新课标　新教材

导学导练

数学

必修 5

（配人教版）

丛书主编　金鹰

安徽大学出版社

新课标　新教材

导学导练

数　学

必修 5（配人教版）

本册主编　孙勇军
编写人员　孙勇军　刘成雨　王　蕾
　　　　　刘　慧　范　浩　查道庆

安徽大学出版社

新课标　新教材　导学导练

数学必修5(配人教版)　　　　丛书主编　**金鹰**

出版发行	安徽大学出版社(合肥市肥西路3号　邮编 230039)
联系电话	编辑室 0551-5108438
	发行部 0551-5107784
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn
责任编辑	鲍家全　王先斌　朱夜明
封面设计	孟献辉
印　　刷	合肥现代印务有限公司
开　　本	880×1230　1/16
总 印 张	26.5
总 字 数	890千
版　　次	2007年2月第1版
印　　次	2007年2月第1次印刷
书　　号	ISBN 978 7-81110-288-8
总 定 价	41.00元(共3册)

前　言

春生夏长，秋收冬藏。我们的努力，赢得了广大读者热情的赞扬。愿《新课标　新教材　导学导练》成为你腾飞的翅膀！

“如切如磋，如琢如磨。”这套丛书是我们研讨、交流、推敲、合作的结晶。我们的作者队伍中，有课程与教学研究专家，有重点中学教学经验丰富、成绩突出的骨干教师。长期的课程改革研讨和教学经验交流，使我们形成一支思维开放、锐意进取、团结合作的编写队伍。

“鸳鸯绣出从教看，莫把金针度与人。”尽管我们付出了巨大的劳动，但是我们还不敢自诩我们的作品便是“度人金针”。我们只是本着“春蚕吐丝”的精神，将我们研究和教学的心得，拿出来与朋友们分享。在科学面前，按新课标的要求，我们永远是探索者，只是我们永远不会停下探索的脚步。我们愿意与广大朋友们共享探索、进取的喜悦。

朋友们，你们是学习的主体。在学习中，培养创新精神和实践能力，提高综合素质，主动地、生动活泼地学习，促进全面发展，这就是新课标的要求和方向。

《导学导练》突出新课标的要求与方向：在栏目的安排、材料的选择、例题的配置、习题的设计等方面努力体现这一要求和方向。

《导学导练》保持与既有教学方式的衔接：不忽视基本知识的介绍；突出知识的内在联系和重难点的讲解；注重课后练习和单元检测。

《导学导练》最大程度地方便广大师生使用。每一种都是分两次印装：“导学导练”部分，包括知识网点、重难点、能力导航、知识拓展、典型例题、课时练习或周练等，以16开印装；“单元检测”部分，包括单元卷和综合卷，以8开印装，活页形式。

“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。”朋友们，让我们努力探索，相互交流，携手共进，迎接美好的明天。

金鹰

2007年1月

目录

第一章　解三角形

第二章　数　列

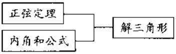
第三章　不等式

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

§1.1.1 正弦定理

知识网点



重难点解析

1. 正确理解正弦定理公式.

(1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为三角形外接圆的半径）;

(2) $A+B+C=\pi$.

2. 灵活运用正弦定理解决三角形的边及角,其变形有 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.

3. 做题时应遵循“边化角,角化边”原则,如 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{c\sin A}{\sin C}$等.

典型例题

［例 1］ 已知$\triangle ABC$ 中,$A=30^\circ$,$B=45^\circ$,$a=10$,求 b.

［分析］ 在$\triangle ABC$ 中,已知两个角和一条边,那么通过$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$直接解得 b 边长度.

［解］ 根据正弦定理,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{10}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}\Rightarrow b=10\sqrt{2}$.

［例 2］ 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,$B=45^\circ$,求角 A、C 和边 c 的值.

［分析］ 在$\triangle ABC$ 中,已知两边及一边对角解三角形问题,可用正弦定理,但先要判断$\triangle ABC$ 有没有解,有几个解.

［解］ $\because B=45^\circ<90^\circ$,且 $b<a$,$\therefore\triangle ABC$ 有两解.

由正弦定理,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,即 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\angle A=60^\circ$或 120°.

(1) 当 $A=60^\circ$时,$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ$,$\therefore c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

(2) 当 $A=120^\circ$,$C=180^\circ-(A+B)=15^\circ$,$\therefore c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

所以 $A=60^\circ$,$C=75^\circ$,$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$或 $A=120^\circ$,$C=15^\circ$,$c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

［例 3］ 在$\triangle ABC$ 中,若 $\sin A=2\sin B\cos C$,$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$,试判断$\triangle ABC$ 形状.

［分析］ 本题考查三角形中的三角函数问题,应用正弦定理把角都转化成边.

[解法一] 由 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，利用正弦定理得 $a^2=b^2+c^2$，故△ABC 是直角三角形，且 $A=90°$.
∴$B+C=90°$，$B=90°-C$，∴$\sin B=\cos C$.

由 $\sin A=2\sin B\cos C$，可得 $1=2\sin^2B$，∴$\sin^2B=\frac{1}{2}$.

∵B 为锐角，∴$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

从而 $B=45°$，∴$C=45°$.
∴△ABC 是等腰直角三角形.
[解法二] 提示：利用三角形内角和等于 180°这一性质.

[例 4] 在△ABC 中，a、b、c 分别是角 A、B、C 的对边，且 $\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，求角 B 的大小.

[分析] 在 $\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$ 中，可以观察到等式右边分子分母同次，这样可以采用边化角的方法处理.

[解] 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，可得

$$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{\sin B}{2\sin A+\sin C}$$

$$\Rightarrow \cos B(2\sin A+\sin C)=-\sin B\cos C\Rightarrow 2\cos B\sin A+\cos B\sin C=-\sin B\cos C$$

$$\Rightarrow 2\cos B\sin A=-\sin(B+C)\Rightarrow 2\cos B\sin A+\sin(B+C)=0.$$

又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $2\cos B\sin A+\sin A=0$.

$\sin A=0$ 不可能，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}\Rightarrow B=120°$.

[例 5] △ABC 中，如果 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且 B 为锐角，试判断此三角形形状.
[分析] 通过对数变化，寻找边角之间的关系.

[解] 由题意，$\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵B 为锐角，∴$B=\frac{\pi}{4}$.

∵$\lg\frac{a}{c}=\lg\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$c=\sqrt{2}a\Rightarrow\sin C=\sqrt{2}\sin A\Rightarrow\sin[\pi-(A+B)]=\sqrt{2}\sin A$

$\Rightarrow\sin(A+B)=\sqrt{2}\sin A\Rightarrow\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin A\Rightarrow\cos A=\sin A\Rightarrow A=\frac{\pi}{4}\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$.

∴△ABC 是等腰直角三角形.

实践与探究

1. △ABC 中，$A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{6}$，则角 B 的值为（　　）
   A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 60°或 120°
2. 在△ABC 中，$\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B$，则△ABC 为（　　）
   A. 直角三角形　　B. 等腰三角形　　C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形
3. 在△ABC 中，如果 $A:B:C=1:2:3$，那么 $a:b:c=$（　　）
   A. 1∶2∶3　　B. 3∶2∶1　　C. $2:\sqrt{3}:1$　　D. $1:\sqrt{3}:2$
4. 在△ABC 中，$B=45°$，$C=60°$，$a=2(1+\sqrt{3})$，求△ABC 内切圆半径.

5. 已知关于 x 的方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之和等于两根之积，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

6. 在$\triangle ABC$ 中，求证：$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$.

7. 已知 a、b、c 分别是$\triangle ABC$ 三个内角 A、B、C 的对边.

(1)若$\triangle ABC$ 面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=2$，$A=60°$，求 a、b 的值；

(2)若 $a\cos A=b\cos B$，试判断$\triangle ABC$ 的形状，并证明你的结论.

8. 在$\triangle ABC$ 中，三个内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且角 A 为 $80°$，$a^2=b(b+c)$，求角 C 的度数.

9. $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 对边分别为 a、b、c，已知 a、b、c 成等比数列，且 $\cos B=\frac{3}{4}$.

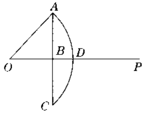
(1)求 $\cot A+\cot C$ 的值；

(2)设 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$，求 $a+c$ 的值.

10. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$且 $2\sin A\sin B=2\sin^2 C$，试判别其形状.

知识拓展

三角函数的演进



正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数统称为三角函数(Trigonometric function).

尽管三角知识起源于远古，但是用线段的比来定义三角函数，是欧拉(Euler)(1707～1783)在《无穷小分析引论》一书中首次给出的.在欧拉之前，研究三角函数大都在一个确定半径的圆内进行的.如古希腊的托勒密定半径为60；印度人阿耶波多(约476～550)定半径为3438；德国数学家里基奥蒙特纳斯(1436～1476)为了精密地计算三角函数值曾定半径600,000，后来为制订更精密的正弦表又定半径为107.因此，当时的三角函数实际上是定圆内的一些线段的长.

意大利数学家利提克斯(1514～1574)改变了前人的做法，即过去一般称AB为$\overset{\frown}{AD}$的正弦，把正弦与圆牢牢地连接在一起(如右图)，而利提克斯却把它称为$\angle AOB$的正弦，从而使正弦值直接与角挂勾.到欧拉(Euler)时，才令圆的半径为1，即置角于单位圆之中，从而使三角函数定义为相应的线段与圆半径之比.

§1.1.2 余弦定理

知识网点

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

重难点解析

1. 正确理解和运用余弦定理及由余弦定理变形的公式.
2. 利用余弦定理可以解以下两类三角形问题：
   (1)已知两边及其夹角，求第三边和其他角；
   (2)已知三边求角.

典型例题

[例 1] 在△ABC 中，(1)若 $b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45^\circ$，求 a 及角 C 的值；

(2)若 $A=60^\circ$，$a=7$，$b=5$，求边 c.

[分析] 题目(1)，条件中知道两边及其一个角；根据余弦定理易解 a 和解 c. 题目(2)，同理.

[解] (1)根据 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $2=a^2+1-\sqrt{2}a\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

(2)$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore 49=25+c^2-10c\cos60^\circ\Rightarrow c=8$.

[例 2] 已知△ABC 的一个角为 60°，面积为 $10\sqrt{3}\text{cm}^2$，周长为 20cm，求此三角形的各边长.

[分析] 此题所给的题设条件除一个角外，面积、周长都不是构成三角形的基本元素，故可设出边长，利用所给条件建立方程，通过方程组求得.

[解] 设△ABC 的三边长分别为 a、b、c，且 $B=60^\circ$，则有

$$\begin{cases}\cos60^\circ=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \dfrac{1}{2}ac\sin60^\circ=10\sqrt{3}\\ a+b+c=20\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}b^2=a^2+c^2-ac & ①\\ ac=40 & ②\\ a+b+c=20 & ③\end{cases}$$

由③得 $b^2=[20-(a+c)]^2=400+a^2+c^2+2ac-40(a+c)$ ④

由①代入④得 $400+3ac-40(a+c)=0$.

再将②代入上式得 $a+c=13$.

由 $\begin{cases}a+c=13\\ ac=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=5\\ c_1=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_2=8\\ c_2=5\end{cases}$

此时 $b_1=7$，$b_2=7$.

所以三角形三边长分别为 5cm、7cm、8cm.

[评注] 注意正、余弦定理的结构特征，灵活地把题目条件进行处理，构造正、余弦定理形式解题.

[例 3] 在△ABC 中，已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，AC 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$，求 $\sin A$ 的值.

[解] 设 E 为 BC 的中点，连接 DE，则 $DE\parallel AB$，且 $DE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，设 $BE=x$.

在△BDE 中，利用余弦定理得

$BD^2=BE^2+ED^2-2BE\cdot ED\cos\angle BED\Rightarrow 5=x^2+\frac{8}{3}-2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}x$.

解得 $x=1$，$x=-\frac{7}{3}$（舍）.

故 $BC=2$，从而 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=\frac{28}{3}$，即 $AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

又 $\sin B=\frac{\sqrt{30}}{6}$，故 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{\sqrt{30}}{6}}\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

[评注] 本小题主要考查正弦定理、余弦定理等基础知识.

[例4] 在△ABC 中，$BC=a$，$AC=b$，且 a、b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 两根，$2\cos(A+B)=1$.（1）求角 C 的度数；（2）求 AB 的长.

[分析] 由韦达定理出发，构造余弦定理的形式，从而解出边长.

[解] （1）$A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$.

由题意，$2\cos(A+B)=1\Rightarrow\cos(\pi-C)=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos C=-\frac{1}{2}$，∴$C=\frac{2}{3}\pi$.

（2）因为 a、b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}+2=0$ 的两根，所以 $\begin{cases}a+b=2\sqrt{3} & ①\\ ab=2 & ②\end{cases}$

将①式平方得 $a^2+2ab+b^2=12\Rightarrow a^2+b^2=8$.

根据余弦定理，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$，即

$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=8-2\times2\times\cos\frac{2}{3}\pi=10$

∴$AB=\sqrt{10}$.

实践与探究

1. 在△ABC 中，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，且 $\sin A=2\sin B\cos C$，那么△ABC 是（　　）
   A. 直角三角形　　B. 等边三角形　　C. 等腰三角形　　D. 等腰直角三角形
2. 在△ABC 中，$a^2-c^2+b^2=ab$，则角 $C=$________.
3. △ABC 中，$a=9$，$c=2\sqrt{3}$，$B=150°$，则 $b=$________.
4. 已知 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$________.
5. 在△ABC 中，已知 $CB=7$，$AC=8$，$AB=9$，试求 AC 边上中线的长.

6. 在△ABC 中，已知 $A>B>C$，且 $A=2C$，$b=4$，$a+c=8$，求 a、c 的长.

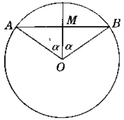
7. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2,BC=6,CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

8. 若三角形三边之长分别为 a、b 和 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$，求最大角.

9. 在$\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，证明：$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

知识拓展

正弦、余弦



在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 为角 A，B，C 的对边，R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

称此定理为正弦定理.

正弦定理是由伊朗著名的天文学家阿布尔·威发(940～998)首先发现与证明的. 中亚细亚人艾伯塔鲁尼(973～1048)给三角形的正弦定理作出了一个证明. 13 世纪的那希尔丁在《论完全四边形》中第一次把三角学作为独立的学科进行论述，首次清楚地论证了正弦定理. 他还指出，由球面三角形的三个角，可以求得它的三个边，或由三边去求三个角. 这是区别球面三角与平面三角的重要标志. 至此三角学开始脱离天文学，走上独立发展的道路. 托勒密(Claudius Ptolemy)的《天文学大成》第一卷除了一些初级的天文学数据之外，还包括了上面讲的弦表. 它给出一个圆从 0.5°到 180°每隔半度的所有圆心角所对的弦的长度. 圆的半径被分为 60 等分，弦长以每一等分为单位，以六十进制表达. 这样，以符号 crdα 表示圆心角 α 所对的弦长，例如，crd36°意思是：36°圆心角的弦等于半径的$\frac{37}{60}$(或 37 个小部分)，加上一个小部分的$\frac{4}{60}$，再加上一个小部分的$\frac{55}{3600}$.

公元 6 世纪初，印度数学家阿耶波多制作了一个第一象限内间隔 3°45′的正弦表，依照巴比伦人和希腊人的习惯，将圆周分为 360 度，每度为 60 分，整个圆周为 21600 份，然后据 $2\pi r=216000$，得出 $r=3438$(近似值)，然后用勾股定理先算出 30°、45°、90°的正弦之后，再用半角公式算出较小角的正弦值，从而获得每隔 3°45′的正弦长表. 其中用同一单位度量半径和圆周，孕育着最早的弧度制概念. 他在计算正弦值的时候，取圆心角所对弧的半弦长，比起希腊人取全弦长更近于现代正弦概念. 印度人还用到正矢和余弦，并给出一些三角函数的近似分数式.

1.2 应用举例

§1.2.1 正弦、余弦定理的应用(1)

知识网点

三角形的边角 —— 正弦定理 / 余弦定理 —— 测量距离、高度、角度

重/难/点/解/析/

1. 运用正、余弦定理解决实际问题时应注意：

(1)能正确理解如：仰角、俯角、方位角、视角及坡度、经纬度等有关名词和术语的确切含义.

(2)能准确理解题意，分清已知和所求，特别注意题中的隐含条件.

(3)要分析和研究问题中涉及的三角形，及其中哪些是已知量，哪些是未知量，应该选用正弦定理还是余弦定理进行求解，并能把实际问题转化为数学问题.

2. 应用解三角形解决实际问题的解题步骤：

(1)根据题意作出示意图；

(2)确定所涉及的三角形，搞清已知和未知；

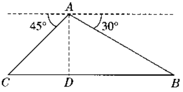
(3)选用合适的定理进行求解；

(4)给出答案.

典型例题

[例1] 在高出海平面200m的灯塔顶端，测得在正北与正南的两艘船的俯角分别是45°与30°，求这两艘船的距离.

[解] 如图，A 表示塔顶端，B 表示正南的船，C 表示正北的船，由题设 $AD=200\text{m}$，$B=30°$，$C=45°$，得：



$BD=\dfrac{AD}{\tan30°}$，$CD=\dfrac{AD}{\tan45°}$

$\therefore BC=BD+CD=200\sqrt{3}+200$

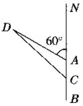
$=200(1+\sqrt{3})\approx546.42(\text{m})$

答：两船的距离约为546.42m.

[评注] 正确画出示意图，观察直角三角形的边角关系.

[例2] 已知甲船在 A 处、乙船在甲船的正南方向距甲船20海里的 B 处，乙船以 $10n$ mile/h 的速度向正北方向行驶，而甲船以 $8n$ mile/h 的速度由 A 处向北偏西60°方向行驶(如图)，问几个小时后甲、乙两船的距离最近？

[解] 设行驶 t 小时后乙船在 C 处、甲船在 D 处，则



$AC=20-10t$，$AD=8t$，这时有

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos120°=84t^2-240t-400$

可见，当 $t=\dfrac{240}{2\times84}=\dfrac{10}{7}$ 时，CD^2 最小，即 CD 最小.

答：行驶 $\dfrac{10}{7}$ 小时后，两船距离最近.

[评注] 利用余弦定理列出相应的二次函数，并由此解决二次函数的最值.

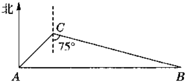
［例 3］ 某巡逻艇在 A 处发现北偏东 $45°$ 相距 $9n$mile 的 C 处有一艘走私船，正沿着南偏东 $75°$ 的方向以 $10n$mile/h 的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以 $14n$mile/h 的速度沿着直线方向追去，问巡逻艇应该沿什么方向去追？需要多少时间才能追赶上该走私船？

［解］ 如图，设巡逻艇经过 x 小时后在 B 处追上走私船，则

$CB=10x, AB=14x, AC=9, \angle ACB=75°+45°=120°$

$\therefore (14x)^2=9^2+(10x)^2-2\times9\times10x\cdot\cos120°$

$\therefore 32x^2-30x-27=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$ 或 $x=-\dfrac{9}{16}$（舍）



$\therefore BC=10x=15, AB=14x=21$

即 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC\sin120°}{AB}=\dfrac{15}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \angle BAC=38°13'$ 或 $141°47'$（舍）

又 $38°13'+45°=83°13'$.

答：巡逻艇应沿北偏东 $83°13'$ 的方向追赶，经过 1.5 小时追赶上该走私船.

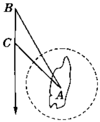
［评注］ 利用方程的思想解决余弦定理的问题.

［例 4］ 如图，海中小岛 A 周围 $38n$ mile 内有暗礁，船正向南航行，在 B 处测得小岛 A 在船的南偏东 $30°$，航行 $30n$ mile 后，在 C 处测得小岛 A 在船的南偏东 $45°$，如果此船不改变航向，继续向南航行，有无触礁的危险？

［解］ 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=30, B=30°, \angle ACB=180°-45°=135°$，$\therefore A=45°$.

由正弦定理，知：

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，$\therefore \dfrac{30}{\sin15°}=\dfrac{AC}{\sin30°}$



$\therefore AC=\dfrac{30\sin30°}{\sin15°}=60\cos15°=15\sqrt{6}+15\sqrt{2}$

$\therefore A$ 到 BC 所在直线的距离为：

$AC\sin45°=(15\sqrt{6}+15\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2}=15(\sqrt{3}+1)\approx40.98>38$（$n$ mile）.

$\therefore$ 不改变航向继续向南航行，无触礁的危险.

［评注］ 正弦定理的直接运用.

［例 5］ 如图，有两条相交成 $60°$ 角的直线 XX'、YY'，交点是 O，甲、乙分别在 OX、OY 上，起初甲离 O 点 3km，乙离 O 点 1km，后来两人同时用每小时 4km 的速度，甲沿 XX' 方向，乙沿 $Y'Y$ 的方向步行.

问：(1)起初，两人的距离是多少？

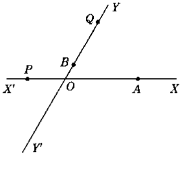
(2)用包含 t 的式子表示 t 小时后两人的距离？

(3)什么时候两人的距离最短？

［解］ (1)设甲、乙两人起初的位置为 A、B，则

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos60°$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\dfrac{1}{2}=7$



$\therefore$ 起初两人的距离为 $\sqrt{7}$km.

(2)设甲、乙两人 t 小时后的位置分别是 P、Q，则

$AP=4t, BQ=4t$.

当 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{4}$，$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos60°$

$=48t^2-24t+7$

当 $t>\dfrac{3}{4}$，$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cos120°$

$=48t^2-24t+7$

$\therefore PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}\ (t\geqslant 0)$

(3) $PQ^2=48t^2-24t+7=48(t-\frac{1}{4})^2+4$

$\therefore$ 当 $t=\frac{1}{4}$ 时，即在第 15 分钟末，PQ 最短.

答：在第 15 分钟末，两人的距离最短.

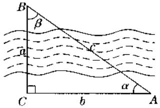
[评注] 利用函数思想解斜三角形.

实践与探究

1. 从地面上观察一建在山顶上的建筑物，测得其视角为 α，同时测得建筑物顶部仰角为 β，则山顶的仰角为（　　）

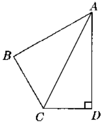
A. $\alpha+\beta$　　B. $\alpha-\beta$　　C. $\beta-\alpha$　　D. α

2. 如图，在河岸 AC 测量 BC 的宽度，测量下列四组数据，较适宜的是（　　）



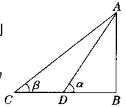
A. c 和 α　　B. c 和 b　　C. c 和 α　　D. b 和 β

3. 如图，在海中心一孤岛 D 的周围有 2 个观察站 A、C，已知观察站 A 在岛 D 的正北 5$n$mile 处，观察站 C 在岛 D 的正西方，现在海面上有一船 B，在 A 处测得其在南偏西 60°方向 4$n$mile 处，在 C 处测得其在北偏西 30°，则两观察测点 A 与 C 的距离为（　　）



A. $\sqrt{7}n$mile　　B. $2\sqrt{7}n$mile

C. $2\sqrt{3}n$mile　　D. $6n$mile



4. 如图，D、C、B 三点在地面的同一直线上，$DC=a$，在 D、C 两点测得 A 点仰角分别为 α、$\beta(\alpha>\beta)$，则 A 点离地面的高 AB 为________.

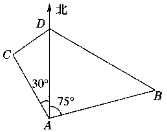
5. 海上有 A、B 两个小岛相距 10 海里．从 A 岛望 C 岛和 B 岛成 60°的视角，从 B 岛望 C 岛和 A 岛成 75°的视角．则 B、C 间距离为________.

6. 甲船在岛 B 的正南 A 处，$AB=10n$mile，甲船自 A 处以 4$n$mile/h 的速度向正北航行，同时乙船以 6$n$mile/h 的速度自岛 B 出发，向北偏东 60°方向驶去，则两船相距最近时经过了________min.

7. 如图，某货轮在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东 75°，距离为 $12\sqrt{6}n$mile，此处看灯塔 C 在货轮的北偏西 30°，距离为 $8\sqrt{3}n$mile，货轮由 A 处向正北航行到 D 处时，再看灯塔 B 在北偏东 120°，求：

(1) A 处与 D 处的距离；

(2) 灯塔 C 与 D 处的距离.



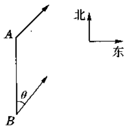
8. 在奥运会垒球比赛前,C 国教练布置战术时,要求击球手与连接本垒及游击手的直线成 15°的方向将球击出.根据经验及测速仪的显示,通常情况下球速为游击手最大跑速的 4 倍.问按这样的布置,游击手能不能接着球?

9. 在某海滨城市附近海面有一台风,据监测,当前台风中心位于城市 O 的东偏西θ($\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$)方向 300km 的海面 P 处,并以 20km/h 的速度向西偏北 45°方向移动,台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为 60km,并以 10km/h 的速度不断增大.问几小时后该城市开始受台风的侵袭?

10. 甲船由 A 岛出发向北偏东 45°的方向作匀速直线航行,速度为 $15\sqrt{2}n$ mile/h,在甲船从 A 岛出发的同时,乙船从 A 岛正南 $40n$ mile 处的 B 岛出发,朝北偏东 θ($\tan\theta=\frac{1}{2}$)的方向作匀速直线航行,速度为 $10\sqrt{5}$ n mile/h(如图).

(1)求出发后 3 小时两船相距多少 n mile?

(2)求两船出发后多长时间相距最近?最近距离为多少 n mile?



知识拓展

正切、余切 、正割、余割

著名的叙利亚天文学、数学家阿尔一巴坦尼(850～929)于920年左右,制成了自0°到90°相隔1°的余切(cotangent)表.

公元727年,僧一行受唐玄宗之命撰成《大行历》.为了求得全国任何一地方一年中各节气的日影长度,一行编出了太阳天顶距和八尺之竿的日影长度对应表.而太阳天顶距和日影长度的关系即为正切(tangent)函数.而巴坦尼编制的是余切函数表.而太阳高度(角)和太阳天顶距(角)互为余角,这样两人的发现实际上是一回事,但巴坦尼比一行要晚近200年.14世纪中叶,中亚细亚的阿鲁伯(1393～1449),原是成吉思汗的后裔,他组织了大规模的天文观测和数学用表的计算.他的正弦表精确到小数9位.他还制造了30°到45°之间相隔为1′,45°到90°的相隔为5′的正切表.

在欧洲,英国数学家、坎特伯雷大主教布拉瓦丁(1290? ～1349)首先把正切、余切引入他的三角计算之中.

正割(secant)及余割(cosecant)这两个概念由阿布尔·威发首先引入.*sec*这个略号是1626年荷兰数基拉德(1595～1630)在他的《三角学》中首先使用,后经欧拉采用才得以通行.正割、余割函数的现代定义亦是由欧拉给出的.欧洲的"文艺复兴"时期(14～16世纪),伟大的天文学家哥白尼(1473～1543)提出地动学说,他的学生利提克斯见到当时天文观测日益精密,认为推算更精确的三角函数值表刻不容缓.于是他定圆的半径为1015,以制作每隔10″的正弦、正切及正割值表.当时还没有对数,更没有计算器,全靠笔算,任务十分繁重.利提克斯和他的助手们以坚毅不拔的意志,勤奋工作达12年之久.遗憾的是,他生前没能完成这项工作,直到1596年,才由他的学生鄂图(1550～1605)完成并公布于世.1613年海得堡的彼提克斯(1561～1613)又修订了利提克斯的三角函数表,重新再版.后来英国数学家纳皮尔发现了对数,大大地简化了三角计算,为进一步制作出更精确的三角函数表创造了条件.