二十一世纪全国高职高专规划教材

高等数学（下）

（理工类）

主编　方建印

华东师范大学出版社

二十一世纪全国高职高专规划教材

高等数学(下)

(理工类)

主　编　方建印
副主编　饶明贵　原新凤
编　委　张素玲　吴恺中　严广松
赵呈建　邓书显

华东师范大学出版社

前　言

随着现代科学技术的发展，数学的重要地位显得日益突出．数学已不仅是一种工具，而且是一种理性思维模式；不仅是一种知识，也是一种科学素养．如何通过数学的学习，提高和加强专业素养，这是当前数学教学改革中的一个重要课题．本书是“二十一世纪全国高职高专规划教材”系列用书之一，根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写而成．

在本书的编写过程中，作者总结多年以来从事高职高专高等数学教学经验，遵循高职高专教材的编写原则和高职高专人才培养目标要求；充分体现了“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，注重培养学生的数学思维和兴趣及运用数学思想解决实际问题的能力．本书内容丰富，难易适当，重点突出，可供不同程度的学生选用，并有利于因材施教．在内容编排上，概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，淡化结论及定理的推导和证明；但十分注重通过几何意义、物理意义和实际背景来诠释基本概念、基本定理等基础理论知识；内容深入浅出，难点分散，论证简明，易于教，便于学．

本书分上、下两册，上册包括函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数和空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数，共十一章；下册的内容为：行列式、矩阵、线性方程组、特征值、特征向量及二次型、线性规划、随机事件与概率、随机变量、参数估计与假设检验、方差分析与回归分析、正交试验设计共十章．在下册中还以附录的形式介绍了 Mathematica 数学软件的有关知识，每册书末均附有各章同步强化练习的参考答案或提示，供师生在教学中参考．

本书主要适用于工科类高职高专各专业，还可以供经管类各专业使用以及作为“专升本”考试教材或参考书．

本套书由方建印任主编，饶明贵、原新凤任副主编．

参加本书编写的有：方建印（上册第九、十；下册第四、五章），饶明贵（上册第七、八章），原新凤（上册第十一章；下册第六、七、八章），张素玲（上册第四、五、六章），吴恺中（上册第二、三章），严广松（上册第一章），赵呈建（下册第一、二、三、十章），邓书显（下册第九章及附录）．吴海华、董金超、路允芳也参加了本书的编写工作．

原新凤，吴海华，董金超参加本套书的校对和统稿．

由于编者水平有限，加上编写任务大，时间仓促，本书若有考虑不周或错误的地方，我们希望得到专家、同行和广大读者的批评指正，使本书在教学实践的过程中不断完善．

本书在编写的过程中，得到了有关方面的大力支持．华东师范大学出版社的编辑为本教材的编辑和出版付出了大量的时间和精力，在此我们表示衷心的感谢！

编　者

内容摘要

本书是高等学校规划教材，是根据《高职高专教育高等数学课程基本要求》编写而成的。全书分为上、下两册，本书是下册，主要分为线性代数、线性规划、概率统计等等方面的知识，共十章，书末附有习题答案或提示。本书将教材与辅导融为一体。例题、习题内容丰富，难易适当，重点突出。

本书主要适合于工科类高职高专各专业，也可供经管类各专业使用，还可以作为“专升本”升学考试的教材或参考书。

目　　录

第一章　行列式

行列式是线性代数中的重要概念之一，也是一个重要的数学工具，在数学的许多分支和工程技术及经济管理中有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算，最后给出利用行列式求解一类特殊线性方程组的方法 —— 克莱姆(Cramer) 法则.

第一节　n 阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法求解得，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，(1 − 1) 式的解为：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引入下面记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-2}$$

称之为**二阶行列式**，其中横排叫做**行**，纵排叫做**列**，$a_{ij}(i,j = 1,2)$ 称为行列式 (1 − 2) 的**元素**，i 为**行标**，j 为**列标**. 二阶行列式(1 − 2) 的运算结果为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

方程组(1 − 1) 的解可用二阶行列式表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则线性方程组(1 − 1) 的解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

利用二阶行列式可定义三阶行列式为下列三项的代数和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1-3}$$

它的每项是原三阶行列式中第一行的元素与划去该元素所在的行和列后的二阶行列式之积，每项的符号为$(-1)^{1+j}$，其中j为该元素所在的列数$(j=1,2,3)$.

(1－3) 式的进一步运算结果如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1-4}$$

三阶行列式的代数和，也可以绘图(图 1-1) 的方法记忆，其中实线联接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联接的三个元素的乘积是代数和的负项.

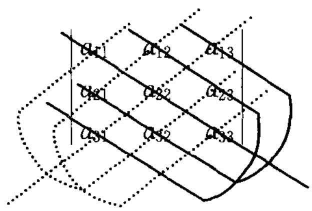

图 1-1

例如：

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times4\times1+(-1)\times(-1)\times(-1)+1\times2\times2 - 1\times4\times(-1)-(-1)\times2\times1-3\times(-1)\times2 = 27.$$

二阶行列式由二行二列共 2^2 个元素组成，三阶行列式由三行三列共 3^2 个元素组成，n 阶行列式由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成. n 阶行列式的值可由定义 1 确定.

【定义 1】 若 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式的降阶定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \tag{1-5}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,3,\cdots,n \text{ 是列号.}$$

(1－5) 式的右端是 n 项的代数和，而且它的每一项是 n 阶行列式中第一行的元素与划去该元素所在的行和列后剩余元素按原顺序排列的 $n-1$ 阶行列式乘积，每项的符号由 $(-1)^{1+j}(j=1,2,3,\cdots,n)$ 确定.

【例 1】　试用行列式的定义，求行列式 D 的值.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

【解】　由行列式的降阶定义

$$D=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=15(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-77.$$

【例 2】　试用行列式的定义计算行列式 D 的值.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式称为**下三角行列式**，从行列式左上角到右下角线上的元素称为**主对角线上元素**，即 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$. 该行列式的特点是主对角线以上元素全为零.

【解】　连续使用行列式的降阶定义有

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

类似地,下面行列式称为**上三角行列式**,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其值也等于主对角线上元素乘积,即 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

形如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**主对角行列式**,其值为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

【例 3】 证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

从行列式右上角到左下角线上的元素称为**次(副)对角线上元素**.

【证】 由行列式的降阶定义

$$D=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4n-3} & a_{4n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-3} & a_{nn-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,次对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

第二节　行列式的性质

利用行列式定义计算行列式的值是很繁琐的，为此，需要讨论行列式的性质.

将行列式D的行与列互换后得到新的行列式称为D的**转置行列式**，记作D^T或D'.

例如：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad 则\ D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【性质 1】　行列式转置后，其值不变. 即

$$D = D^T.$$

该性质说明对行列式的“行”成立的性质对“列”也同样成立，反之亦然.

【性质 2】　互换行列式两行(列)的元素，行列式的值变号.

通常以r_i表示行列式的第i行，以c_i表示第i列，交换i,j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$，而交换i,j两列，记作$c_i \leftrightarrow c_j$.

【推论】　若行列式中有两行(列)对应元素相等，则行列式的值为零.

【证】　互换行列式D中对应元素相等的两行，则$D = -D$，故$D = 0$.

【性质 3】　行列式中某一行(列)的所有元素都乘以同一数k，等于数k乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第i行(列)乘以k，记作$kr_i(kc_i)$.

【推论 1】　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

【推论 2】 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

【推论 3】 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则行列式的值为零.

【性质 4】 如果行列式中某一行(列)各元素均为两项之和,则行列式可以表示为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【性质 5】 把行列式任一行(列)的元素同乘以一个常数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【证】 由性质 4 和性质 3 的推论 3 得证.

性质 5 是简化行列式的基本方法,若用数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上,简记为 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

以上性质除已证明之外,其余性质的证明从略.

【例 1】 证明上三角行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【证】 可由性质 2 和本章第一节的例 2 得证.

【例 2】　计算行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+c & a & a \\ a & a & a+d & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix}.$$

【解】　把第 4 行乘以(－1) 分别加到前三行上得

$$D\xlongequal[(k=1,2,3)]{r_k-r_4}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ a & a & a & a \end{vmatrix}=abcd.$$

【例 3】　计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

【解】　$$D\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_1+r_k}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{c_k-c_1}[x+(n-1)a]\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

第三节　行列式的计算

仅有行列式的性质进行计算是不够的，下面给出行列式的展开定理，两者结合

起来能解决更多的行列式的问题.

【定义 1】 在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列元素,余下元素按原来顺序排列构成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为**元素 a_{ij} 的余子式**,记作 M_{ij},并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为**元素 a_{ij} 的代数余子式.**

如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

中元素 -1 的代数余子式为 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-8.$

【定理 1】(展开定理) n 阶行列式 D 等于它任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \tag{1-6}$$

(证明略)

【推论】 n 阶行列式 D 任意一行(列)的所有元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0(i\neq s)$$

或
$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0(j\neq t). \tag{1-7}$$

下面利用行列式的性质和展开定理进行行列式的计算.

【例 1】 计算行列式 D 的值:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

【解】 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1-3c_2]{} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

【例 2】 计算行列式 V 的值：

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

【解】

$$V \xlongequal[r_3-a_1^2r_1]{r_2-a_1r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

注：当 V 是 n 阶行列式时，有

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1}(x_i - x_j), \qquad (1-8)$$

其中记号“$\prod$”表示$(x_i - x_j)$的全体同类因子的乘积，此行列式是著名的**范德蒙德(Vandermonde)行列式**.

【例 3】 计算行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

【解】 将行列式按第 1 列展开

$$D = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+ b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

【例 4】 设多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix},$$

试求 $f(x)=0$ 的根.

【解】 $$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-3c_1]{\substack{c_3-2c_1 \\ c_2-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4-1/3c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4-x^2 \end{vmatrix} = -3(1-x^2)(4-x^2).$$

由 $f(x)=0$ 得

$$-3(1-x^2)(4-x^2)=0,$$

所以 $f(x)=0$ 的根为： $x_1=1$， $x_2=-1$， $x_3=2$， $x_4=-2$.

第四节 克莱姆(Cramer) 法则

前面我们介绍了二元一次线性方程组用二阶行列式求解问题，下面介绍用 n 阶行列式求 n 元线性方程组的解的方法 —— **克莱姆(Cramer) 法则**.

设 n 元线性方程组