中国精算师资格考试用书

利息理论

主编　刘占国

中国财政经济出版社

中国精算师资格考试用书

利息理论

主　编　刘占国
副主编　李勇权
审　稿　李冰清

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

利息理论/刘占国主编．—北京：中国财政经济出版社，2006.11

中国精算师资格考试用书

ISBN 7-5005-9254-X

Ⅰ．利…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．利息-经济理论-资格考核-自学参考资料　Ⅳ．F032.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 083285 号

中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn

E-mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销

787×1092 毫米　16 开　12.25 印张　280 000 字

2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月北京第 1 次印刷

印数：1—5060　定价：29.00 元

ISBN 7-5005-9254-X/F·8038

（图书出现印装问题，本社负责调换）

中国精算师资格考试用书
编审委员会

总 序

1997年，由中国人民银行保险司牵头，开始筹划中国精算师资格考试体系的构建与考试教材的编写。当时中国寿险市场刚开始发展，市场只销售普通型产品，精算制度建设刚刚起步，在设计考试体系和考试内容时主要参考了北美、英国的资格考试体系。经过两年多的努力，2000年，中国精算师资格考试用书《利息理论》、《寿险精算数学》、《生命表的构造理论》、《风险理论与非寿险精算》和《寿险精算实务》陆续出版。1999年，中国保险监督管理委员会组织了中国首批精算师资格认证考试，其中有43名具有精算理论和实务背景的考生通过考试，获得了中国精算师资格。2000年12月，中国保监会组织了基于中国精算师资格考试体系的首次考试，中国精算师职业建设开始进入一个新的历史时期。

自2000年至今的6年中，中国精算师资格考试取得了长足的发展。到目前为止，已经设立了中国准精算师层次的全部9门考试和中国精算师层次的6门考试，在全国建立了15个考试中心，有13人通过考试获得中国精算师资格(共有56名中国精算师)，269人通过考试获得中国准精算师资格。在中国精算师职业发展的同时，中国的精算实践也取得了快速发展，以1999年发布《人身保险精算规定》为开端，在寿险业的共同努力下，中国保监会逐步建立了包括精算规定、精算责任人制度、精算报告、内含价值报告、生命表在内的较为完整的精算制度体系。这其中，在中国从事精算工作的精算人员起到了非常重要的作用。

随着中国保险业的发展以及精算师工作领域的不断扩展，参加中国精算师资格考试的人数不断增加，而第一版的考试用书在使用过程中逐渐发现了一些问题。因此，2005年开始启动修订计划。本次修订的教材包括《利息理论》、《寿险精算数学》、《风险理论》(将原书的风险理论部分独立出来)、《生命表基础》(原书名《生命表的构造理论》)和《寿险精算实务》。考试用书修订的宗旨是在不进行大的调整的基础上，对原考试用书进行完善，包括结构、内容、语句等，目的是给考生提供更为规范的考试用书。与此同时，中国保监会、中国保险行业协会精算工作委员会开始启动“中国精算师资格考试体系”研究课题，对考试体系、结构、内容进行深入研究，以中国精算理论与

实践为核心，结合国际精算理论与实践的发展，构建更为科学、全面的资格体系，这将是一项长期的系统工程。随着精算师工作领域的不断扩大，在精算师资格体系的建设过程中逐步突出精算在不同领域的应用，使精算师职业不断壮大。

本次修订得到了瑞士再保险公司和中国平安人寿保险股份有限公司的支持，在此表示感谢。

我们希望更多的有志之士投身于中国精算事业，也希望中国精算师职业的专业品质不断提高，为中国保险业、金融业以及中国社会保障的发展贡献力量。

中国精算师资格考试用书编审委员会

2006 年 7 月

前　言

《利息理论》是中国精算师资格考试体系中的第一门专业课程，希望考生通过本课程的学习，对于固定利率条件下货币的时间价值有比较深入的了解，并且为今后进一步学习精算课程打下良好的基础。

由于利息理论的内容与体系较为成熟，本次修订并未进行大的改动。考虑到原版的第七章不作为考试内容，以及本书是考试指定教材，所以在本次修订中将其删除。在此基础上，对书稿进行了全面的修订，对原书中的表述不准确问题、语句不通顺问题、习题问题等进行了修正。

本书的分工为：第一章由李勇权负责，第二、三、四章由刘占国负责，第五、六章由杨再贵负责。在此特别感谢审稿人李冰清的辛勤工作，感谢高秀萍、王双、庞立中、孙礼陵、郭士杰、张琳、魏维、张园园、梁增明等同学的帮助。

在本次修订中，虽然我们尽了努力，但书稿中难免还有很多的问题和不足，请读者予以指正。

编　者

2006 年 7 月于南开大学

目 录

第一章

利息的基本概念

本章主要内容：本章主要介绍利息理论的基础知识。其中第一节是对有关利息衡量的一些基本概念的说明，包括单利、复利、贴现率、名义利率和利息强度等。第二节结合金融实际，从投资的角度，对利息问题进行进一步的说明，并分别介绍了投资期的确定方法，以及未知时间、未知利率的求解方法。

本章主要词汇：积累函数　总量函数　折现函数　积累值　现值　利息金额　实际利率　单利　复利　实际贴现率　复贴现率　名义利率　名义贴现率　利息强度　价值等式　时间图　严格单利法　常规单利法　银行家规则

所谓利息，指的是在一定时期内，资金拥有人将资金的使用权转让给借款人后所得到的报酬。

理论上，资金和利息不必均为货币。例如，甲今日将100石麦子借给乙使用，一年后，乙归还105石，多出的5石麦子即为利息。另外，资金和利息也不必具有相同的形式。

在某种意义上，利息事实上也可看作是租金的一种形式，即借方向贷方支付的在一段时间内由于资金转让而使贷方不能使用该笔资金所引起的损失。上述两例均可这样理解。

尽管资金和利息均不必为货币，然而，在几乎所有的实际应用中，资金和利息都是用货币来表示的，本书的例题也不例外。

§1.1　利息度量

一般说来，任何一项普通的金融业务都可看作是投资一定数量的资金以产生一定量的

利息。因此，不考虑风险因素的话，利息的多少是衡量该项业务“好”“坏”的一个重要指标。这样，利息的度量就显得尤为重要了。

在给出利息的几个基本度量方式前，先引入几个基本概念：

我们把每项业务开始时投资的金额称为本金，而把业务在一定时间后回收到的总金额称为该时刻的积累值(或终值)。显然，积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

我们假定，一旦给定了本金金额，则在任何时刻的积累值均可确定，并假定在投资期间不再加入或抽回本金。也就是说，该投资在数额上的任何变化全部是由于利息的影响而造成的！当然，以后将放松这一假设而允许在投资期间增加或减少本金。

很显然，在上述假设下，决定积累值的两个主要的因素就是本金金额和从投资日算起的时间长度。理论上，时间长度可以用许多不同的单位来度量。例如日、周、月、季、半年、一年等。用来度量时间的单位称为“度量期”或“期”，最常用的期是年。以后除非另外声明，均可认为一个度量期为一年。

考虑投资一单位的本金，我们定义该投资在时刻 t 的积累值为积累函数 $a(t)$，显然，$a(0)=1$，并且 $a(t)$通常为单增函数。因为 t 增加时函数值减小意味着利息为负，这在实务中很少见。然而，也确实可能出现此种情况，一笔亏本的生意就意味着产生了负的利息；函数值为常数意味着利息为零，这种现象偶尔也会发生，比如无息贷款。

积累函数 $a(t)$有时也称做 t 期积累因子，因为它是单位本金在 t 期末的积累值。

通常 $a(t)$为连续函数，有时 $a(t)$也可能是间断的，例如利息只有到付息日时才产生的情形就是如此。一般情况下，本金金额不是一个单位，而是 k 个单位，这时我们定义一个总量函数 $A(t)$，它是本金为 k 的投资在时刻 $t\geqslant 0$ 时的积累值。

显然，$A(t)$与 $a(t)$仅相差一个倍数 k，即：

$$A(t)=k\cdot a(t) \tag{1-1}$$

于是，$A(t)$与 $a(t)$具有完全类似的性质。$a(t)$可看做是$k=1$时的总量函数。在许多情况下，积累函数与总量函数可以互相替换使用。

称积累函数 $a(t)$的倒数 $a^{-1}(t)$为 t 期折现因子或折现函数。特别地，把一期折现因子 $a^{-1}(1)$简称为折现因子，并记为 v。容易发现 t 期折现因子 $a^{-1}(t)$是为了使在 t 期末的积累值为 1，而在开始时投资的本金金额。事实上，将 $k=a^{-1}(t)$代入(1-1)式就有 $A(t)=k\cdot a(t)=a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$。

我们把为了在 t 期末得到某个积累值，而在开始时投资的本金金额称为该积累值的现值(或折现值)。显然，$a^{-1}(t)$是在 t 期末支付 1 的现值，在 t 期末支付 k 的现值为 $k\cdot a^{-1}(t)$。

在某种意义上，积累与折现是相反的过程，$a(t)$为 1 单位本金在 t 期末的积累值，而 $a^{-1}(t)$是在 t 期末支付 1 单位积累值的现值。

这里所说的“积累值”严格地只与该时点以前的款项有关；“现值”只与该时点以后的款项有关；而对于既可以与该时点以前的款项有关，又可以与该时点以后的款项有关的值，将使用“当前值”这个词。

把从投资日起第 n 个时期所得到的利息金额记为 I_n，则：

$$I_n=A(n)-A(n-1) \qquad 对整数\ n\geqslant 1 \tag{1-2}$$

注意，I_n 是指一个时间区间上所得利息的量，而 $A(n)$则是在一特定时刻的积累量。

1.1.1 实际利率

某一度量期的实际利率，是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资的本金金额之比。通常实际利率用字母 i 来表示。

实际利率 i 是利息的第一种度量方式，由定义可以看出，实际利率是一个没有单位的数，实务中常用百分数来表示；它与给定的时期有关；它其实是单位本金在给定的时期上产生的利息金额。从积累函数来看，

$$a(1)=a(0)+i=1+i \tag{1-3}$$

$$i=1+i-1=a(1)-a(0)=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I_1}{A(0)} \tag{1-4a}$$

对于有多个度量期的情形可以分别定义各个度量期的实际利率。这时，用 i_n 记从投资日算起第 n 个度量期的实际利率，则：

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A_{n-1}} \qquad n\geqslant 1 \text{ 为整数} \tag{1-4b}$$

显然(1-3)式和(1-4a)式中的 i 记为 i_1 更合适。

【例 1-1】 某人到银行存入 1000 元，第一年末他存折上的余额为 1050 元，第二年末他存折上的余额为 1100 元，问：第一年、第二年的实际利率分别是多少？

解： 显然 $A(0)=1000$

$A(1)=1050$

$A(2)=1100$

因此 $I_1=A(1)-A(0)=50$

$I_2=A(2)-A(1)=50$

$$i_1=\frac{I_1}{A(0)}=\frac{50}{1000}=5\%$$

$$i_2=\frac{I_2}{A(1)}=\frac{50}{1050}=4.762\%$$

因此第一年的实际利率为 5%，第二年的实际利率为 4.762%。

【例 1-2】 某人投资 1000 元于一年期证券上，该证券年实际利率为 10%。问：一年后，此人将得到的金额为多少？其中利息为多少？

解： $A(1)=A(0)(1+i)=1000(1+0.1)=1100$(元)

$I_1=A(1)-A(0)=100$(元)

故一年后，此人将得到 1100 元，其中 100 元为利息。

1.1.2 单利和复利

前面讨论的实际利率 i 是针对某一个度量期而言的，若投资期为多个或非整数个度量期，如何来进行利息的度量呢？

实务中有两种最重要的度量方式：单利和复利。

考虑投资一单位本金：

(1)如果其在 t 时的积累值为：

$$a(t)=1+i\cdot t \tag{1-5}$$

那么，我们就说该笔投资以每期单利 i 计息，并将这样产生的利息称为单利。

(2)如果其在 t 时的积累值为：

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1-6}$$

那么，我们就说该笔投资以每期复利 i 计息，并将这样产生的利息称为复利。

由上述定义可以发现：

(1)若以每期单利 i 计息，那么，在投资期间，每一度量期产生的利息均为常数 i。不过，这并不意味着其实际利率为 i。事实上，按上节定义，对于整数 $n\geqslant 1$，第 n 期的实际利率为：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{(1+in)-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}=\frac{i}{1+i(n-1)}$$

显然，i_n 关于 n 单调递减。也就是说，常数的单利意味着递减的实际利率。

(2)若以每期复利 i 计息，那么，在投资期间，不同时期将产生不同量的利息。事实上，

$$I_n=a(n)-a(n-1)=(1+i)^n-(1+i)^{n-1}=i\cdot(1+i)^{n-1}=i\cdot a(n-1)$$

这里讨论的是单位本金，所以这里用的是 $a(n)$ 而不是 $A(n)$，显然，I_n 关于 n 单调递增。而对于每期的实际利率，有：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{I_n}{a(n-1)}=i$$

上式表明，常数的复利意味着常数的实际利率，而且两者是相等的！这样，虽然定义不同，其实复利利率与实际利率是一致的。

比较单利和复利可以发现，单利具有这样的性质：利息并不作为投资资金在以后的时期再赚取利息；而对复利来讲，在任何时候，本金和到该时为止得到的利息，总是用于投资以赚取更多的利息，也就是民间所说的“利滚利”。

由积累函数看，相同数值的单利和复利相对于不同的时期会有不同的关系：对于单个度量期，它们产生的结果是相同的；对于较长时期，由于 $t\geqslant 1$ 时有 $(1+i)^t\geqslant 1+it$，所以复利比单利产生更大的积累值；而对于较短时期则相反，因为 $t\leqslant 1$ 时，$(1+i)^t\leqslant 1+it$。证明留作练习。

单利和复利的另一个差别是它们的增长形式不同。就单利而言，它在同样长时期增长的绝对金额为常数；而对复利来说，它增长的相对比率保持为常数。用符号来说明，就是：

对单利，有：

$$a(t+s)-a(t)=s\cdot i$$

即，t 时至 $t+s$ 时赚得的利息与 s 成正比，而不依赖于 t。

对复利，则有：

$$\frac{a(t+s)-a(t)}{a(t)}=(1+i)^s-1$$

与 t 无关。

实务中，期限达到或超过一个度量期的长期金融业务几乎全部使用复利，较短期的业务也常用复利；单利只是偶尔在短期业务中使用。单利有时也用做复利在非整数时期内的

近似。除非特别声明，我们均用复利而不是单利。

【例 1－3】 某银行以单利计息，年息为6%，某人存入5000元，问5年后的积累值是多少？

解： $A(5)=5000\cdot a(5)=5000(1+5\times6\%)=5000\times1.3=6500$(元)

即5年后的积累值为6500元。

【例 1－4】 如果上述银行以复利计息，其他条件不变，重解上例。

解： $A(5)=5000\cdot a(5)=5000(1+6\%)^5=6691.13$(元)

即5年后的积累值为6691.13元。

【例 1－5】 已知年实际利率为8%，求4年后支付10000元的现值。

解： 由于 $i=8\%$，故

$$a(4)=(1+8\%)^4$$

从而现值

$$PV=10000\cdot a^{-1}(4)=10000/(1+8\%)^4=7350.3(\text{元})$$

即4年后支付10000元的现值为7350.3元。

1.1.3 实际贴现率

一个度量期的实际贴现率为该度量期内取得的利息金额与期末的投资可回收金额之比。通常用字母 d 来表示实际贴现率。

可以看出，实际贴现率 d 与实际利率 i 的定义十分类似。事实上，它们都是一个比例数，而且都是“利息”除以“投资金额”，只不过实际利率 i 对应的“投资金额”是在期初实际付出的资金金额，即“本金”；而实际贴现率 d 对应的“投资金额”是在期末投资者可收回的资金金额。

类似(1－3)和(1－4a)式，有：

$$v=a^{-1}(1)=1-d \tag{1-7}$$

$$d=1-(1-d)=1-a^{-1}(1)=\frac{a(1)-1}{a(1)}=\frac{a(1)-a(0)}{a(1)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(1)}=\frac{I_1}{A(1)} \tag{1-8a}$$

为了帮助理解，我们来看一个例子。假设张三到一家银行去，以年实际利率6%向银行借100元，为期1年。则银行将付给张三100元；1年后，张三将还给银行贷款本金100元，外加6元的利息，共计106元。

假如不是以年实际利率6%而是以年实际贴现率6%向银行借100元，为期1年，则银行将预收6%(即6元)的利息，而仅付给张三94元。1年后，张三将还给银行100元。

由以上例子可以看出，实际利率其实是对期末支付的利息的度量，而实际贴现率则是对期初支付的利息的度量。

值得注意的是，在贴现率中使用的“支付”一词并非通常意义下的支付，因为借款者并没有直接按利率来“付”利息，而是预先按利率“扣除”利息。其实这在结果上与首先借到全部金额、然后借款者立即支付利息并没有什么不同。

在实际贴现率定义中的“利息金额”有时也被称做“贴现金额”。在包含贴现率的场合，这两个词是通用的。但是，我们应该注意到它们的区别：由(1－8a)我们有 $I_1=A(1)\cdot d$，即贴

现金额 = 期末可收回资金金额 × 贴现率；而由(1 - 4a)有 $I_1 = A(0)\cdot i$，即利息金额 = 期初投资金额 × 利率。

类似于实际利率，也可以定义任意度量期的实际贴现率，令 d_n 为从投资日算起第 n 个时期的实际贴现率，根据定义，有：

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \qquad \text{对整数 } n \geqslant 1 \tag{1-8b}$$

这里，I_n 可称为"贴现金额"或"利息金额"。一般来说，像 i_n 一样，d_n 也可能随不同的时期而变化。然而，在复利假设下，如果实际利率是常数，那么，实际贴现率也是常数。事实上，若每期实际利率为 i，那么，对任意正整数 n，有：

$$a(n) = (1+i)^n$$

$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} = \frac{i}{1+i}$$

与 n 无关，为常数，通常把这种情况下的贴现叫做"复贴现"，这是类似于"复利"的一个术语。

【例 1-6】 重新考虑例 1-1 中存款，所述的事件不变，求第一、第二年的实际贴现率是多少？

解： $d_1 = \dfrac{A(1) - A(0)}{A(1)} = \dfrac{50}{1050} = 4.762\%$

$d_2 = \dfrac{A(2) - A(1)}{A(2)} = \dfrac{50}{1100} = 4.55\%$

实际利率和实际贴现率都是用来度量利息的。任何一笔业务，都可以分别用它们来度量。如前面所举例子，张三以实际贴现率 6% 借款 100 元，事实上他得到 94 元，而在 1 年后还款 100 元。这里，我们是用实际贴现率来度量这笔业务的，即这笔业务的年实际贴现率为 6%。如果用实际利率来度量这笔业务，那么，可以这样看待该业务，张三实际借款 94 元，1 年的利息为 6 元。于是，年实际利率为 $\frac{6}{94} = 6.383\%$，即这笔业务的年实际利率为 6.383%。同样一笔业务，如果用不同的方式进行度量，那么相应就有不同的数值。实务中，对利息的度量有许多不同的方式，这就意味着我们将不可避免地要进行不同"率"之间的比较。为此，我们引入如下"等价"的概念。

如果对给定的投资金额，在同样长的时期内，它们产生同样的积累值，则称两个"率"是"等价"的。

这里，"率"一词既可为"利率"，也可为"贴现率"，也可以是利息的任意度量方式。

显然，同一笔业务由不同的度量方式而得出的不同的"率"是等价的。于是，年实际贴现率 6% 与年实际利率 6.383% 等价。一般地，若某人以实际贴现率 d 借款 1，则实际上的本金为 $1 - d$，而利息(贴现)金额为 d，若这笔业务的实际利率为 i，则有：

$$i = \frac{d}{1-d} \tag{1-9}$$

这表明，与实际贴现率 d 等价的实际利率为 $\frac{d}{1-d}$。将该式进行简单的代数变形，有：

$$i - id = d \tag{1-10}$$

$$d(1+i) = i \tag{1-11}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{1-12}$$

即，与实际利率 i 等价的实际贴现率为$\frac{i}{1+i}$。

贴现率 d 和折现因子 v 之间也存在着重要的关系。由(1-12)式知：

$$d = iv \tag{1-13}$$

对上式，我们可以这样理解：以贴现率 d 投资 1 赚得的、在期初支付的利息是 d，如果该笔业务以利率度量，且等价的实际利率为 i，也就是说，这种业务如果投资 1 将在期末赚得利息 i。而 i 在期初的现值为 iv，这个值显然应该等于 d。

由(1-13)式，还有：

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v \tag{1-14}$$

或

$$v = 1 - d \tag{1-15}$$

显然，上式两端均可看成是期末支付 1 的现值。

另外，由于

$$d = iv = i(1-d) = i - id \tag{1-16}$$

有：

$$i - d = id \tag{1-17}$$

上式也可理解为：某人可以借款 1 而在期末还 $1+i$；也可以借$1-d$而在期末还 1。两种选择本金的差为 d，因此，利息差应为 id，而实际上两种选择的利息差为 $i-d$，于是有(1-17)式。

我们讨论的贴现率通常都是指复贴现。当然，也可类似于定义单利那样来定义单贴现。即：考虑这样一种情况，每一时期所得的贴现金额为常数。于是，在 t 时，产生积累值 1 的原始本金应为：

$$a^{-1}(t) = 1 - dt,\ 0 \leqslant t < 1/d \tag{1-18}$$

这里，为了保证 $a^{-1}(t) > 0$，而要求 $0 \leqslant t < 1/d$。这种情况下的贴现就称为单贴现。

单贴现与复贴现显然是不一样的。因为对复贴现，有：

$$a^{-1}(t) = v^t = (1-d)^t,\ t \geqslant 0 \tag{1-19}$$

类似于对利率的讨论可以发现，常数的复贴现率意味着常数的实际贴现率，事实上，由于：

$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1-d)^{-n} - (1-d)^{-(n-1)}}{(1-d)^{-n}} = 1 - (1-d) = d$$

因此，复贴现率与实际贴现率其实是一致的。

如果单贴现率为常数 d，那么，由实际贴现率的定义，有：

$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1-nd)^{-1} - [1-(n-1)d]^{-1}}{(1-nd)^{-1}} = 1 - \frac{1-nd}{1-(n-1)d} = \frac{d}{1-(n-1)d}$$

显然，此时实际贴现率是单增的。