图灵数学·统计学丛书 15

Fractal Geometry
Mathematical Foundations and Applications

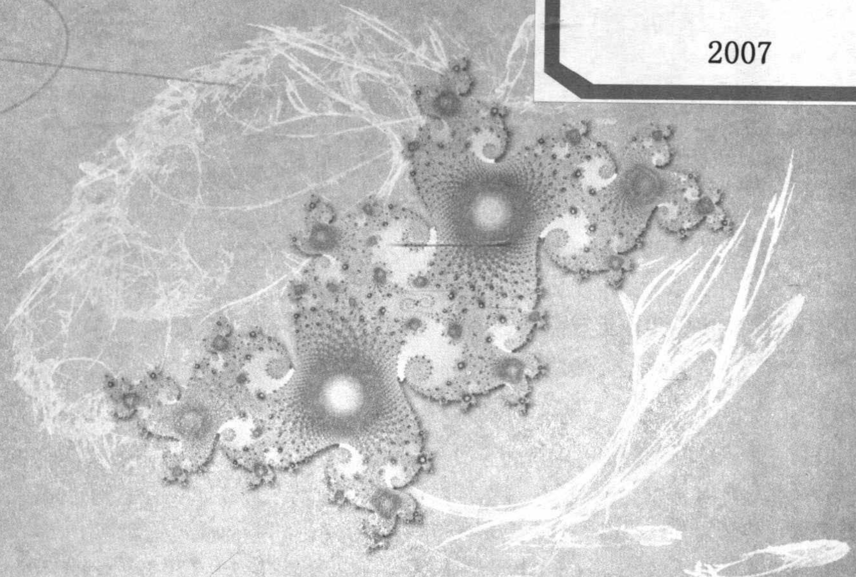
分形几何
数学基础及其应用
(第2版)

[英] Kenneth Falconer 著

曾文曲 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 15



Fractal Geometry
Mathematical Foundations and Applications

分形几何
数学基础及其应用
（第2版）

［英］Kenneth Falconer 著

曾文曲 译

人民邮电出版社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

分形几何：数学基础及其应用：第 2 版 / （英）法尔科内（Falconer.K.）著；曾文曲译. —北京：人民邮电出版社，2007.10
（图灵数学・统计学丛书）
ISBN 978-7-115-16567-1

Ⅰ. 分… Ⅱ. ①法…②曾… Ⅲ. 分形几何－高等学校－教材 Ⅳ. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 108376 号

内 容 提 要

本书是一本全面介绍分形几何理论及其在各领域应用的专著. 全书分成两部分，第一部分阐述了分形与分形几何的一般理论，包括维数的各种概念及计算方法，分形的局部结构，分形的射影、乘积和交集等；第二部分主要是分形的应用举例，包括自相似集和自仿射集、函数的图、数论和纯数学中的例子、动力系统、Julia 集、随机分形及物理应用等. 本书还提供了课程建议和较为全面的参考文献.

本书对分形的介绍深刻而全面，可作为数学工作者和科研人员学习分形的参考书；合理地选择适当的章节，也可作为高年级本科生和研究生的教材.

图灵数学・统计学丛书

分形几何——数学基础及其应用（第 2 版）

◆ 著　　[英]Kenneth Falconer
译　　曾文曲
责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700 × 1000　1/16
印张：20.5
字数：425 千字　　2007 年 10 月第 1 版
印数：1－4 000 册　　2007 年 10 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2007-1966 号

ISBN 978-7-115-16567-1/O1

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223

版 权 声 明

译者简介

曾文曲，广东工业大学数学系教授. 福建永春人，北京大学数学力学系本科毕业，北京师范大学概率论与数理统计专业硕士毕业. 1981—1993 年在沈阳东北工学院 (现东北大学) 数学系任讲师、副教授，其中 1990 年在法国巴黎第六大学概率统计实验室访问. 1993 年调入广东工业大学数学系，1995—2003 年任广东工业大学研究生处处长，曾多年担任广东省数学会常务理事，现任广东省工业与应用数学学会副理事长.

在大学主要从事教学和科研工作，研究马尔可夫过程和分形几何，多年来发表论文 40 余篇 (包括与别人合作)，主要出版物有以下几部：

(1)《分形理论与分形的计算机模拟》(东北大学出版社，1993 年初版，2001 年修订版，与王向阳等合作编著)；

(2)《分形、小波与图像压缩》(东北大学出版社，2002 年出版，与文有为合作编著)；

(3)《分形几何 —— 数学基础及其应用》(第 1 版)(译著，肯尼思 · 法尔科内原著，东北大学出版社，1991 年出版)；

(4)《分形几何中的技巧》(译著，肯尼思 · 法尔科内原著，东北大学出版社，1999 年出版).

推 荐 序

16 年前, 当《分形几何 —— 数学基础及其应用》第 1 版中译本在国内刚出版时, 国内了解分形理论及其应用的学者还很少. 而今天, 多数大学的数学系已经开设了 "分形几何" 课, 涉及复杂图形处理的相当多的科研领域也用到了分形这个工具.

分形理论及其应用已经在中国迅速地传播与发展. 除了因为曼德伯罗德 (B. Mandelbrot) 的创新思想已经得到广泛认同以外, 还有另外一件事功不可没, 那就是肯尼思 · 法尔科内著的《分形几何 —— 数学基础及其应用》一书及其中译本的出版! 十几年来, 很多人都是在这本书的引导之下, 进入了分形这个新的有趣领域. 据这本书的译者说, 这些年来, 经过他们售出或帮助购买的中译本就不下千册, 由此可见一斑. 读者对该书的需求量是非常大的, 作为一本数学方面的专著, 能有这么大的销量 (有关部门指定的教材除外) 是少见的.

为什么这本书这么受欢迎呢? 主要是因为分形这个学科方向十分吸引人. 它新颖、涉及面广且有深刻的内容和方法, 它有比较广泛的实际应用前景, 而且在纯粹数学中 (例如奇点理论) 也有深刻的应用. 这本书叙述深刻、全面、可读性强, 也是一个很重要的原因. 作者以他对分形思想的深刻理解为基础, 在书中提供了对分形数学本质的广泛而容易令人接受的阐述, 并相当全面地介绍了应用前景. 每个论题都包含了必要的背景资料, 在严格的理论论证基础上, 再通过例子及图形加以清晰地解释和说明. 其中既有先进计算机技术的支持, 也有相关的注记和较详尽的参考资料. 从而为读者提供了一个可以对理论及理论的进一步应用进行深入探讨的园地. 这本书的这些优点, 使之成为国内许多高校开设分形课的基本教材以及一些学者和技术人员在这方面的基本参考书.

但是, 毕竟这本书第 1 版已经出版了十几年, 分形理论也有了进一步的长足发展. 为了让读者了解最新的分形理论, 肯尼思 · 法尔科内在 2003 年适时地推出了该书的第 2 版. 在这个新版本中, 作者在第 1 版的基础上主要做了两方面的工作, 按作者的话来说是: "阐明了关于分形几何的一些新的进展, 同时为进一步深入阅读提出了相应的注记和建议. 其次, 把更多的注意力放在那些把本书作为教材的学生们的需要上, 增加一些细节帮助理解, 同时包含一些有助于进一步理解的练习." 实际上, 书中的改动还是比较大的, 每一章各节都多少有些修正和调整, 叙述方式也有些变化. 特别是, 第 17 章基本是重写, 第 14 章和第 18 章增加了不少近年来分形理论的新结果. 作者还为本书提供了 "课程建议", 这些努力对广大读者, 尤其是对那些将要学习分形的人, 无疑是个福音.

人民邮电出版社图灵公司获得了本书第 2 版中文版的出版授权, 委托曾文曲教授重译此书. 我十分赞赏图灵公司的努力, 也很高兴能再次看到曾文曲翻译肯尼思 · 法尔

科内的书.他在翻译中常与原书作者进行多方面的沟通, 而且他的数学功底深厚, 文笔流畅, 使得这一版中译本的翻译质量比以前更高, 这更有助于本书的读者理解书中的内容. 在此, 我祝愿本书对分形几何在中国的发展起更大的作用!

严士健

2006 年 11 月 11 日

于北京师范大学数学科学学院

课 程 建 议

对于标准的分形几何教程, 本书所包含的材料太多了. 根据所需要的侧重点, 可以合理地选择本书适当的章节, 作为本科生或研究生的教材.

作为数学系学生的课程, 可以选用如下章节.

(a) 数学基础

1.1 集合论基础; 1.2 函数和极限; 1.3 测度和质量分布.

(b) 计盒维数

3.1 计盒维数; 3.2 计盒维数的性质.

(c) 豪斯多夫测度和维数

2.1 豪斯多夫测度; 2.2 豪斯多夫维数; 2.3 豪斯多夫维数的计算; 4.1 计算维数的基本方法.

(d) 迭代函数系

9.1 迭代函数系; 9.2 自相似集的维数; 9.3 一些变化; 10.2 连分数例子.

(e) 函数的图

11.1 图的维数, 包括维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 函数和自仿射图.

(f) 动力系统

13.1 斥子与迭代函数系; 13.2 逻辑斯谛映射.

(g) 复变函数的迭代

14.1 Julia 集一般理论梗概; 14.2 Mandelbrot 集; 14.3 二次函数的 Julia 集.

第 1 版前言

经常有人问我这样的问题：什么是分形？什么是分形的维数？如何求得分形维数，它能告诉我们什么？或者数学是怎样应用到分形上的？我在本书中将尽力回答一些此类的问题.

本书主要是为在数学或其他学科领域中经常遇到分形的人，提供一个容易理解的与分形及维数有关的数学论述. 尽管本书基本上属于数学类图书，但书中也对分形这个课题进行了直观的探讨.

全书很自然地分成两部分. 第一部分是关于分形及分形几何的一般理论. 首先介绍了关于维数的各种不同的概念及计算维数的方法，然后利用研究古典图形 (如圆或椭圆) 的方法研究分形的几何性质. 比如在研究圆或椭圆中，一个圆的局部可以被一直线段近似；一个圆的射影或 "影子" 通常是一个椭圆；一个圆与一直线段相交在两个点上等等. 分形也具有类似的性质，通常情况下，维数起着关键的作用. 因此，书中还考虑了分形的局部结构、分形的投影和交等.

本书的第二部分介绍一些分形的例子，在其中可能应用了第一部分的理论，这些例子是从物理和数学的非常广泛的领域中提取出来的. 主题包括：自相似集和自仿射集、函数的图、数论和纯数学的例子、动力系统、Julia 集、随机分形以及一些物理上的应用.

书中给出了许多图和频繁阐述的例子，还有计算机绘制的各种各样的分形，这些信息可以让具有计算机编程能力的读者自己制作进一步所需要的图形.

希望本书可以成为研究人员的一本有用的参考书，因为它提供了作为分形理论基础的数学上的一些易于接受的新进展，并且展示了在特殊情况下如何应用它. 书中包含了与分形有关的广泛的数学思想，特别是在第二部分，提供了一些可以得到的结果而不是详细地探讨任何一个主题. 主题的选择在某种程度上取决于作者的偏好，肯定还有一些主要的应用没有包含在本书中. 一些材料可追溯到 20 世纪初，而另外一些材料又是非常新的.

每一章的结尾都提供了一些注记和参考文献，但绝不可能把全部的参考文献都列出来. 确实，如果把所涉及的各个主题的参考文献完全列出来，其规模将是庞大的. 但还是希望提供的参考文献能包含足够的信息，使欲从事这方面工作的读者从中进一步地了解这个主题.

本书可以作为研究生或者高年级本科生的分形数学教材. 为了帮助学生理解每一章的内容，在每章后面都有一些练习题. 较难的部分和证明用 "*" 号注明，可以跳过，应该不会影响有关问题的连贯性.

一直努力使书中的数学知识保持在数学和物理系研究生或勤奋的高年级本科

生能够理解的程度上, 特别是把测度论思想控制在最低的限度上, 使读者可以把集上的测度视为质量分布. 在可以接受测度论和它的一些直观性质的前提下, 书中的论述就基本不需要更深入的测度理论.

为了避免结论互相混淆, 所有结论都是精确叙述的. 有关论证的方法一般都是严格的, 但对于一些较难或技巧性较高的证明, 或者是给出证明的梗概, 或者完全略去证明 (但是一些较难的证明在形成其他理论时并不是没有用, 特别是在随机分形和具有大交集的集上). 合适的图可以帮助理解证明 (大部分是几何性质的证明). 书中也绘制出了一些图, 读者可以发现, 这些都有助于进一步绘制其他的图形.

第 1 章首先快速浏览了一些基本的数学概念和定义, 例如, 书中自始至终应用的集合论和函数论. 接着介绍了测度和质量分布, 希望这些都适于读者阅读. 概率论的知识对理解随机分形及布朗运动这两章内容有用.

因为本书覆盖的主题很广, 在概念的应用上完全一致是不可能的, 有时不可避免地在本书的一致性上与标准用法之间做一些折中.

最近几年, 随着计算机图形学的出现和分形作为各种物理现象的模型, 分形作为一种艺术形式已经相当流行. 在某种程度上, 缺乏或完全不懂数学知识, 可能并不影响对分形的欣赏. 但是, 充分理解应用到如此多样化目标上的数学, 一定能提高我们的鉴赏力. 时常听到这样的赞叹: “多么美丽的分形”! 作者相信分形的美丽将在其数学中被进一步发现.

非常感谢在本书准备过程中提供帮助的人. Philip Drazin 和 Geoffrey Grimmett 对部分手稿做了有益的注记, Peter Shiarly 在计算机绘图和制作一些照片中给了有价值的帮助, Aidan Foss 制作了一些图. 我非常感谢 John Wiley and Sons 出版公司的 Charlotte Farmer, Jackie Cowling 和 Stuart Gale 对本书出版所做出的努力.

特别要感谢 David Marsh, 他不但对手稿做了有用的注记和制作了许多计算机图片, 还以最专业的方式录入了手稿.

最后, 我还要感谢我的妻子 Isobel 的支持和鼓励, 这些促使我继续阅读本书的各种手稿.

Kenneth J. Falconer

1989 年 4 月于 Bristol

第 2 版前言

自本书第 1 版出版至今已经 13 年了. 在这期间, 由于各种层次的研究者对分形的广泛兴趣, 使分形的数学理论和应用都有了巨大的发展. 本书的初衷是为从事数学和其他学科的、希望多了解分形数学的人写的. 这些年来, 随着兴趣的变化和数学教学的发展, 很多学校已经开设了一些关于分形几何的本科生和研究生课程, 而其中相当多是以本书的一些章节为基础的.

因此, 这个新版本有两个主要目的. 首先, 阐明分形几何的一些新进展, 同时为深入阅读提出了相应的注记和建议. 其次, 把更多的注意力放在那些把本书作为教材的学生们的需要上, 增加一些细节帮助理解, 同时包含一些有助于进一步理解的练习.

书中的一些部分已经重写, 特别是, 自本书第 1 版出版以来, 多重分形理论已经有了很大的进展, 因此 "多重分形测度" 这一章是完全重写了. 有关的注记和参考文献也进行了相应的更新. 整本书做了大量的小改动、修正和补充; 改变了一些符号和术语, 以和目前的标准用法相一致; 利用计算机技术, 用更精准的图像取代第 1 版中的许多图像. 节、等式和图像的编号和第 1 版保持一致 (如果有可能的话), 因此以前注明的参考文献对本书仍然有效.

练习添加在每一章的末尾, 习题的解答和有关的补充材料可以在因特网 http : //www.wileyeurope.com/fractal 上找到.

本书的续篇《分形几何中的技巧》已经于 1997 年出版, 其中阐述了在分形研究中的各种不同的技巧和思想. 如果读者希望学习本书之外的分形数学, 这个续篇是很有用的.

非常感谢那些对本书提出建设性建议的人. 特别是要非常感激 Carmen Fernandez,Gwyneth Stallard 和 Alex Cain 对这个新版本的帮助. 同时, 我十分感谢 John Wiley & Sons 出版公司工作人员对本书的继续的支持, 特别对负责第 2 版出版的 Rob Calver 和 Lucy Bryan 以及设计封面的 John O'Connor 和 Louise Page 表示感谢.

Kenneth J. Falconer
2003 年 1 月
St Andrews

绪　论

过去, 数学已广泛涉及可以用经典的微积分方法进行研究的集类和函数类; 而那些不够光滑和不够规则的集和函数, 却被认为是"病态"的, 不值得对它们进行研究, 因而无人理睬. 确实, 它们被当成个别的特例, 其中只有极少数被认为是可以利用一般理论来进行研究的.

近几年来, 这种态度发生了明显的变化. 人们已经意识到, 对"不光滑对象"不仅可以进行详细的数学描述, 而且也值得描述. 此外, 不规则集比经典的几何图形能更好地反映许多自然现象. 分形几何恰好为研究这类不规则集提供了一个总的框架.

我们首先简要地考察几个简单的分形例子, 并指出它们的一些特征.

去掉中间三分之一区间的康托尔集 (简称三分康托尔集) 是一种人们最了解, 同时也是最容易构造的分形; 然而, 它却显示出许多典型的分形特征. 这种集合是从单位区间出发, 通过一系列去掉部分子区间的过程构造出来的 (见图 0.1). 设 E_0 表示闭区间 $[0,1]$ ($[a,b]$ 表示满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 组成的集合), E_1 表示除去 E_0 的中间 1/3 之后得到的集, 即 E_1 包含 [0, 1/3] 和 [2/3, 1] 两个区间; 分别去掉这两个区间的中间 1/3 就得到 E_2, 即 E_2 包含 [0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1] 四个区间. 按此方法继续进行下去, 分别去掉 E_{k-1} 中各区间的中间 1/3 就得到 E_k, 即 E_k 由 2^k 个长度各为 3^{-k} 的区间组成. 三分康托尔集F 是由属于所有 E_k 的数组成的, 确切地说, $F = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k$, F 可以看成是当 k 趋于无穷时集序列 E_k 的极限. 显然, 不可能画出带有无穷小细节的 F 自身, 所以 F 的图实际上只是当 k 充分大时, 对 F 较好逼近的 E_k 的一个图.

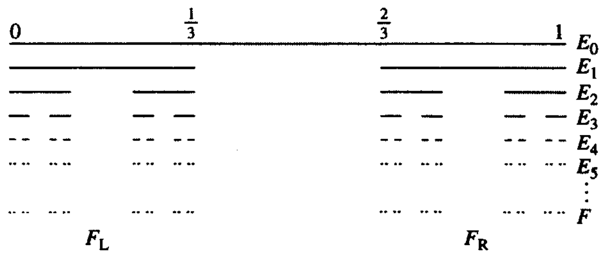


图 0.1　三分康托尔集 F 的构造, 由反复地去掉区间的中间 1/3 而得到. 注意 F 的左右部分 F_L 和 F_R 都是以系数 1/3 缩小 F 所得到的相似图

乍一看, 在构造康托尔集 F 的过程中, 已经去掉了 $[0,1]$ 区间中的那么多点, 似乎没有留下什么了. 事实上, F 是一个无穷集 (并且的确是不可数的), 在它的每个点

的任一邻域中都包含集内的无穷多个数. 三分康托尔集正是由区间 $[0,1]$ 中可以展成下面的以 3 为底的幂级数形式的数组成的:

$$a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \cdots$$

其中, 对每个 i, $a_i = 0$ 或 2, 且 $a_i \neq 1$, 为看清这一点, 注意到, 从 E_0 得到 E_1 时, 去掉的是那些 $a_1 = 1$ 的数, 从 E_1 得到 E_2, 去掉的是 $a_2 = 1$ 的数, 并以此类推.

下面列出三分康托尔集 F 的一些性质, 我们以后将看到, 许多分形也有与之类似的性质.

(1) F 是自相似的. 很明显, 分别在区间 $[0,1/3]$ 和 $[\,2/3,1\,]$ 内的 F 的部分与 F 是几何相似的, 相似比为 1/3; 进而分别在 E_2 的 4 个区间内的 F 的部分也与 F 相似, 相似比为 1/9. 以此类推, 康托尔集包含许多不同比例的自身相似的样本.

(2) F 有 "精细结构", 即它包含有任意小比例的细节, 越放大康托尔集的图, 间隙就越清楚地呈现在我们眼前.

(3) 虽然 F 有错综复杂的细节结构, 但 F 的实际定义却是非常简单明了的.

(4) F 是由一个迭代过程得到的. 这个构造是由反复去掉区间中间的 1/3 得到的, 持续这个步骤所得到的 E_k 是 F 的越来越好的逼近.

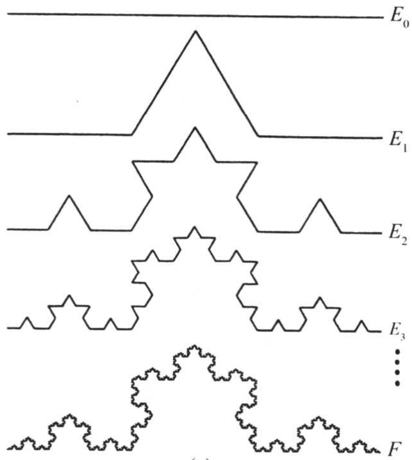
(5) F 的几何性质难以用传统的术语来描述, 它既不是满足某些简单几何条件的点的轨迹, 也不是任何简单方程的解集.

(6) F 的局部几何性质也是很难描述的, 在它的任一点附近都有大量被各种不同间隔分开的其他点.

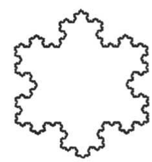
(7) 虽然 F 在某种意义上是相当大的集 (是不可数无穷的), 然而它的大小不适于用通常的测度如长度来度量. 用任何合理定义的长度, F 的长度总是为零.

第二个例子, von Koch 曲线, 这也是许多读者所熟悉的 (见图 0.2). 设 E_0 是单位长度的直线段, E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 的线段, 而代之以底边为被除去线段的等边三角形的另外两边所得到的集, 它包含四个线段; 把同样的过程应用到 E_1 的每个直线段就构造出 E_2; 以此类推, E_k 是把 E_{k-1} 的每个直线段中间 1/3 用等边三角形的另外两边取代而得到的. 当 k 充分大, 曲线 E_k 和 E_{k-1} 只在精细的细节上不同, 而当 $k \to \infty$, 折线序列趋于极限曲线 F, 称 F 为 von Koch曲线.

von Koch 曲线在许多方面的性质与三分康托尔集列出的性质类似, 它由 4 个与总体相似的 "四分之一" 部分组成, 但比例系数是 1/3. 它在任何尺度下的不规则性反映了它的精细结构. 然而, 这个错综复杂的构造却源自于一个基本的简单结构. 虽然称 F 为曲线是合理的, 但它是如此不规则, 以至于在传统的意义下它没有任何切线. 简单的计算表明 E_k 的长度为 $(4/3)^k$; 令 k 趋于无穷, 则 F 的长度是无穷大的. 另一方面, F 在平面内的面积为零, 所以它的长度和面积都没有提供对 F 的大小很有效的描述.



(a)



(b)

图 0.2　(a) von Koch 曲线 F 的构造. 在每一步中, 每个区间的中间 1/3 都被一个等边三角形的另外两边取代.(b) 连接在一起的三段 von Koch 曲线构成一个雪花曲线

许多其他的集也可以由类似的迭代过程来构造, 例如 Sierpiński三角或垫是从一个初始的等边三角形反复去掉 (相反方向的) 小等边三角形得到的 (见图 0.3). (为

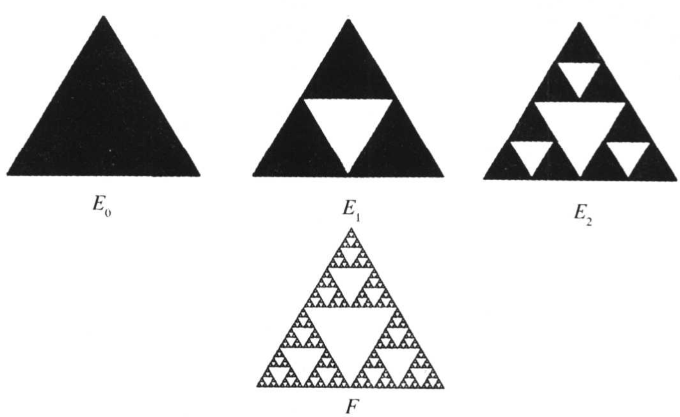


图 0.3　Sierpiński 三角的构造 ($\dim_{\mathrm{H}} F=\dim_{\mathrm{B}} F=\ln 3/\ln 2$)

了许多目的, 最好是把这个过程看成是反复用 3 个高为原高一半的三角形取代原来三角形的迭代过程.) 平面中类似于康托尔集的一个例子, 称为 “康托尔尘”, 如图 0.4 所示. 构造它的每一步是把正方形等分成 16 个小正方形, 保留其中 4 个而把其余的去掉. (当然, 保留次序不同或个数不同的小正方形可以用来构造不同的集.) 显然, 这个例子同样也具有与康托尔集和von Koch曲线相类似的性质. 图 0.5 所示为在构造中用到两个不同相似比的例子.

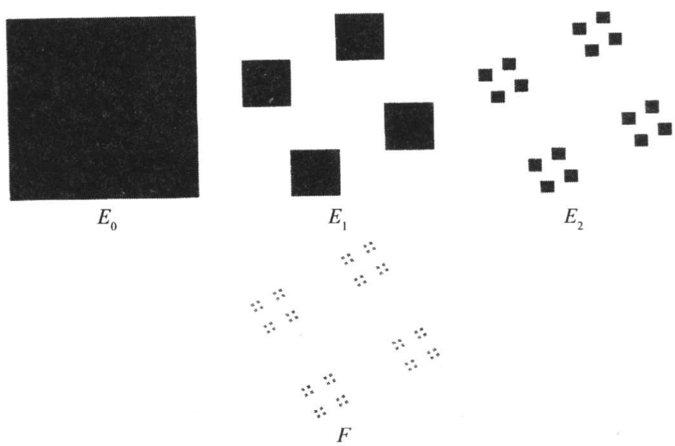


图 0.4 “康托尔尘” 的构造($\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = 1$)

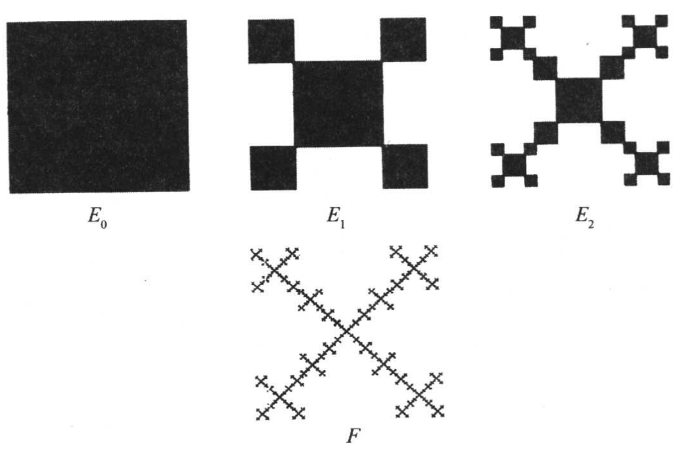


图 0.5 具有两个不同相似比的自相似分形的构造

还有许多其他的构造方式也可以得到具有这种类型性质的集, 其中有一些构造将在后面的部分详细讨论. 更错综复杂的 Julia 集如图 0.6 所示, 它是单变量二次

复变函数 $f(z)=z^2+c$ 的图像, 其中 c 是适当的常数. 虽然这种集没有康托尔集和 von Koch曲线所具有的那种严格的自相似性, 但它具有 "拟自相似性", 即这个集的任意小的部分可以放大, 然后平滑地变形使之与这个集的某一较大的部分相一致.

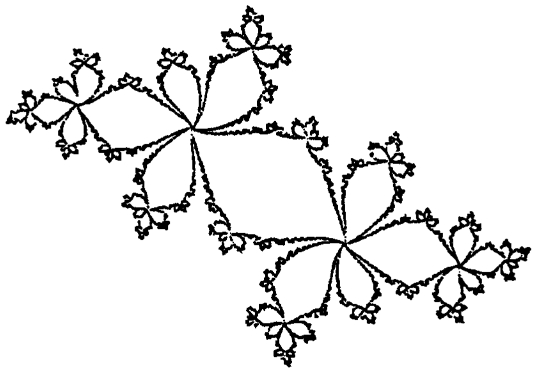


图 0.6 Julia 集

图 0.7 所示的是函数 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$ 的图, 无穷项求和导致函数具有精细的结构, 而不像光滑的曲线那样可以用经典的微积分来研究.

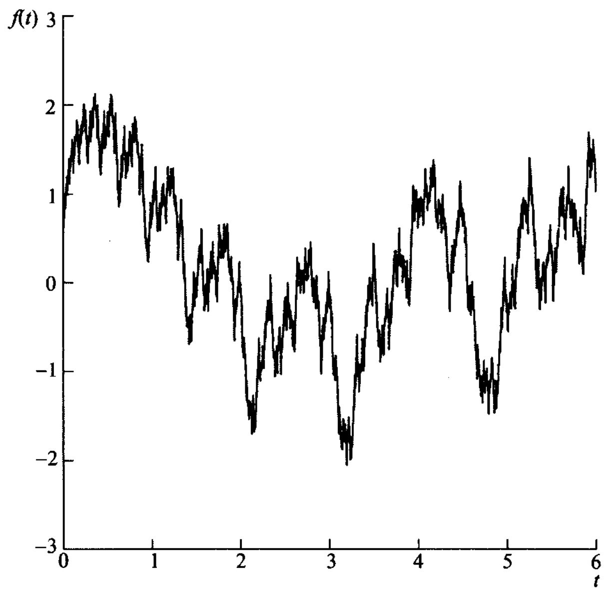


图 0.7 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$ 的图

有些构造可以是“随机的”. 图 0.8 表示一个“随机 von Koch 曲线”, 在构造的每一步都是通过掷一枚硬币来决定一对新的直线段在曲线上的位置. 这个随机曲线确实具有精细的结构, 但von Koch曲线所具有的严格自相似性已被它所具有的“统计自相似性”取代.

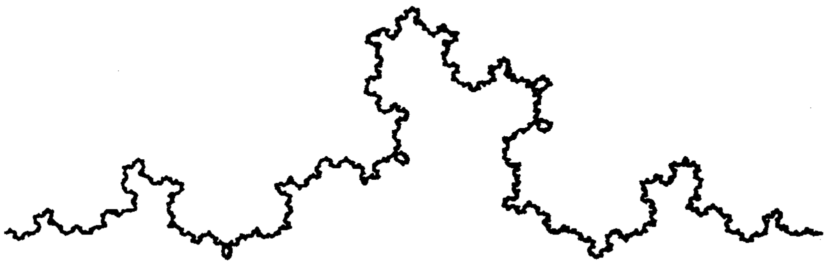


图 0.8 von Koch 曲线的随机版本

所有这些例子中的集, 普遍地称为分形(fractal)(单词 fractal 是由Mandelbrot在其论文中创造的新词, 来自拉丁文 fractus— 意为断裂, 用来描述一些非常不规则以至不适宜用经典几何研究的对象.) 类似康托尔集所具有的性质是分形的特性, 本书研究的对象正是具有这种性质的集. 确实, 任何能称为分形的集都有精细的结构, 即在任何尺度下都有精致的细节. 许多分形具有某种程度的自相似性, 它们由以某种方式与整体相似的部分组成. 有时这种相似的程度可以比严格的几何相似弱. 比如, 这种相似可以是近似的或统计的.

经典的几何和计算方法已经不适合用来研究分形, 我们需要另外的方法. 分形几何的主要工具是其许多形式的维数. 人们已经相当熟悉这样的思想, 一条 (光滑的) 曲线是一维的, 而一个曲面是二维的. 但不太清楚, 为了许多目的, 康托尔集被看成具有维数 $\ln 2/\ln 3 = 0.631\cdots$, von Koch曲线具有维数 $\ln 4/\ln 3 = 1.262\cdots$, 这个数与von Koch曲线大于一维 (具有无限的长度) 和小于二维 (具有零面积) 是相一致的.

下面的论述给出了这些维数意义 (很粗略) 的解释, 说明了维数是如何反映出比例性质和自相似性的. 如图 0.9 所示的一条直线段由与其相似的 4 个比例系数为 1/4 的直线段组成, 这个线段具有维数 $-\ln 4/\ln \frac{1}{4} = 1$; 然而, 一个正方形由 4 个与其相似的比例系数为 1/2 的正方形组成 (即边长为原来的一半), 其维数为 $-\ln 4/\ln \frac{1}{2} = 2$; 同样von Koch曲线是由 4 个与其相似的比例系数为 1/3 的相似形组成, 其维数为 $-\ln 4/\ln \frac{1}{3} = \ln 4/\ln 3$; 而康托尔集可以看成 4 个与其相似的相似比为 1/9 的部分组成, 其维数为 $-\ln 4/\ln \frac{1}{9}=\ln 2/\ln 3$. 一般地, 如果一个集由 m 个与其相似的、相似比为 r 的部分组成, 可以认为这个集具有维数 $-\ln m/\ln r$, 用这