21世纪高职高专数学系列教材

高等数学学习指导

（第一册）

李乐成 侯谦民 李颖颖 主编

GAO DENG SHU XUE XUE XI ZHI DAO

华中科技大学出版社

21 世纪高职高专数学系列教材

高等数学学习指导

（第一册）

主编　李乐成　侯谦民　李颖颖
主审　安志鹏　朱永银

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导(第一册)/李乐成　侯谦民　李颖颖　主编
武汉:华中科技大学出版社，2002 年 9 月
ISBN 7-5609-2778-5

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①李…　②侯…　③李…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O13

21 世纪高职高专数学系列教材
高等数学学习指导(第一册)　李乐成　侯谦民　李颖颖　主编

策划编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任编辑:徐正达　柯　贝
责任校对:封春英　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印　　刷:荆州市今印印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:6　字数:137 000
版次:2002 年 9 月第 1 版　印次:2002 年 9 月第 1 次印刷　印数:1—9 000
ISBN 7-5609-2778-5/O・264　定价:8.50 元

内 容 简 介

本书是“21世纪高职高专数学系列教材”之一，内容与《高等数学（第一册）》同步，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分和定积分及其应用等五章. 每章按内容提要、疑难解析、范例讲评、习题选解、综合练习五部分编写. 书末附有三套综合测试题，供选用. 综合练习和综合测试题均附有答案.

本书可作为高职高专学生学习高等数学的辅导书，也可作为“专升本”的应试指导书，还可以作为工科大学生、成人高校学生及自学者学习和教师教学的参考书.

21世纪高职高专数学系列教材
编审委员会

序

在“21世纪高职高专数学系列教材”即将出版之际，我谈几点意见，作为这套系列教材的序.

高等职业教育的出现是我国高等教育改革发展中的大事. 高职应该办好，办出特色，真正培养出高素质的综合型、应用型人才. 近来报纸上有很多讨论有关问题的文章，其中提到在发达国家高级技工的比例占到40%，而我国只有百分之几. 这一现象已经严重地影响了国民经济的发展. 高职院校虽然不是培养高级技工的场所，但它培养的各类技术人才，将会弥补这个不足，使“高学历”人才与“应用型”人才的比例趋向合理. 目前有一种追求“高学历”教育的倾向，用一句话来概括，就是中国的高等教育重心偏高. 有一种流传很广的成见，认为“高学历等于高质量”，实践证明这是不对的. 过分强调高学历，反而会造成有限教育资源的极大浪费.

近年来，人们又开始讨论所谓高等教育大众化的问题. 高等教育由以前的“精英教育”向“大众化教育”转变，这是高等教育发展的必然结果. 这样一来，不免使人怀疑，便有了这是不是以数量换质量的说法. 由于进入高等学校的学生越来越多，录取分数线一定会下降，这也会引起人们的疑惑：入学分数较低的学生的质量是不是一定就差？这种误解与“高学历等于高质量”的性质是相同的. 教育的功能在于，能用有限的资源把更多的学生提高到

更高的水平．因此，我提出这样一个问题：怎样根据高职教育的性质与实际可能将高等职业教育搞得更好、更有特色？怎样利用我们的有限的资源，培养出更多的合格人才？做到了这一点就是高质量的教育．正是从这点出发，我在多种场合中提到了“必需、够用”和“易教易学”两个标准．对于这一点，如果说在微积分基础方面比较容易做到的话，那么要在以后较高层次的专业数学方面做到就难多了．如果前面基础课的内容讲得很少，似乎皆大欢喜，但到后来学习专业数学，知识就不够用了．反之，对前面的基础课程提出了不合理的过高的要求，学生们接受不了，也就谈不上再学习后续内容了．所以，还是重申那两句话：“必需、够用”与“易教易学”．我知道，这是很不容易达到的标准．如果说我这些年来从事教学工作还有一些体会的话，那就是办教育不能说空话．许多事，说起来容易，但做起来就难了，只有经过多年的实践才知道其艰辛．正因如此，我愿对这套系列教材的作者们孜孜不倦的努力，对他们编出“精品”教材、为培养 21 世纪的高素质人才做贡献的精神，表示我的敬意．也希望他们继续努力，做得更好．

齐民友

2002 年 5 月 5 日

于武汉大学

前　言

数学是研究数量关系与空间形式的科学，是科学技术人才科技素质的重要组成部分．随着计算机技术等高科技的普及和发展，数学的重要性日益显现．为了提高学生的数学素质，结合高职高专学生的特点，针对高职高专教育的目标——培养高层次、复合型、实用型人才，湖北省高职高专数学研究会与华中科技大学出版社联合组织出版了这套“21世纪高职高专数学系列教材”，第一批推出的有《高等数学（第一册）》、《高等数学（第二册）》、《线性代数》、《积分变换》、《高等数学学习指导（第一册）》、《高等数学学习指导（第二册）》等六本．本系列教材保持传统体系，简略理论推导，强调实际应用，渗透建模思想，突出思路分析，强化综合训练；在叙述中注重文字简练，概念准确，由浅入深，引人入胜；力求使学生掌握所学知识，提高应用数学知识的能力，为将来的激烈竞争插上“坚强的翅膀”．

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分和定积分及其应用．每章按内容提要、疑难解析、范例讲评、习题选解和综合练习等五个部分编写．

全书由李乐成、侯谦民、李颖颖担任主编，安志鹏、朱永银担任主审，郭文秀、盛集明、张生杰、罗银舫、熊帮禄担任副主编．参加编写的还有康希祁、熊桂芳、吴章文、山军、吴利斌，全书由李乐成、朱永银统稿．

武汉大学前校长、全国著名数学家齐民友教授欣然作序，为本系列教材增色不少；武汉大学费浦生教授审阅了本系列教材的部分内容，提出了许多宝贵意见．本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果．在此一并致谢．

荆门职业技术学院、武汉职业技术学院、三峡大学职业技术学院（葛洲坝）、长江职工大学、长江职业学院、武汉电力职业技术学院、湖北经济管理干部学院、沙洋师范高等专科学校、湖北商业高等专科学校、汉口职业技术学院、黄冈职业技术学院、三峡大学职业技术学院（宜昌）、武汉警官职业技术学院、武汉工交职业技术学院、湖北函授大学为本系列教材的出版发行给予了积极的支持，在此表示由衷的感谢．

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者提出批评建议，以便再版时修订，使本书日臻完善．

编　者

2002 年 5 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

内 容 提 要

一、主要内容

函数的概念，函数的几种特性；基本初等函数、复合函数与初等函数的概念；数列极限与函数极限的定义，极限的运算法则，无穷小与无穷大的概念，两个重要极限；函数的连续性概念与函数的间断点；闭区间上连续函数的性质.

二、连续与极限及有关概念的关系

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\begin{cases}\text{数列极限 }\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A;\end{cases}\\ \\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A,\\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A,\\ \text{连续}\quad\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).\end{cases}\end{cases}$$

当 $A=0$ 时，$f(x)$是无穷小；当 $A=\infty$时，$f(x)$是无穷大；如果 $f(x)$是无穷小（或无穷大），且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大（或无穷小）.

三、几个常用的基本极限

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} C=C$ (C 为常数).　　2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^a}=0$ (a 为正常数).

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m,\\ 0, & \text{当 } n>m,\\ \infty, & \text{当 } n<m,\end{cases}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是常数，且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

四、有关函数连续性的主要结论

1) 基本初等函数在其定义域内是连续的.

2) 一切初等函数在其定义区间内是连续的.

3) **最大最小值定理**　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

4) **介值定理**　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在此区间的端点上取不同的函数值：$f(a)=A$ 与 $f(b)=B$，则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 x_0，使 $f(x_0)=C$.

疑难解析

一、函数的概念

1. 函数的要素

函数定义中包含定义域、对应关系和值域三个要素. 前两者缺一不可，起着决定作用；而值域随之确定. 因此，关于两个函数相

等，应理解为两个函数的定义域和对应规律完全相同．就是说，一个函数的形成是由两个变量的对应关系和定义域来确定的，与两个变量取什么样字母无关．如

$$y=x^2\quad(-\infty,+\infty)\quad 与\quad u=v^2\quad(-\infty,+\infty)$$

两个函数就是相同的，尽管所用的字母不同，但它们的对应关系相同，定义域也一样．

2. 函数与函数值的联系与区别

例如：$f(x)$是表示函数的记号，是一个变量；而$f(a)$则表示该函数在自变量x取a值时所对应的函数值，它是一个定值．特别注意：在计算分段函数的函数值时，要根据自变量所在的范围，用相应的表达式来计算．

3. 函数的定义域的确定

确定函数定义域，一般常用到的原则有以下几个：

1）偶次根式的函数，其根号下的值不能为负；

2）分式函数，其分母不能取零值；

3）有限个函数经四则运算所构成的函数，其定义域是这有限个函数的定义域的交集；

4）对数的真数必须取正值；

5）复合函数$y=f[g(x)]$的定义域，总是中间变量$u=g(x)$定义域的子集；

6）由实际问题所确定的函数定义域，要根据实际问题的意义确定．

4. 分段函数

当用解析式表示函数时，也不限于只用一个式子．在自变量不同的变化范围内用不同解析式来表示的分段函数，在整个定义域上仍表示一个函数，而不能看作几个不同的函数．对于这一点，初学者往往弄错，要注意．

分段函数的定义域为各分段式子定义域的并集．

5. 函数奇偶性的判断

要判断一个函数 $y=f(x)$ 是偶函数还是奇函数，先应考察 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称. 如果说是关于原点对称的，就要计算 $f(-x)$. 可能会得出三种结果：1) 若结果等于 $f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；2) 若结果等于 $-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；3) 若结果既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

6. 反函数

反函数的本质是它所表示的对应规律，至于用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的. 我们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y=f^{-1}(x)$.

求反函数的步骤是：先从函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再置换 x 与 y，就得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的. 但要注意，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线. 用这个结论可帮助我们记忆一些函数的图形. 如，$y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 互为反函数，它们的图形是关于 $y=x$ 对称的.

7. 复合函数

并非任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 一般地，当内层函数 $u=g(x)$ 的值域全部或部分包含在外层函数 $y=f(u)$ 的定义域内时，这两个函数才可以复合成一个复合函数. 把一个复合函数分解成若干个较简单的函数，一般应遵循的原则是，使分解后所成的每一个函数都是基本初等函数或是它们的和、差、积、商.

8. 初等函数与分段函数

初等函数是由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的并且可以由一个式子表示的函数. 分段函数虽在自变量的不同范围用不同的式子表达，但不能肯定说它不能用一个表达式表示. 因此，不能说分段函数一定不是初等函数.

如 $f(x)=|x|$ 通常写成分段函数的形式，即

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

但 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，因此，这个分段函数是一个初等函数.

一般地，如果分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\ h(x), & c<x\leqslant d,\end{cases}$ 而 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是初等函数表达式，且 $g(c)=h(c)$，则分段函数 $f(x)$ 是一个初等函数. 事实上，

$$f(x)=g\left(\frac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+h\left(\frac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-g(c).$$

二、函数的极限

1. 数列 x_n 收敛于 a，其趋于 a 的方式

如果数列 x_n 收敛于 a，其趋于 a 的方式可以从 a 的左边、也可以从 a 的右边、亦可以忽左忽右地趋于 a，甚至可在这过程中无穷多次地达到 a，$x_n=1+\frac{1+(-1)^n}{n}$ 就是一例.

2. 如果 x_n+y_n 收敛，x_n 与 y_n 的敛散性

如果 x_n+y_n 收敛，则不能断定 x_n 与 y_n 都收敛. 例如：$x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$，它们的和 $x_n+y_n=0$ 收敛，但 $x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$ 都发散.

3. 如果 x_ny_n 收敛，x_n 与 y_n 的敛散性

如果 x_ny_n 收敛，则不能断定 x_n 与 y_n 都收敛. 例如：$x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$，它们的积 $x_ny_n=-1$ 收敛，但 x_n 与 y_n 都发散.

4. 如果 x_n 收敛，y_n 发散，x_n+y_n 和 x_ny_n 的敛散性

如果 x_n 收敛，y_n 发散，则 x_n+y_n 一定发散. 因为，若 x_n+y_n 收敛，则 $y_n=(x_n+y_n)-x_n$ 收敛，这与 x_n+y_n 收敛相矛盾.

但是，如果 x_n 收敛，y_n 发散，则 x_ny_n 可能收敛，也可能发散. 例如：$x_n=1$，$y_n=(-1)^{n+1}$，它们的积 $x_ny_n=(-1)^{n+1}$ 发散，而 $x_n=$

1 收敛，$y_n=(-1)^{n+1}$发散；又如：$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=n$，它们的积 $x_ny_n=1$ 收敛，而 $x_n=\frac{1}{n}$ 收敛，$y_n=n$ 发散.

5. 数列 $|x_n|$ 和数列 x_n 的同敛散问题

数列 $|x_n|$ 不和数列 x_n 同敛散. 若数列 x_n 收敛，则数列 $|x_n|$ 也收敛. 但，数列 $|x_n|$ 收敛，则数列 x_n 不一定收敛，例如 $x_n=(-1)^n$，显然，$|x_n|$ 收敛，但 x_n 不收敛.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4\cdots+n}{n^2}$ 的求法

以下求法不对：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4\cdots+n}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.\end{aligned}$$

因为，和的极限等于极限之和只适用于有限项，且无限个无穷小之和不一定是无穷小. 正确的求法为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

7. 函数极限

关于函数极限，应注意两点：

1) 定义中 $x\to x_0$ 考察的是 $f(x)$ 在 x_0 附近的变化趋势，而与在点 x_0 函数的情况可以没有关系.

2) 对于自变量 $x\to x_0$ 变化的方式，x 可以从 x_0 的左侧或右侧或左右两侧(即忽左忽右)以任意方式接近于 x_0，这时都能使 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A.

8. 单侧极限

一般来说，$f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 不一定相等，而只有当函数的极限存在时，才有 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$. 并有结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存