经/典/教/材/配/套/丛/书

配套·高教社·卢刚·《线性代数(第二版)》(面向21世纪课程教材)

线性代数
同步辅导与考研指津

毕　恺　尚德庆◎主编
刘剑平◎主审

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

经/典/教/材/配/套/丛/书

配套·高教社·卢刚·《线性代数(第二版)》(面向21世纪课程教材)

线性代数同步辅导与考研指津

毕 恺 尚德庆◎主 编
刘剑平◎主 审

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导与考研指津/毕恺,尚德庆主编;刘剑平主审.—上海:华东理工大学出版社,2008.1

(经典教材配套丛书)

ISBN 978-7-5628-2205-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①毕…②尚… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第178612号

经典教材配套丛书

线性代数同步辅导与考研指津

主　　编 / 毕　恺　尚德庆
主　　审 / 刘剑平
策　　划 / 周永斌
责任编辑 / 胡　景
责任校对 / 李　晔
封面设计 / 王晓迪
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址:上海市梅陇路130号,200237
电话:(021)64250306(营销部)
传真:(021)64252707
网址:www.hdlgpress.com.cn
印　　刷 / 江苏通州市印刷总厂有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 11.75
字　　数 / 290千字
版　　次 / 2008年1月第1版
印　　次 / 2008年1月第1次
印　　数 / 1—5050册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2205-9/O·189
定　　价 / 22.00元

前言 PREFACE

为了帮助经济类与管理类在校学生和自学者学好“线性代数”,为了给他们备考研究生提供一份复习资料,我们编写了由卢刚主编的面向21世纪课程教材《线性代数》第二版同步辅导.

本书首先将教材的内容进行归纳,重点难点进行剖析,典型例题进行解析,引出解题规律、方法和技巧;然后是课本习题全解;最后精选了本章近年来的考研真题.

本书在考研题和例题的解答过程中,对常用的方法、技巧及易错之处都有归纳总结,其中例题中所用的方法尽可能标准、简洁、巧妙.这些都是解答历届考研试题所用方法和技巧之精华.

卢刚主编的《线性代数》第二版是目前我国经济类专业使用量最大的一本数学教材,习题量大且具有深度和广度,A类题、例题的难度与考研是零距离接触.B类题更有所提高.因此该书被指定为研究生入学考试的复习教材.通过这些习题的学习将有利于促进学生全面掌握“线性代数”的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该教材的基本内容.

考虑到经济类与管理类的学生和自学者学习数学的困难,编此书时,在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外,还在不少例题后面增加了注意部分、解题思路和分析.总结解题经验,避免常犯错误.

本书主要是作为经济管理学科本科生的学习辅导书,也可供全日制本科大专院校、电大、职大等大学生参考.对于自学者和有志攻读经济管理类硕士研究生的青年,本书更是良师益友,对于从事“线性代数”教学的老师也有一定的参考价值.编者多年从事线性代数学科的教学,并多次使用《线性代数》第一版、第二版.在教学中积累了大量资料,汇集了多年考题,编写了本书.

编者

2007年10月

目录 CONTENTS

第一章 矩 阵

一、大纲要求

1. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵的定义和性质,了解对称矩阵、反对称矩阵的定义和性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵幂的性质.

3. 了解方阵行列式的概念和性质,掌握行列式的性质及行列式按行(列)展开定理计算行列式,了解方阵乘积的行列式的性质.

4. 理解可逆矩阵的概念、性质以及矩阵可逆的充要条件,理解伴随矩阵的概念,掌握伴随矩阵求矩阵的逆阵.

5. 了解矩阵的初等变换和初等矩阵及矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的逆阵和秩的方法.

6. 了解分块矩阵的概念,掌握分块矩阵的运算法则.

二、本章知识结构图

- 矩阵
  - 特殊方阵
    - 对角矩阵
    - 数量矩阵(单位矩阵)
    - 上三角矩阵与下三角矩阵
    - 对称矩阵、反对称矩阵
  - 矩阵的运算
    - 矩阵的加法及矩阵与数的乘法
    - 矩阵与矩阵的乘法
    - 矩阵的转置
  - 方阵的行列式
    - 二阶行列式,n 阶行列式定义
    - 行列式的性质,行列式的计算
    - * 拉普拉斯(Laplace)定理
  - 矩阵的分块
    - 矩阵分块的概念
    - 矩阵分块的运算
  - 可逆矩阵
    - 可逆矩阵的概念及矩阵可逆的充要条件
    - 用伴随矩阵法求逆矩阵
    - 可逆矩阵的性质
  - 矩阵的初等变换
    - 矩阵的初等变换与初等矩阵
    - 用初等变换法求逆矩阵
  - 矩阵的秩
    - 矩阵秩的概念
    - 用初等变换求矩阵的秩
  - 矩阵的应用
    - 在图论中的应用
    - 在概率统计中的应用

三、本章基本内容

1. 矩阵的概念

名　称	定　　义	备　注
矩　阵	由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为一个 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 记作 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$	1. 当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵 2. 零矩阵 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 就是元全为 0 的 $m\times n$ 矩阵 3. 一阶矩阵就是一个数 4. 本章矩阵都指实矩阵，即矩阵的元都是实数
对角阵	形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为对角矩阵	又记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$
数量矩阵	形如 $\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$ 的矩阵称为数量矩阵	当 $a=1$ 时，称为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$
三角矩阵	形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为上三角形矩阵 形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为下三角形矩阵	三角矩阵是方阵
对称阵与反对称阵	方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 如果 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵 如果 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵	三阶对称矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 三阶反对称矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. 矩阵的运算

名　称	定义及性质	备　注
矩阵相等	设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$ $A=B \Leftrightarrow$ 满足 $m=s,n=t$ 且 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$	设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&4&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&x&-3\\y&z&-2\end{pmatrix}$ 已知 $A=B$，则 $x=1,y=0,z=4$
矩阵加法	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 满足的运算法则： $A+B=B+A$； $(A+B)+C=A+(B+C)$； $A+O=O+A=A$ （其中 A,B,C 为矩阵，O 为零矩阵）	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$， 当 $m=s,n=t$ 时，称矩阵同型，只有同型矩阵才能相加 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为 A 的负矩阵 显然 $A+(-A)=(-A)+A=O$
数与矩阵的乘法	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 为实数，则 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$ 满足的运算法则（A,B 为矩阵，k,l 为实数）： $k(A+B)=kA+kB$； $(k+l)A=kA+lA$；$k(lA)=(kl)A$	
矩阵与矩阵的乘法	设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$ 其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,2\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 满足的运算法则： $(AB)C=A(BC)$； $A(B+C)=AB+AC$； $(B+C)A=BA+CA$； $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ （其中 A,B,C 为矩阵，k 为实数）	1. 矩阵 A 的列数＝矩阵 B 的行数，AB 才有意义 2. 矩阵乘法一般不满足交换律 3. 两个非零矩阵相乘可能为零矩阵，因此矩阵乘法不满足消去律 如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}-2&-2\\2&2\end{pmatrix}$
方阵的方幂	设 A 为 n 阶矩阵，对于正整数 m，有 $A^m=AA\cdots A=A^{m-1}A$ 规定 $A^0=E$ 设 k,l 为任意非负整数，则有 $A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$	一般地，$(AB)^k\neq A^kB^k(k>1)$ $A^k=O(k>1)$，也不一定有 $A=O$ 如 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O$，但 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
矩阵的转置	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 将 A 的行与列位置互换，得到 $n\times m$ 矩阵，称为 A 的转置，记为 A^T 即 $A^T=(a_{ji})_{n\times m}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$	满足的运算法则： $(A^T)^T=A$； $(A+B)^T=A^T+B^T$； $(kA)^T=kA^T$； $(AB)^T=B^TA^T$ （其中 A,B 为矩阵，k 为实数）

3. 方阵的行列式

名 称	定 义	注 意
二阶行列式	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,行列式记为 $\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$	$\boldsymbol{A}$ 的行列式记为 $\det\boldsymbol{A}$,又记为 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert$
n 阶行列式	1. 对于一阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{11})=a_{11}$,定义 $\det\boldsymbol{A}=a_{11}$ 2. 假设 $n-1$ 阶方阵的行列式已有定义,下面式①②递推地给出 n 阶方阵的行列式定义 3. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上的矩阵,划去元 a_{ij} 所在的第 i 行,第 j 列,$\boldsymbol{A}$ 中剩下的 $(n-1)^2$ 个元按原来排列顺序组成的 $n-1$阶矩阵的行列式,称为元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元 a_{ij} 的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$ 4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}$,简称为 n 阶行列式 定义 $\det\boldsymbol{A}=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ ① 式中,$A_{i1},\cdots,A_{in}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元的代数余子式$(1\leqslant i\leqslant n)$,故式①也称为 $\det\boldsymbol{A}$ 按第 i 行的展开式 5. 对称地,$\det\boldsymbol{A}$ 也可以定义为 $\det\boldsymbol{A}=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ ② 式中,$A_{1j},\cdots,A_{nj}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列各元的代数余子式$(1\leqslant j\leqslant n)$,故式②也称为 $\det\boldsymbol{A}$ 按第 j 列的展开式	由一个数组成的一阶方阵和它的行列式就是这个数本身,二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, 元 a_{11} 和 a_{12} 的余子式分别为 $M_{11}=a_{22}$,$M_{12}=a_{21}$, 代数余子式为 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=a_{22}$, $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-a_{21}$, 而 $\det\boldsymbol{A}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$ $=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ $\det\boldsymbol{A}$ 是一个数值,而 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 行 n 列的数表 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行列式记作 $\det\boldsymbol{A}$,也记为 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ 或 $\lvert(a_{ij})\rvert$
行列式的性质	设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 1. $\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\det\boldsymbol{A}$(即$\lvert\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert$) 2. 若交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某两行(列),得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则有 $\det\boldsymbol{B}=-\det\boldsymbol{A}$. (推论:若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行(列)元相同,则 $\det\boldsymbol{A}=0$) 3. 如果用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(列),则得到的矩阵的行列式等于 $\det\boldsymbol{A}$ 的 k 倍, 即 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\det\boldsymbol{A}(1\leqslant i\leqslant n)$ 推论 1:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一行(列)元全为零,则 $\det\boldsymbol{A}=0$ 推论 2:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行(列)的元成比例,则 $\det\boldsymbol{A}=0$ 4. 如果行列式的某一行(列)的每个元均表示为两个数的和,则该行列式等于两个行列式的和.即 $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ b_{i1} & \cdots & b_{in}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 5. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\det\boldsymbol{B}=\det\boldsymbol{A}$	利用行列式的性质将所给行列式化为上(下)三角形行列式,是计算行列式的基本思路之一

续 表

名 称	定 义	注 意
行列式展开的性质	**定理 1** 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则 (1) $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与第 k 行 $(k\neq i)$ 元的代数余子式乘积之和为零，即 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0\ (k\neq i)$ (2) $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列元与第 l 列 $(l\neq j)$ 元的代数余子式乘积之和为零，即 $a_{1j}A_{1l}+a_{2j}A_{2l}+\cdots+a_{nj}A_{nl}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{il}=0\ (l\neq j)$	
行列式展开的公式	**定理 2** 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则 (1) $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}\det\boldsymbol{A}, & i=k,\\ 0, & i\neq k;\end{cases}$ (2) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{il}=\begin{cases}\det\boldsymbol{A}, & l=j,\\ 0, & l\neq j\end{cases}$ $(i,k=1,2,\cdots,n;\ j,l=1,2,\cdots,n)$	
范德蒙德行列式	$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\ (n\geqslant 2)$	
k 阶子式、余子式和代数余子式	在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任意选定 k 行，k 列，位于这些行和列交叉点上的 k^2 个元按原来的顺序组成一个 k 阶行列式 M，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式 在 $\boldsymbol{A}$ 中划去这 k 行，k 列后，余下的元按原来的顺序组成一个 $n-k$ 阶行列式 N，称为 k 阶子式 M 的余子式 称 $\boldsymbol{B}=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$ 为 k 阶子式 M 的代数余子式， 其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k;j_1,j_2,\cdots,j_k$ 为 k 阶子式 M 在 $\boldsymbol{A}$ 中所在的行和列的标号	
拉普拉斯定理	在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任意取定 k 行 $(1\leqslant k\leqslant n)$，由这 k 行元组成的所有 k 阶子式 $M_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 与它们的代数余子式 $B_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 的乘积之和等于 $\det\boldsymbol{A}$，即 $\det\boldsymbol{A}=M_1B_1+M_2B_2+\cdots+M_tB_t$ 其中，$t=C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$	

4. 矩阵的分块

名 称	定 义	注 意
矩阵分块的概念	为便于分析和计算,常常把所讨论的矩阵看作是由一些小矩阵组成的.这些小矩阵称为子块,原矩阵分块后,就称为分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-5&1\\0&0&1&-2&-4\\ \hdashline 0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{array}\right)$	
分块矩阵的运算	1. 用分块矩阵作加法时,必须使对应的子块具有相同的行数和列数,即相加的矩阵的分块方式一致 2. 用数 k 与分块矩阵相乘时,k 应与每一个子块相乘 3. 利用分块矩阵计算矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}_{s\times n}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 时,应使左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分块方式与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块方式一致	相乘时,$\boldsymbol{A}$ 的各子矩阵分别左乘 $\boldsymbol{B}$ 对应的子矩阵
分块矩阵转置	分块矩阵转置不但要将行列互换,而且互换后的各子块都应转置,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}&A_{21}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{s1}^{\mathrm{T}}\\A_{12}^{\mathrm{T}}&A_{22}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{s2}^{\mathrm{T}}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\A_{1t}^{\mathrm{T}}&A_{2t}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$	
分块对角矩阵(或准对角形)	形如 $\begin{pmatrix}A_1&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&A_2&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&A_s\end{pmatrix}$,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 均为方阵,且其余子块均为零矩阵的分块矩阵,称为分块对角矩阵或准对角矩阵	
分块三角形矩阵	形如 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\\boldsymbol{0}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&A_{ss}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}A_{11}&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{ss}\end{pmatrix}$,其中 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵,分别称为分块上、下三角形矩阵 $\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\\boldsymbol{0}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&A_{ss}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_{11}&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{ss}\end{vmatrix}$ $=\det A_{11}\det A_{22}\cdots\det A_{ss}$	

5. 可逆矩阵

名　称	定　　义	注　意
可逆矩阵	对于数域 F 上的矩阵 A，如果存在数域 F 上的矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 可逆，B 为 A 的逆矩阵，记作 $A^{-1}=B$	1. 可逆矩阵一定是方阵 2. 若 A 可逆，则 A 的逆矩阵是唯一的
伴随矩阵	设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 为元 a_{ij} 的代数余子式$(i,j=1,\cdots n)$，则矩阵 $$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为矩阵 A 的伴随矩阵. 有 $AA^*=A^*A=(\det A)E$	
矩阵可逆充要条件	矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆的充分必要条件是 $\det A\neq 0$， 当 A 可逆时，$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$	可逆矩阵又称为非奇异矩阵或非退化矩阵
推论	设 A,B 均为 n 阶矩阵，并且满足 $AB=E$，则 A,B 都可逆，且 $A^{-1}=B,B^{-1}=A$	
可逆矩阵的性质	1. 如果 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 2. 如果矩阵 A 可逆，则转置矩阵 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 3. 如果矩阵 A 可逆，则对于非零常数 k，kA 也可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ 4. 如果矩阵 A 可逆，则 $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$	

6. 矩阵的初等变换

名　称	定　　义	注　意
矩阵的初等变换	设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则以下三种变换： (1) 交换 A 的某两行(列)； (2) 用一个非零的数 k 乘以 A 的某一行(列)； (3) 将 A 某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上称为矩阵 A 的行(列)初等变换	矩阵的行、列初等变换统称为矩阵的初等变换
初等矩阵	由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵， 1. 交换 E 的第 i,j 行(列)$(i<j)$，得到的初等矩阵记为 $P(i,j)$； 2. 用一个非零的数 k 乘以 E 的第 i 行(列)，得到的初等矩阵记为 $P(i(k))$； 3. 将 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或将 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列)$(i<j)$，得到的初等矩阵记为 $P(i,j(k))$	

续 表

<table>
<tr><th>名 称</th><th>定 义</th><th>注 意</th></tr>
<tr><td>初等矩阵的性质</td><td>(1) 初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵；
(2) 初等矩阵均为可逆矩阵，并且其逆矩阵仍为同类型的初等矩阵，其中 $\boldsymbol{P}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j)$；$\boldsymbol{P}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{-1}$；$\boldsymbol{P}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j(-k))$</td><td></td></tr>
<tr><td>定理</td><td>设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则
(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次行初等变换，相当于用一个 m 阶的初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$；
(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次列初等变换，相当于用一个 n 阶的初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$</td><td></td></tr>
<tr><td>等价</td><td>如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是等价的</td><td></td></tr>
<tr><td>等价标准形</td><td>任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 的矩阵等价，这个矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形</td><td></td></tr>
<tr><td>推论 1</td><td>对于任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得
$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>推论 2</td><td>n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\boldsymbol{E}_n$</td><td></td></tr>
<tr><td>推论 3</td><td>n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积</td><td></td></tr>
<tr><td>求逆矩阵的初等变换法</td><td>设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是 n 阶可逆矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积，设存在 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_k$，使 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k$，
也可写成 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{E}$ ①
用 $\boldsymbol{A}$ 右乘式①两边，得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{EA}$
即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{A}$ ②
由式①，式②可看出，对 $\boldsymbol{A}$ 作有限次行初等变换化为 $\boldsymbol{E}$，对 $\boldsymbol{E}$ 作相同的行初等变换就可以将 $\boldsymbol{E}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$
具体步骤：
(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 并排放在一起，组成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$；
(2) 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 作一系列行初等变换，将其左半部分化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则其右半部分就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\rightarrow\overset{\text{行初等变换}}{\cdots}\rightarrow(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$</td><td></td></tr>
</table>

7. 矩阵的秩

名　称	定　　义	注　意
矩阵的秩	如果数域 $\mathbf{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 存在一个 k 阶子式不为零,并且所有 $k+1$ 阶子式全为零,则称 $\mathbf{A}$ 的秩为 k,记作 $r(\mathbf{A})=k$	$r(\mathbf{A})\leqslant\min(m,n)$
梯矩阵	梯矩阵满足: (1) 元全为零的行(如果有的话),位于矩阵的最下面; (2) 自上而下各行中,从左边起的第一个非零元左边的零的个数,随着行数的增加而增加	
定理	一个 $m\times n$ 矩阵,均可以经过一系列行初等变换化为 $m\times n$ 梯矩阵	
定理	初等变换不改变矩阵的秩	
求矩阵秩的步骤	(1) 用行初等变换化矩阵为梯矩阵; (2) 梯矩阵的秩为非零行的行数,梯矩阵的秩就是原矩阵的秩	

8. 矩阵应用的两个例子

<table>
<tr><th>名　称</th><th>定　　义</th><th>注　意</th></tr>
<tr><td>邻接矩阵</td><td>

邻接矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{G})=(a_{ij})$ 的元 a_{ij} 按下列方法确定. 图 1-1 中若第 i 点与第 j 点之间有一条边,则 $a_{ij}=1$,否则 $a_{ij}=0$,一般情况下,$a_{ii}=0$ 除非第 i 点上有一个环(此时 $a_{ii}=1$)

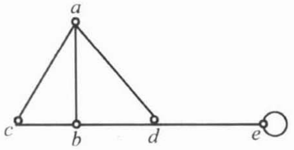

图 1-1

$$\mathbf{A}(\mathbf{G})=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$\mathbf{A}^k(\mathbf{G})$ 中第 i 行,第 j 列元($i\neq j$)的数值表示第 i 个点与第 j 个点之间长度为 k 的道路个数(k 为大于 1 的正整数)

</td><td></td></tr>
<tr><td>转移矩阵</td><td>

$\mathbf{A}$ 为表 1-1 的转移矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

表 1-1

<table>
<tr><th>今天 / 明天</th><th>晴</th><th>阴</th><th>下雨</th></tr>
<tr><td>晴</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>阴</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>下雨</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
</table>

设今天晴、阴、下雨的概率分别为 $p_1^{(0)},p_2^{(0)},p_3^{(0)}$,第 $n+1$ 天晴、阴、下雨的概率分别为 $p_1^{(n)},p_2^{(n)},p_3^{(n)}$,则　$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{A}^n\mathbf{P}^{(0)}$　①

其中 $\mathbf{P}^{(n)}=(p_1^{(n)},p_2^{(n)},p_3^{(n)})^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{P}^{(0)}=(p_1^{(0)},p_2^{(0)},p_3^{(0)})^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{A}^n$ 为 n 天后天气状况的转移矩阵,式①提供了由今天的天气概率预测 n 天后的天气概率的方法

</td><td>表 1-1 中的数据称为转移概率</td></tr>
</table>

四、重点难点剖析

重点 矩阵的运算，逆矩阵存在的条件及其求法，矩阵的初等变换和矩阵秩的概念；利用性质、展开法则计算行列式.

难点 矩阵的乘法，与矩阵的逆、矩阵的初等变换有关的证明，行列式计算.

五、典型例题解析

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，证明：当 $n\geqslant 3$ 时，恒有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，并求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

证明 直接计算得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$$

所以当 $n=3$ 时命题成立；

假设 $n-1$ 时命题成立，即 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-E$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

命题得证.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{96}+2(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\cdots=\boldsymbol{A}^2+49(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\\&=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

本题旨在考查矩阵概念以及加、减、方幂等矩阵运算，同时应用了数学归纳法解决了含有抽象幂次 $\boldsymbol{A}^n$ 的证明问题.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由于 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可逆，故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

本题旨在考查解矩阵方程，复习可逆的性质.

例 3 设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.