材料力學精解

奇澤一雄・井田晃著／張春榮編譯

正言出版社印行

材料力學精解

奇澤一雄・井田晃著／張春榮編譯

正言出版社印行

目　　次

第1章　應力及應變

第2章　材料的機械性質

第3章　梁

第4章　柱的穩定，長柱的皺曲

第5章 平板的彎曲及安定

第6章 棒的扭轉

第7章 圓筒

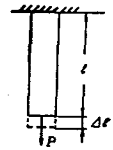
第8章 應變能定理

第1章　應力及應變

1·1　彈性及虎克(HOOKE)定律

物體受外力作用，此物體將發生形變。若此外力除去，則其形變消失及恢復物體原來形狀，此種性質稱爲彈性(elasticity)，又此時的限度稱爲彈性限度。

虎克*發現於彈性限度內，有如下的關係。



$$\triangle l = \frac{P\,l}{AE}$$

E：縱彈性係數**(或彈性係數，楊氏係數***)

P：負荷，　A：斷面積，　l：長度，　　1.1　圖

$\triangle l$ ＝伸長量

虎克定律爲伸長量與負荷(力)及長度成正比，和斷面積及彈性係數成反比。

*　Robert Hooke（英）於1678年發現虎克定律(Hooke's Law)。

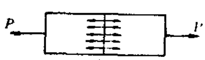
**　縱彈性係數(modulus of elasticity)

***　楊氏彈性係數(Young's modulus)

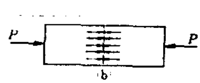
1·2　垂直應力(NORMAL STRESS)

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(P：軸向負荷，　σ：垂直應力，　A：截面積)



1·2 圖(a)引伸應力
(tensile stress)



1·2 圖(b)壓縮應力
(compressive stress)

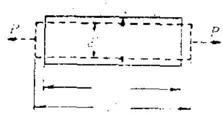
1・3 應變(STRAIN)

(1) 縱應變（longitudinal strain）軸負荷方向所生應變

$$\varepsilon=\frac{l'-l}{l}=\frac{\triangle l}{l}$$

(2) 橫應變（ lateral strain ）

$$\varepsilon'=\frac{d'-d}{d}$$



1・3 圖(a) Tension

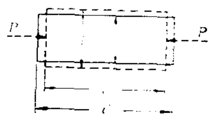
（ d :形變前的直徑， d' :形變後的直徑）

(3) 卜易生比（Poisson's ratio）

$$\nu=\frac{1}{m}=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

ν : 卜易生比

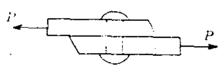
m : 卜易生數（Poisson's number）



1・3 圖(b) Compression

1・4 剪應力(SHEARING STRESS)

$$\tau=\frac{P}{A}$$

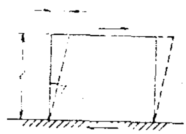


1・4 圖

1・5 剪應變(SHEARING STRAIN)

(1) 剪應變

$$\frac{\delta}{l}=\tan\gamma\fallingdotseq\gamma\text{（但，}\gamma\ll 1\text{）}$$



1・5 圖

(2) 橫彈性係數　材料遵循虎克定律時，剪應力 τ 與剪應變 γ 之關係，以下式表示。

$$\tau=G\gamma$$

（ G : 橫彈性係數*（剪彈性係數，剛性係數））

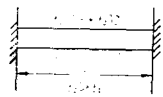
*橫彈性係數（ shear modulus ）

1・6 熱應力

如 1。6 圖，溫度 t_1°C 時，長 l 斷面相同的棒，被固定於剛性壁，溫度由 t_1°C 上升至 t_1°C 時，棒所生壓縮熱應力爲，

$$\sigma = \alpha E\,(t_2 - t_1)$$

（α：線膨脹係數　，　E：縱彈性係數）



1·6　圖

1·7　單純應力狀態

若棒的斷面積 A，rs 斷面的法線與棒的軸方向所成的角爲 θ，則垂直於軸斷面的應力 σ_x 爲，

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

rs 斷面的斷面積 A' 爲

$$A' = \frac{A}{\cos\theta}$$

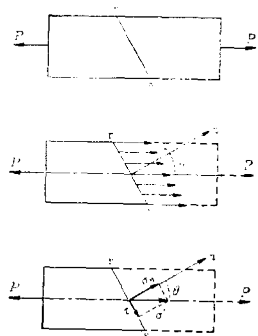
因此，作用於斷面軸方向的應力 σ' 爲，

$$\sigma' = \frac{P}{A'} = \frac{P}{A}\cos\theta = \sigma_x \cos\theta$$

由上得 θ 與 σ' 之關係如下：

$\theta = 0$　時　$\sigma' = \sigma_x$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　時　$\sigma' = 0$



1·7　圖

軸方向應力 σ' 分解爲垂直 rs 斷面應力 σ_n 及平行 rs 斷面應力 τ。

$$\sigma_n = \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta$$

$$\tau = \sigma' \sin\theta = \sigma_x \sin\theta\cos\theta$$

$$= \sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}$$

由此可得如下

$\theta = 0$　時　$\sigma_{n\,max} = \sigma_x$　，　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　時　$\tau_{max} = \dfrac{1}{2}\sigma_x$

σ' 與 σ_n 及 τ 之間有如下之關係。

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

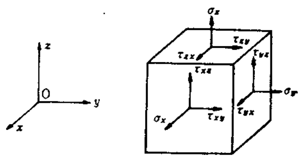
1・8 應力與應變之關係

(1) 二次元應力狀態

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau$$

(2) 三次元應力狀態



1・8 圖

（於剪分應力中，左邊文字是作用應力面，右邊是應力的方向）

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz},\ \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx},\quad \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy},\ \tau_{zx} = \tau_{xz},\ \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(3) 單位體積相當的增加量

$$e = \frac{V' - V}{V} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1$$

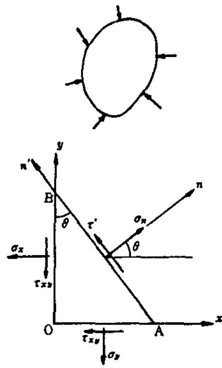
$$\fallingdotseq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(4) 體積彈性係數（bulk modulus）

$$e = -\frac{P}{K}$$（P：壓力，應力　　K：體積彈性係數）

1·9 二次元應力狀態

薄平板於其周圍板的平面內承受外力作用時，板內部所生應力的作用方向被包含於一切板的平面內，此狀態爲二次元應力狀態，或稱爲平面應力狀態。



1·9 圖

通過二次元應力狀態一點O有垂直相交座標軸 x，y，如1·9圖 研考其應力狀態，則 x 軸與面的法線成 θ 角，AB 面上的應力如下。

$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\tau'=(\sigma_y-\sigma_x)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

主應力面的方向以 $\tan 2\theta_n=\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$ 表示，

此時 $\tau'=0$， 主應力的大小爲（$\sigma_1>\sigma_2$）

$$\sigma_1,\ \sigma_2=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2}$$

主剪應力之大小及所生面的方向以下式表示。

$$\tau_{max}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

$$\tan 2\theta_t=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

1·10 莫爾應力圓(MOHR'S STRESS CIRCLE)

(1) 已知 σ_1 與 σ_2 時，試求 σ_1 方向與法線成 θ 角面的垂直應力剪應力。

$$\sigma_n=\sigma_1\cos^2\theta+\sigma_2\sin^2\theta\equiv\sigma$$

$$\tau'=-(\sigma_1-\sigma_2)\sin\theta\cos\theta=-\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}\sin 2\theta\equiv-\tau$$

由上式消去 θ 則

$$(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2$$

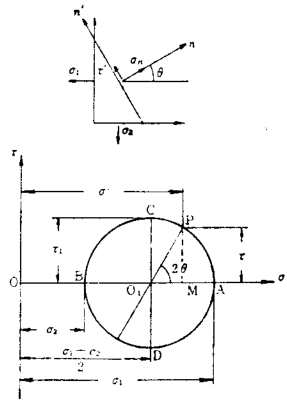
順序

1. 縱軸為 τ，橫軸為 σ。
2. $\sigma=\sigma_1$（A點），
   $\sigma=\sigma_2$（B點），（$\tau=0$）
3. 以 AB 為直徑畫圓。
4. 由點 A 逆時針迴轉，使
   $\angle AO_1P=2\theta$。

$\overline{OM}=\sigma$

$\overline{PM}=\tau$

$\overline{O_1C}=\tau_1$（最大剪應力）



1・10 圖

(2) 已知平面分應力為 σ_x，σ_y，τ_{xy} 時，試求那點之主應力 σ_1,σ_2 與主方向 θ_n。

$$\sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta\equiv\sigma$$

$$\tau'=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\equiv-\tau$$

由上式消去 θ 則

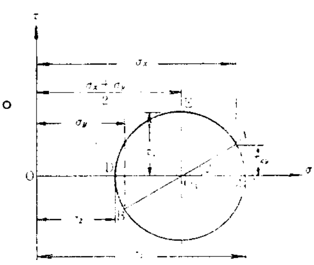
$$(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2+\tau=(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}$$

順序（1・11 圖）

1. 縱座標為 τ，軸座標為 σ。
2. 連接$A(\sigma_x,\tau_{xy})$,$B(\sigma_y,\tau_{xy})$求O_1。
3. 以 O_1 為圓心，通過 AB 畫圓。

$\angle AO_1M=2\theta_n$

$$(\because\ \tan 2\theta_n=\frac{2\tau}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\overline{MA}}{\overline{O_1M}})$$



1・11 圖

$\overline{OC}=\sigma_1$, $\overline{OD}=\sigma_2$（主應力　$\tau=0$）

$\overline{O_1E}=\tau_1$

(3) 已知平面分應力成σ_x，σ_y，τ_{xy}時，試求於此點任意方向θ的垂直應力，剪應力。

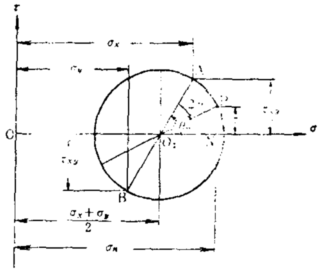
順序（1．12 圖）

1～3與(2)所述相同。

4. 由AB順時針方向使 $\angle AO_1P=2\theta$。

$\overline{ON}=\sigma_n$

$\overline{NP}=\tau$



1·12　圖

1·11　彈性常數間的關係

1·1 表

	G,ν	E,ν	E,G	G,K
縱彈性係數E	$2(1+\nu)G$			$\dfrac{9KG}{3K+G}$
橫彈性係數G		$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$		
卜易生比			$\dfrac{E-2G}{2G}$	$\dfrac{3K-2G}{6K+2G}$
體積彈性係數K	$\dfrac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)}$	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$	$\dfrac{EG}{3(3G-E)}$	

1·12　承受引張棒之應變能

(1) 長度l，相同斷面積爲A之棒，承受引張負荷P時，由於形變物體內部所儲存之位能稱爲應變能，以下式表示。

$$U=\frac{1}{2}P\delta=\frac{P^2 l}{2AE}=\frac{AE\delta^2}{2l}=\frac{\sigma^2 Al}{2E}$$

(2)單位體積相當之應變能

$$U_0=\frac{U}{Al}=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon=\frac{E\varepsilon^2}{2}=\frac{\sigma^2}{2E}$$

〔例1〕 斷面積 $50\,cm^2$，長度 20m，縱彈性係數 $E=2.0\times10^6\,kg/cm^2$ 的鋼棒，用 10 ton 之力引張時，試求：

(a) 伸長量。

(a) 應　力。

(c) 應　變。

〔解〕 (a) $\delta=\frac{Pl}{AE}=\frac{10000\times20\times10^2}{50\times2.0\times10^6}=0.2\,(cm)$

(B) $\sigma=\frac{P}{A}=\frac{10000}{50}=200\,(kg/cm^2)$

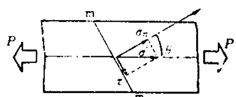
(C) $\varepsilon=\frac{\delta}{l}=\frac{0.2}{20\times10^3}=1\times10^{-5}$

10^2　1×10^{-4}

〔例2〕 在引張負荷 1000kg，斷面積 $20\,cm^2$ 的直棒中，試求引張方向與法線成 30° 斷面的軸向應力，垂直應力及剪應力。

〔解〕 與軸成直角斷面的應力，

$$\sigma_x=\frac{P}{A}=\frac{1000}{20}=50\,(kg/cm^2)$$



m－m斷面積 A'，

$$A'=\frac{A}{\cos\theta}=20\Big/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=23.1\,(cm^2)$$

$$\sigma'=\frac{P}{A'}=\frac{P}{A}\cos\theta=\sigma_x\cos\theta=50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=43.3\,(kg/cm^2)$$

…………………

$$\sigma_n = \sigma' \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta = 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 37.5(\mathrm{kg/cm^2}) \quad \cdots 答$$

$$\tau = \sigma' \sin\theta = \sigma_x \sin\theta\cos\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta = \frac{50}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 21.6(\mathrm{kg/cm^2}) \cdot 答$$

〔例3〕長1 m，直徑 10 cm 的圓棒用 3.14 ton負荷引張時，試求縱應變及引張後的直徑。縱彈性係數爲 $2\times10^6\mathrm{kg/cm^2}$，卜易生比爲0.3。

〔解〕
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{3140}{\frac{10^2}{4}\pi}\cdot\frac{1}{2\times10^6} = 2\times10^{-5},$$

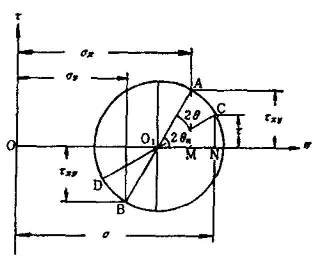
$$-\nu\varepsilon = \varepsilon_d = \frac{d'-d}{d}.$$

由上　$d' = (1-\nu\varepsilon)d = (1-0.3\times2\times10^{-5})10$

$$= (1-6\times10^{-6})10 = 9.99994(\mathrm{cm}) \quad \cdots\cdots\cdots 答$$

〔例4〕　已知平面應力平分 σ_x，σ_y，τ_{xy} 時，試求於那點任意方向 θ 的垂直應力，剪應力。

〔解〕



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{O_1M}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\theta_n$$

$$\overline{ON} = \overline{OO_1} + \overline{O_1N}$$

$$= \overline{OO_1} + \overline{O_1C}\cos(2\theta_n - 2\theta)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\ .$$

$$(\cos 2\theta_n \cos 2\theta + \sin 2\theta_n \sin 2\theta)$$

$$\overline{ON}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\left\{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}}+\frac{2\tau_{xy}\sin 2\theta}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_x)^2+4\tau_{xy}^2}}\right\}$$

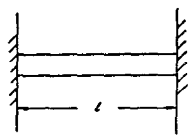
$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2x=\sigma_n$$

$$\overline{CN}=\overline{O_1C}\sin(2\theta_n-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}(\sin 2\theta_n\cos 2\theta-\cos 2\theta_n\sin 2\theta)$$

$$=\tau_{xy}\cos 2\theta-(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta=\tau$$

〔例 5 〕 如圖溫度 $t°C$ 時長 l 斷面相同的棒，使其固定於剛性壁，溫度自 $t_1°C$ 上昇至 $t_2°C$ 時，棒所生壓縮應力爲 $\sigma=\alpha E(t_2-t_1)$，試證明之。α 爲線膨脹係數。



〔解〕 溫度自 $t_1°C$ 升至 $t_2°C$ 時，棒之伸長量爲 $\delta=\alpha l(t_2-t_1)$，因此，棒的應變爲，

$$\varepsilon=\frac{\delta}{l}=\alpha(t_2-t_1)$$

由於剛性壁所生壓縮荷重 P 作用使其縮短 δ，如棒之原長爲 l，棒縮短 δ 所必要的力 P，

$$\frac{Pl}{AE}=\delta \qquad \therefore \quad P=\frac{AE}{l}\delta=AE\alpha(t_2-t_1)$$

因此棒所生應力爲，

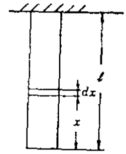
$$\sigma=\frac{P}{A}=\alpha E(t_2-t_1)$$

〔例6 〕 斷面積 A，長 l，比重 γ 的直棒上端固定，將它鉛直懸吊時，試求該棒由於本身重量之伸長量。縱彈性係數爲 E。

〔解〕 距棒下端 x 距離橫斷面的應力 σ，

$$\sigma = \frac{A\gamma x}{A}$$

研考距下端 x 距離的微小長度 dx，則 dx 部的引張應力視爲一定。dx 部的伸長 $d\delta$ 爲，



$$d\delta = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E}dx = \frac{\gamma x}{E}dx$$

棒全部的伸長量 δ 爲，

$$\delta = \int_0^l d\delta = \int_0^l \frac{\gamma x}{E}dx = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

將上式變形爲 $\dfrac{(A\gamma l)l}{2AE}$，則該式表示棒的重量的 $\dfrac{1}{2}$ 的力作用於棒下端的伸長。因此由於棒本身重量的伸長與其相同。

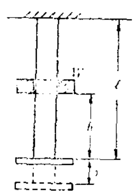
〔例7〕　玆有下端附剛體凸緣長 l 之棒，今由凸緣上面高 h 之處有重量 W 之錘落下時，試求由於衝擊之最大伸長。

〔解〕　假定衝擊時沒有能量損失，棒本身重量 W 比較，非常小則可以忽略。令棒之最大伸長爲 δ，若重量 W 所作之功 $W(h+\delta)$ 全部轉變爲棒的應變能則，

$$W(h+\delta) = \frac{AE\delta^2}{2l}$$

$$\delta^2 - \frac{2Wl}{AE}\delta - \frac{2Wlh}{AE} = 0$$

靜伸長爲　$\delta_{st} = Wl/AE$　所以，



$$\delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

$$\delta = \delta_{st} \pm \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st}h}$$

$$\delta > 0, \quad \therefore \quad \delta = \delta_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right)$$

〔例8〕　縱彈性係數 E，體積彈性係數 K，卜易生比 ν 間之關係　$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$　成立，證明之。