国家工科数学课程教学基地系列改革教材
GUOJIA GONGKE SHUXUE KECHENG JIAOXUE JIDI XILIE GAIGE JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

傅英定 钟守铭 主编

电子科技大学出版社

高等数学

下册

国家工科数学课程教学基地系列改革教材
GUOJIA GONGKE SHUXUE KECHENG JIAOXUE JIDI XILIE GAIGE JIAOCAI

高等数学

下册

傅英定 钟守铭 主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 傅英定，钟守铭主编. —成都：电子科技大学出版社，2007.1

（国家工科数学课程教学基地系列改革教材）

ISBN 978-7-81114-383-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①傅…②钟 … Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 015109 号

国家工科数学课程教学基地系列改革教材

高 等 数 学

（下册）

傅英定 钟守铭 主编

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）

策划编辑： 谢晓辉

责任编辑： 文　利

主　　页： www.uestcp.com.cn

电子邮件： uestcp@uestcp.com.cn

发　　行： 新华书店经销

印　　刷： 成都金龙印务有限责任公司

成品尺寸： 185mm×230mm　　**印张** 17.25　　**字数** 290 千字

版　　次： 2007 年 2 月第一版

印　　次： 2007 年 2 月第一次印刷

书　　号： ISBN 978-7-81114-383-6

定　　价： 24.80 元

内 容 提 要

本书是根教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于 2004 年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，按照电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材《高等数学》的内容并遵循一般本科院校的特点而编写的。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有 A、B 两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，论证简明，叙述清晰，例题典型，便于自学。本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材，也可作为大专层次和网络本科以及工科各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

前　　言

本书是电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材之一，是“基地”教学改革项目“关于提高大学数学课程的教学质量的研究”成果之一。

本书按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于 2004 年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，由电子科技大学长期工作在基础数学课程教学第一线且具有丰富教学经验的教师集体编写而成。本书的特色是：注重课程体系结构与教学内容的整体优化，着力于数学素质与能力的培养；充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力；以育人为本、学生为本、质量为本；突出数学思想与方法，适当淡化运算技巧；注重教学的适用性。

本书分为上、下两册，上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有 A、B 两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

高等数学是大学理工科各专业的公共基础课程，在培养高素质科学技术人才中具有独特的、不可替代的重要作用。高等数学课程教学的基本要求，是工科院校本科生学习本课程应当达到的合格要求。根据近几年一般本科院校学生的特点，本书严格按照课程的基本要求编写，其高等数学的基础理论以必需、够用为度，以理解概念、强化应用、培养能力为重点。

本书知识的覆盖面在保持高等数学自身的系统性、逻辑性的基础上，与其他要求较高的本科高等数学相比，对难点作了一定的削减，尤其是对难度较大的部分基础理论，不作过多的严密证明。加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。注重基本概念和运算的训练，不追求太多复杂的计算和较高技巧。

本书根据一般本科院校学生的实际情况，着重处理好如何理解一些本课程中的基本理论、重点和难点之间的关系。精选例题和习题，难易适度，具有启发性和典型性。文字叙述通俗易懂，深入浅出，详略得当，清晰流畅，便于自学。

本书学时数为130～150学时，少量带*号的内容可根据需要进行取舍。

本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材，也可作为大专层次和网络本科以及各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

对于每节后的A、B两大类习题的使用，编者建议对大专层次和各类成人大专的学生，至少应完成A类习题及部分综合复习题；对一般本科院校学生及网络本科学生，应完成A、B两大类习题及各章综合复习题。

本书第一章、第四章、第五章由陈良均编写；第二章、第三章、第八章由傅英定编写；第六章、第十章由钟守铭编写；第七章、第九章由吕恕编写。

本书由傅英定、钟守铭主编。

本书经谢云荪教授主审，并认为这是一本适合一般本科院校学生、大专层次和网络本科以及各类成人教育学生使用的好教材。同时谢云荪教授也对本书提出了十分宝贵的意见和建议。本书的编写得到了电子科技大学应用数学学院、继续教育学院领导和应用数学学院全体老师的大力支持和帮助，在此编者一并表示衷心的感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，敬请批评指正。

编者

2007年2月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系将平面上的点与有序数组、平面上的曲线与方程建立了一一对应的关系，在一元函数微积分中，平面解析几何发挥着重要的作用. 同样道理，在多元函数微积分中，空间解析几何也将起到不可或缺的作用. 本章首先建立空间直角坐标系，并引入在自然科学和工程技术上有广泛应用的向量概念，从而以向量为工具，研究有关空间图形问题.

§7.1　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

为建立空间图形与方程的联系，需要建立空间点与有序数组之间的联系，这种联系通常由空间直角坐标系来实现.

在空间中过一定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且长度单位相同，这三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则：右手的四个手指（除大拇指外）与 x 轴同向，四指向手内侧旋转 $\frac{\pi}{2}$ 与 y 轴同向，则大拇指的指向就是 z 轴正向（如图 7.1 所示）. 这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系，点 O 称为**坐标原点**.

三条坐标轴中的任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**，分别称为 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面. 这三个坐标面把空间分成 8 个部分，每一部分称为一个卦限，把含有三个坐标轴正向的那个卦限称为第Ⅰ卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 平面的上方，且按逆时针方向确定. 第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 平面的下方，分别与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对应(如图 7.2 所示).

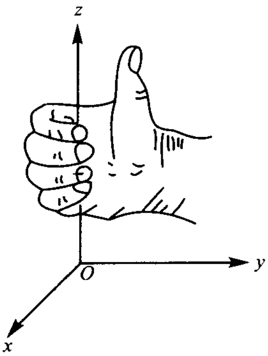

图 7.1

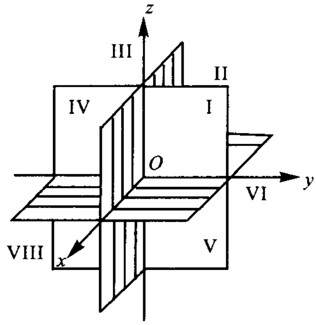

图 7.2

设 M 为空间中的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴，它们与坐标轴的交点依次为 P、Q、R（如图 7.3 所示），这三点在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的坐标依次为 x、y、z. 于是，空间中点 M 和有序数组 x、y、z 构成了一一对应，这个有序数组称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，称 x、y、z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

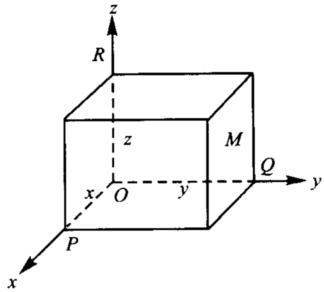

图 7.3

显然，坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 如原点坐标为 $(0, 0, 0)$；在 x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$、$(0, 0, z)$；在坐标面 xOy 面、yOz 面、zOx 面上点的坐标分别是 $(x, y, 0)$、$(0, y, z)$、$(x, 0, z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1、M_2 为对角线的长方体(如图 7.4 所示)，则 M_1 与 M_2 的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{|M_1N|^2+|NM_2|^2}=\sqrt{|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2}.$$

因为

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间任意两点间的距离公式. 特别地, 点 $M(x, y, z)$到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

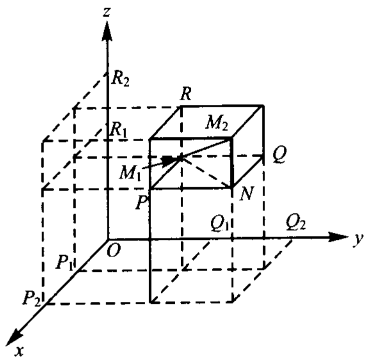

图 7.4

例 1 验证以 $O(0, 0, 0)$、$A(1, -2, 2)$、$B(3, -1, 0)$ 三点为顶点的三角形$\triangle OAB$ 是等腰三角形.

解 因为

$$|OA|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$
$$|OB|=\sqrt{3^2+(-1)^2+0}=\sqrt{10},$$
$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(0-2)^2}=3.$$

所以$|OA|=|AB|$, 故$\triangle OAB$ 是等腰三角形.

例 2 在 x 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$和 $B(3, 5, -2)$等距离的点.

解 因为所求的点在x轴上, 所以设该点为$M(x, 0, 0)$, 依题意有$|MA|=|MB|$.

即

$$\sqrt{(x+4)^2+(0-1)^2+(0-7)^2},$$
$$=\sqrt{(x-3)^2+(0-5)^2+(0+2)^2}.$$

解得 $x=-2$. 故所求点为 $M(-2, 0, 0)$.

习题 7-1

A

1. 在空间直角坐标系中, 指出点 $A(1, 2, 3)$、$B(1, -2, 3)$、$C(1, 2, -3)$、$D(-1, -2, 3)$所在的卦限.

2．求点（a, b, c）关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴的对称点的坐标.

3．设 $A(-3, x, 2)$与 $B(1, -2, 4)$两点间的距离为 $\sqrt{29}$，试求 x.

4．在 yOz 平面上，求与三个已知点 $A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$等距离的点.

习题 7-1

B

1．过点 P_0（x_0, y_0, z_0）分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问它们上面的点的坐标各有什么特点？

2．一边长为 a 的正方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求此正方体各顶点的坐标.

3．求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到各坐标轴和各坐标平面的距离.

§7.2　向 量 代 数

一、向量的概念

实际中我们所遇到的量可以分为两类：一类量用一个数就可以完全确定，如面积、时间、质量、温度等，这一类量称为**数量**. 另一类量，既有大小，又有方向，如物理学中的力、速度、加速度、位移等，这一类量称为**向量**.

在数学上，常用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点，以 M_2 为终点的向量记为 $\boldsymbol{M_1M_2}$（如图 7.5 所示），也可记为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等.

向量的大小或长度称为向量的模，记为$|\boldsymbol{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$. 在直角坐标系中，起点在坐标原点的向量$\boldsymbol{OM}$ 称为点 M 的向径. 模等于 1 的向量称为**单位向量**，模等于零的向量称为**零向量**，记为 0，零向量的方向可以是任意的.

在实际问题中，我们研究的向量通常称为**自由向量**，自由向量具有在空间中平行移动而不改变大小和方向的性质，若两个向量的模相等，并且方向相同，称它们是相等的向量，如图 7.6 所示，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CD}$. 若两个向量的模相等，并且方向相反，称它们互为**负向量**，向量 $\boldsymbol{AB}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{AB}$.

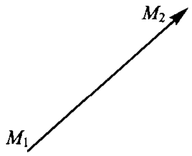

图 7.5

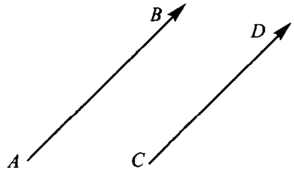

图 7.6

二、向量的线性运算

1. 向量的加、减法

向量的加法　设给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，取定一点 O，作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$（如图 7.7 所示），则对角线向量 $\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种方法叫做向量加法的平行四边形法则，我们还可以这样作出两向量的和：如图 7.7 所示，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的始点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，这种方法叫做向量加法的三角形法则. 三角形法则对于多个向量求和时较为方便，用前一个向量的终点作后一个向量的起点，依次下去直到最后一个向量，然后由第一个向量的起点与最后一个向量的终点所决定的向量，即为多个向量的和向量.

特别地，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或在同一条直线上，则规定它们的和是这样一个向量：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的指向相同时，和向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相同，其模等于两向量的模的和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的指向相反时，和向量的方向与较长的向量方向相同，而模等于较大向量的模减去较小向量的模.

向量的加法满足以下运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

分别如图 7.7、图 7.8 所示.