜易生數 (Poisson's number)



1.3 圖(b) Compression

1.4 剪應力(SHEARING STRESS)

$$\tau = \frac{P}{A}$$

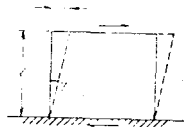


1.4 圖

1.5 剪應變(SHEARING STRAIN)

- (1) 剪應變

$$\frac{\delta}{l} = \tan \gamma \approx \gamma \quad (\text{但}, \gamma \ll 1)$$



1.5 圖

- (2) 橫彈性係數 材料遵循虎克定律時, 剪應

力 τ 與剪應變 γ 之關係, 以下式表示。

$$\tau = G\gamma$$

(G : 橫彈性係數* (剪彈性係數, 剛性係數))

*橫彈性係數 (shear modulus)

1.6 熱應力

如 1.6 圖，溫度 $t_1^\circ\text{C}$ 時，長 l 斷面相同的棒，被固定於剛性壁，溫度由 $t_1^\circ\text{C}$ 上升至 $t_2^\circ\text{C}$ 時，棒所生壓縮熱應力為，

$$\sigma = \alpha E (t_2 - t_1)$$

(α : 線膨脹係數, E : 縱彈性係數)



1.6 圖

1.7 單純應力狀態

若棒的斷面積 A ， rs 斷面的法線與棒的軸方向所成的角為 θ ，則垂直於軸斷面的應力 σ_x 為，

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

rs 斷面的斷面積 A' 為

$$A' = \frac{A}{\cos \theta}$$

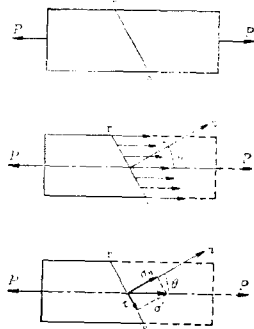
因此，作用於斷面軸方向的應力 σ' 為，

$$\sigma' = \frac{P}{A'} = \frac{P}{A} \cos \theta = \sigma_x \cos \theta$$

由上得 θ 與 σ' 之關係如下：

$$\theta = 0 \text{ 時 } \sigma' = \sigma_x$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 時 } \sigma' = 0$$



1.7 圖

軸方向應力 σ' 分解為垂直 rs 斷面應力 σ_n 及平行 rs 斷面應力 τ 。

$$\sigma_n = \sigma' \cos \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau = \sigma' \sin \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

$$= \sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}$$

由此可得如下

$$\theta = 0 \text{ 時 } \sigma_{n \max} = \sigma_x, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 時 } \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x$$

4 材料力學精解

σ' 與 σ_n 及 τ 之間有如下之關係。

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

1·8 應力與應變之關係

(1) 二次元應力狀態

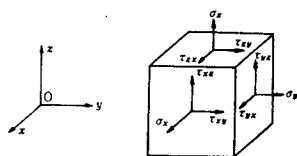
$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

(2) 三次元應力狀態

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \} \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$$



1·8 圖

(於剪分應力中，左邊文字是作用應力面，右邊是應力的方向)

(3) 單位體積相當的增加量

$$e = \frac{V' - V}{V} = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1$$

$$\approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

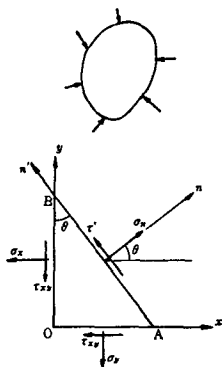
(4) 體積彈性係數 (bulk modulus)

$$e = -\frac{P}{K} \quad (P: \text{壓力, 應力} \quad K: \text{體積彈性係數})$$

1.9 二次元應力狀態

薄平板於其周圍板的平面內承受外力作用時，板內部所生應力的作用方向被包含於一切板的平面內，此狀態為二次元應力狀態，或稱為平面應力狀態。

通過二次元應力狀態一點O有垂直相交座標軸 x, y ，如 1.9 圖 研考其應力狀態，則 x 軸與面的法線成 θ 角， AB 面上的應力如下。



1.9 圖

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau' = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

主應力面的方向以 $\tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ 表示，

此時 $\tau' = 0$ ，主應力的大小為 ($\sigma_1 > \sigma_2$)

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

主剪應力之大小及所生面的方向以下式表示。

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

1.10 莫爾應力圓(MOHR'S STRESS CIRCLE)

(1) 已知 σ_1 與 σ_2 時，試求 σ_1 方向與法線成 θ 角面的垂直應力剪應力。

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \equiv \sigma$$

$$\tau' = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\theta \equiv -\tau$$

6 材料力學精解

由上式消去 θ 則

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

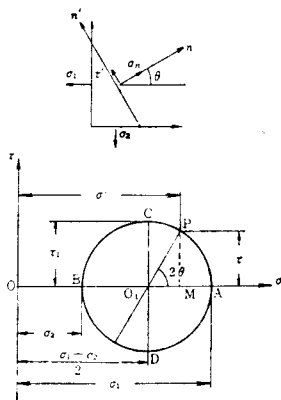
順序

- 1 縱軸為 τ ，橫軸為 σ 。
- 2 $\sigma = \sigma_1$ (A 點)，
 $\sigma = \sigma_2$ (B 點)，($\tau = 0$)
- 3 以 AB 為直徑畫圓。
- 4 由點 A 逆時針迴轉，使
 $\angle AO_1P = 2\theta$ 。

$$\overline{OM} = \sigma$$

$$\overline{PM} = \tau$$

$$\overline{O_1C} = \tau_1 \text{ (最大剪應力)}$$



1.10 圖

- (2) 已知平面分應力為 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 時，試求那點之主應力 σ_1, σ_2 與主方向 θ_n 。

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \equiv \sigma$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \equiv \tau$$

由上式消去 θ 則

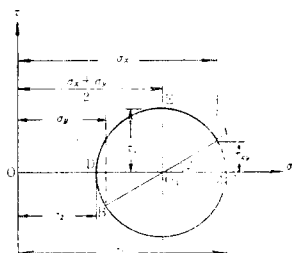
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

順序 (1.11 圖)

- 1 縱座標為 τ ，軸座標為 σ 。
- 2 連接 $A(\sigma_x, \tau_{xy}), B(\sigma_y, -\tau_{xy})$ 求 O_1 。
- 3 以 O_1 為圓心，通過 AB 畫圓。

$$\angle AO_1M = 2\theta_n$$

$$\left(\because \tan 2\theta_n = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\overline{MA}}{\overline{O_1M}}\right)$$



1.11 圖

$$\overline{OC} = \sigma_1, \overline{OD} = \sigma_2 \text{ (主應力 } \tau = 0 \text{)}$$

$$\overline{OE} = \tau_1$$

- (3) 已知平面分應力成 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 時，
試求於此點任意方向 θ 的垂直應力，
剪應力。

順序 (1.12 圖)

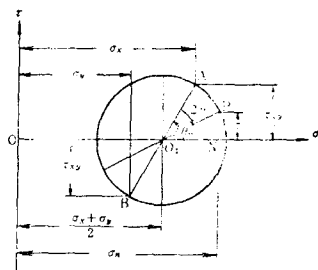
1 ~ 3 與 (2) 所述相同。

4. 由 AB 順時針方向使

$$\angle AO_1P = 2\theta。$$

$$\overline{ON} = \sigma_n$$

$$\overline{NP} = \tau$$



1.12 圖

1.11 彈性常數間的關係

1.1 表

	G, ν	E, ν	E, G	G, K
縱彈性係數 E	$2(1+\nu)G$			$\frac{9KG}{3K+G}$
橫彈性係數 G		$\frac{E}{2(1+\nu)}$		
卜易生比			$\frac{E-2G}{2G}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$
體積彈性係數 K	$\frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$	

1.12 承受引張棒之應變能

- (1) 長度 l ，相同斷面積為 A 之棒，承受引張負荷 P 時，由於形變物體內部所儲存之位能稱為應變能，以下式表示。

$$U = \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 l}{2 AE} = \frac{AE \delta^2}{2 l} = \frac{\sigma^2 A l}{2 E}$$

(2) 單位體積相當之應變能

$$U_o = \frac{U}{A l} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2 E}$$

[例1] 斷面積 50 cm^2 ，長度 20 m ，縱彈性係數 $E = 2.0 \times 10^{10} \text{ kg/cm}^2$ 的鋼棒，用 10 ton 之力引張時，試求：

- (a) 伸長度。
(b) 應力。
(c) 應變。

[解] (a) $\delta = \frac{P l}{AE} = \frac{10000 \times 20 \times 10^3}{50 \times 20 \times 10^6} = 0.2 \text{ (cm)}$

(b) $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10000}{50} = 200 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$

(c) $\varepsilon = \frac{\delta}{l} = \frac{0.2}{20 \times 10^3} = 1 \times 10^{-5}$

[例2] 在引張負荷 1000 kg ，斷面積 20 cm^2 的直棒中，試求引張方向與法線成 30° 斷面的軸向應力，垂直應力及剪應力。

[解] 與軸成直角斷面的應力，

$$\sigma_s = \frac{P}{A} = \frac{1000}{20} = 50 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

m-m 斷面積 A' ，

$$A' = \frac{A}{\cos \theta} = 20 / \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 23.1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\sigma' = \frac{P}{A'} = \frac{P}{A} \cos \theta = \sigma_s \cos \theta = 50 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 43.3 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$



$$\sigma_n = \sigma' \cos \theta = \sigma_x \cos^2 \theta = 50 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 37.5 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad \cdots \text{答}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma' \sin \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta = \frac{50}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 21.6 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

〔例3〕長1 m，直徑10 cm的圓棒用3.14 ton負荷引張時，試求縱應變及引張後的直徑。縱彈性係數為 $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ，卜易生比為0.3。

$$\text{〔解〕} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{3140}{\frac{10^2}{4} \pi} \cdot \frac{1}{2 \times 10^6} = 2 \times 10^{-5},$$

$$-\nu \epsilon = \epsilon_d = \frac{d' - d}{d}.$$

$$\begin{aligned} \text{由上} \quad d' &= (1 - \nu \epsilon) d = (1 - 0.3 \times 2 \times 10^{-5}) 10 \\ &= (1 - 6 \times 10^{-6}) 10 = 9.99994 \text{ (cm)} \quad \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

〔例4〕已知平面應力分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 時，試求於那點任意方向 θ 的垂直應力，剪應力。

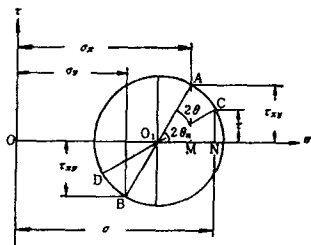
〔解〕

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{O_1M}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\theta_n$$

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= \overline{OO_1} + \overline{O_1N} \\ &= \overline{OO_1} + \overline{O_1C} \cos(2\theta_n - 2\theta) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \end{aligned}$$

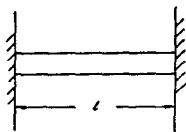
$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

$$(\cos 2\theta_n \cos 2\theta + \sin 2\theta_n \sin 2\theta)$$



$$\begin{aligned}
 \overline{ON} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \left\{ \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\tau_{xy} \sin 2\theta}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right\} \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma_n \\
 \overline{CN} &= \overline{O_1 C} \sin(2\theta_n - 2\theta) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} (\sin 2\theta_n \cos 2\theta - \cos 2\theta_n \sin 2\theta) \\
 &= \tau_{xy} \cos 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = \tau
 \end{aligned}$$

〔例 5〕 如圖溫度 $t^\circ\text{C}$ 時長 l 斷面相同的棒，使其固定於剛性壁，溫度自 $t_1^\circ\text{C}$ 上昇至 $t_2^\circ\text{C}$ 時，棒所生壓縮應力為 $\sigma = \alpha E(t_2 - t_1)$ ，試證明之。 α 為線膨脹係數。



〔解〕 溫度自 $t_1^\circ\text{C}$ 升至 $t_2^\circ\text{C}$ 時，棒之伸長量為 $\delta = \alpha l(t_2 - t_1)$ ，因此，棒的應變為，

$$\epsilon = \frac{\delta}{l} = \alpha(t_2 - t_1)$$

由於剛性壁所生壓縮荷重 P 作用使其縮短 δ ，如棒之原長為 l ，棒縮短 δ 所必要的力 P ，

$$\frac{Pl}{AE} = \delta \quad \therefore P = \frac{AE}{l} \delta = AE\alpha(t_2 - t_1)$$

因此棒所生應力為，

$$\sigma = \frac{P}{A} = \alpha E(t_2 - t_1)$$

〔例 6〕 斷面積 A ，長 l ，比重 γ 的直棒上端固定，將它鉛直懸吊時，試求該棒由於本身重量之伸長量。縱彈性係數為 E 。

〔解〕 距棒下端 x 距離橫斷面的應力 σ ，

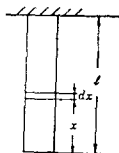
$$\sigma = \frac{A \gamma x}{A}$$

研考距下端 x 距離的微小長度 dx ，則 dx 部的引張應力視為一定。 dx 部的伸長 $d\delta$ 為，

$$d\delta = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{\gamma x}{E} dx$$

棒全部的伸長量 δ 為，

$$\delta = \int_0^l d\delta = \int_0^l \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma l^2}{2E}$$



將上式變為 $\frac{(A\gamma l)l}{2AE}$ ，則該式表示棒的重量之 $\frac{1}{2}$ 的力作用

於棒下端的伸長。因此由於棒本身重量的伸長與其相同。

〔例7〕 茲有下端附剛體凸緣長 l 之棒，今由凸緣上面高 h 之處有重量 W 之錘落下時，試求由於衝擊之最大伸長。

〔解〕 假定衝擊時沒有能量損失，棒本身重量 W 比較，非常小則可以忽略。令棒之最大伸長為 δ ，若重量 W 所作之功 $W(h+\delta)$ 全部轉變為棒的應變能則，

$$W(h+\delta) = \frac{AE\delta^2}{2l}$$

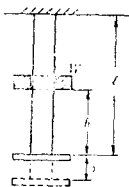
$$\delta^2 - \frac{2Wl}{AE}\delta - \frac{2Whl}{AE} = 0$$

靜伸長為 $\delta_u = Wl/AE$ 所以，

$$\delta^2 - 2\delta_u\delta - 2\delta_u h = 0$$

$$\delta = \delta_u \pm \sqrt{\delta_u^2 + 2\delta_u h}$$

$$\delta > 0, \quad \therefore \delta = \delta_u \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_u}}\right)$$



〔例8〕 縱彈性係數 E ，體積彈性係數 K ，卜易生比 ν 間之關

係 $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ 成立，證明之。