21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

解析几何

第四版

全程导学及习题全解

主编 任明明 张世金

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

解析几何

第四版

全程导学及习题全解

主编 任明明 张世金

编委 罗陨翌 彭江涛 宋振寰 刘彬彬 王子龙

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

解析几何全程导学及习题全解／任明明，张世金主编.
—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-389-0
Ⅰ.解... Ⅱ.①任...②张... Ⅲ.解析几何—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O182
中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第104013号

解析几何全程导学及习题全解

任明明 张世金 主编

出版者	**中国时代经济出版社**
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	880 × 1230　1/32
版　次	2007年9月第1版
印　次	2007年9月第1次印刷
印　张	8.875
字　数	270千字
印　数	1～5000册
定　价	11.00元
书　号	ISBN 978-7-80221-389-0

前　言

解析几何是高等院校理工科各个专业的重要基础课程，包括数学、物理学等学科的课程都要以解析几何为基础。更重要的是，解析几何的思想方法和几何直观特性可以为抽象的数学物理问题提供直观的模型和背景。

解析几何相对于其他课程，内容比较直观，只要在课堂上专心听讲，一般是可以听得懂的，但由于解析几何的习题需要一定的抽象思维能力，因此只了解基本的理论和方法，不辅以相应的技巧，是很难顺利应用理论和方法解出课后习题的。这些都给学生的学习带来不少困难。针对这一问题，为了帮助学生克服困难，使学生尽快掌握这门课程的思想方法，我们编写了这套辅导用书。

本书是吕林根，许子道编写的解析几何（第四版）的配套辅导用书，全书的编排严格与教材保持一致。每章都总结了本章的重点内容，这部分内容主要是介绍了基本定义和基本定理，以助于学生进一步熟悉内容。每章都有一些典型例题分析，这样可以帮助学生更好地理解教材内容。本书包括了教材中所有习题的解答，并且对每一道习题都给出了详细的解题步骤。

当然，任何参考书都只是启发思维的辅助工具，只有在经过独立思考之后再对照相应的参考教材，才能有所收获。因此希望读者能正确使用本书，达到提高数学素养和学好解析几何

的双重目的。当然限于编者的水平，本书一定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。对解析几何（第四版）教材作者吕林根，许子道老师表示衷心的感谢。

编　者

2007 年 5 月

目　　录

第一章　向量与坐标

1.1　本章重点内容概述

向量：既有大小，又有方向的量，或称矢量．一般我们把向量当作有向线段来理解．

向量的模：向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，记为 $|\boldsymbol{a}|$．

零向量：长度为零的向量，记为 0．

反向量：模相等而方向相反的两向量叫做互为反向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$．

共面向量：平行于同一直线的一组向量．零向量与任何共面的向量组共面．

向量的加法：对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1.1），即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

由此公式表示的向量加法法则称为三角形法则．

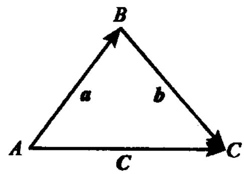

图 1.1

向量的减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

由三角形法则容易得到三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量．其几何意义是，三角形两边之和大于第三边．这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

平行四边形法则：如果以两个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，那么对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$．（如图 1.2）

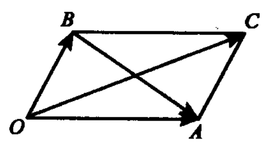

图 1.2

向量的加法满足以下规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$，

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量．

数乘：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同．当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反．我们称这种运算为数量与向量的乘法，简称为数乘．

单位化:任何非零的向量都可以变成单位向量,如 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

数乘满足以下运算规律:

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(结合律);

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数.

向量的线性组合:由向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 与实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所组成的向量

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_n\boldsymbol{a}_n,$$

叫做向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

线性相关与线性无关:对于 $n(n\geqslant 1)$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=0,$$

那么 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 叫做**线性相关**,否则叫做**线性无关**,即向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 叫做线性无关当且仅当上个式子中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

定理 1.1.1　两向量共线的充要条件是它们线性相关.

定理 1.1.2　三向量共面的充要条件是它们线性相关.

标架与坐标:空间中的一个定点 O,连同三个不共面的有序向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的全体,叫做空间中的一个**标架**,记做 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$,如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 都是单位向量,那么 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 叫做**笛卡儿标架**;$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两相互垂直的笛卡儿标架叫做**笛卡儿直角标架**,简称**直角标架**;在一般的情况下,$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 叫做**仿射标架**.

定理 1.1.3　向量的坐标等于其终点的坐标减去其始点的坐标.

定理 1.1.4　数乘向量的坐标等于这个数与向量的对应坐标的积.

设 P_1,P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1) 与 (x_2,y_2,z_2),则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

设 $\boldsymbol{a}=\{X,Y,Z\}$,那么

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda X,\lambda Y,\lambda Z\}.$$

定理 1.1.5　两向量和的坐标等于两向量对应的坐标的和.

定理 1.1.6　两上非零向量 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 共线的充要条件是对应坐标成比例,即

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

推论　三个点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$ 和 $C(x_3,y_3,z_3)$ 共线的充要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}.$$

定理 1.1.7　三个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$ 共

面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

推论　四个点 $A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

定理 1.1.8　设有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$（图 1.3），那么分有向线段 P_1P_2 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$的分点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

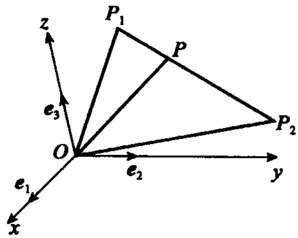

图 1.3

推论　设 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$，那么线段 P_1P_2 的中点坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

向量在轴上的射影：设向量$\overrightarrow{AB}$的始点 A 和终点 B 在轴 l 上的射影分别为点 A'和 B'，那么向量$\overrightarrow{A'B'}$叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的**射影向量**（图 1.4），记做射影向量$_l\,\overrightarrow{AB}$.

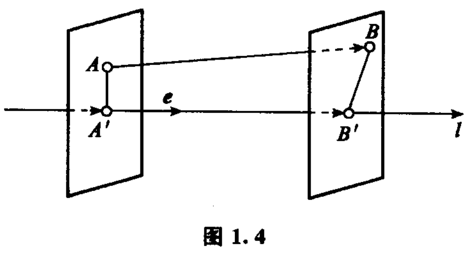

图 1.4

定理 1.1.9　向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦

$$\text{射影}_l\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,\theta=\angle(l,\overrightarrow{AB}).$$

推论　相等向量在同一轴上的射影相等.

定理 1.1.10　对于任何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有

$$\text{射影}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{射影}_l\boldsymbol{a}+\text{射影}_l\boldsymbol{b}.$$

定理 1.1.11　对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意实数 λ 有

$$射影_l(\lambda \boldsymbol{a})=\lambda 射影 \boldsymbol{a}.$$

两向量的数量积：两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们夹角的余弦的乘积叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积)，记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

定理 1.1.12 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量的数量积满足下面的运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$(关于数因子的结合律)；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律)；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2>0(\boldsymbol{a}\neq 0)$，

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ 为任意实数.

由(2)，(3)可得对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和任意实数 λ,μ，有

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

定理 1.1.13 在直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}.$$

两点距离公式：在直角坐标系下，空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离是

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

定理 1.1.14 非零向量 $\boldsymbol{a}=\{X,Y,Z\}$ 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

且 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

式中的 α,β,γ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的交角，即向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角.

定理 1.1.15 设空间中两个非零向量为 $\boldsymbol{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$ 和 $\boldsymbol{b}\{X_2,Y_2,Z_2\}$，那么它们夹角的余弦是

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

推论 向量 $\boldsymbol{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$ 与 $\boldsymbol{b}\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 相互垂直的充要条件是

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

两向量的向量积：两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称外积)是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且按 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.（图 1.5）

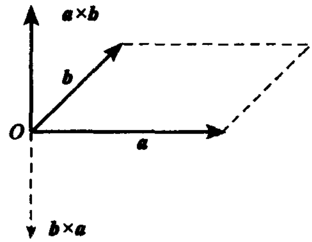

图 1.5

定理 1.1.16 两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模，等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理 1.1.17 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

向量积有以下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(5) $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$,

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ,μ 为任意实数.

定理 1.1.18 如果 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，那么

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left\{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

三向量的混合积：给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，如果先作前两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，再作所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 的数量积，最后得到的这个数叫做三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记做 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，或 $(\boldsymbol{abc})$.

定理 1.1.19 三个不共面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V.

定理 1.1.20 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{abc})=0$.

向量积的运算性质：

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，则有

(1) $(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})=-(\boldsymbol{bac})=-(\boldsymbol{cba})=-(\boldsymbol{acb})$;

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

定理 1.1.21 在右手直角坐标系下，如果 $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$，那么

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

三向量的双重向量积：给定空间三向量，先作其中两个向量的向量积，再作所得向量与第三个向量的向量积，那么最后的结果仍然是一向量，叫做所给三向量的双重向量积. 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的双重向量积记为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

双重向量积的性质：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$;

(2) 拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ 为任意向量.

1.2　典型例题分析与讲解

例 1　设 I 是三角形 ABC 的内心,O 是空间任意一点,试证

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

其中 a,b,c 分别是三角形 ABC 中角 A,B,C 所对的边长.

证法一　设 AD 与 BE 分别为三角形 ABC 的角 A 与 B 的角平分线,相交于 I. 那么关于角平分线的性质有(如图 1.6)

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b},\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c}.$$

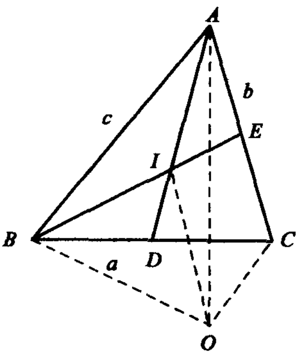

图 1.6

从而

$$\frac{BD}{BD+DC}=\frac{c}{b+c},$$

$$\frac{CE}{CE+EA}=\frac{a}{a+c},$$

即

$$\frac{BD}{BC}=\frac{c}{b+c},\frac{CE}{CA}=\frac{a}{a+c},$$

从而

$$\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CE}=\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA},$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}.$$

设

$$\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right),\qquad ①$$

$$\overrightarrow{BI}=\mu\overrightarrow{BE}=\mu\left(\overrightarrow{BC}+\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}\right).\qquad ②$$

因为

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right)-\mu\left(\overrightarrow{BC}+\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AB},$$

又因为

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$

所以

$$\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right)-\mu\left[\overrightarrow{BC}-\frac{a}{a+c}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\right]=\overrightarrow{AB},$$

整理得

$$\left(\lambda+\frac{\mu a}{a+c}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda c}{b+c}-\mu+\frac{\mu a}{a+c}\right)\overrightarrow{BC}=0.$$

因为$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$线性无关,因此有

$$\begin{cases}\lambda+\dfrac{\mu a}{a+c}-1=0\\ \dfrac{\lambda c}{b+c}+\dfrac{\mu a}{a+c}-\mu=0\end{cases},$$

解得
$$\lambda=\frac{b+c}{a+b+c},\mu=\frac{a+c}{a+b+c},$$

将 λ 的值代入①得

$$AI=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right),$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}&=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right)\\&=\frac{b+c}{a+b+c}\left[\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{c}{b+c}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\right]\\&=-\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}&=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.\end{aligned}$$

注　将 μ 的值代入(2)可得到同样的结果.

证法二　主要是利用角平分线的性质

因为 AD 是$\angle BAC$ 的角平分线,所以

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b},$$

所以
$$\frac{BD}{BD+DC}=\frac{c}{b+c},$$

得
$$BD=\frac{ac}{b+c}.$$

在$\triangle ABD$ 中,因为 BI 是$\angle ABD$ 的角平分线,所以

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a},$$

所以
$$\frac{AI}{AI+ID}=\frac{b+c}{b+c+a},$$

即
$$\frac{AI}{AD}=\frac{b+c}{a+b+c},$$

所以
$$\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD},$$

因为
$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA},$$

所以
$$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}=\frac{b+c}{a+b+c}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}),$$

而
$$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{b+c},$$

代入上式得
$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

证法三 如图 1.7 所示,在$\triangle ABC$中,设$\overrightarrow{BC}=a$,$\overrightarrow{CA}=b$,$\overrightarrow{AB}=c$,并分别取它们的单位向量$\boldsymbol{a}^0$,$\boldsymbol{b}^0$,$\boldsymbol{c}^0$,那么

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{a}^0,\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}^0,$$
$$\overrightarrow{AB}=C=c\boldsymbol{c}^0,$$

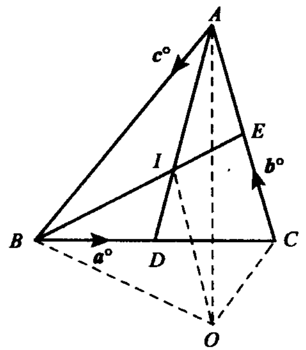

图 1.7

设两平分线 AD,BE 相交于 I,I 即为$\triangle ABC$的内心,所以有

$$\overrightarrow{AI}=\lambda[\boldsymbol{c}^0+(-\boldsymbol{b}^0)]=\lambda(\boldsymbol{c}^0-\boldsymbol{b}^0),\qquad ①$$
$$\overrightarrow{BI}=\mu[\boldsymbol{a}^0+(-\boldsymbol{c}^0)]=\mu(\boldsymbol{a}^0-\boldsymbol{c}^0),\qquad ②$$

又因为
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI},\qquad ③$$

①,②代入③得
$$c\boldsymbol{c}^0=\lambda(\boldsymbol{c}^0-\boldsymbol{b}^0)-\mu(\boldsymbol{a}^0-\boldsymbol{c}^0),$$

即
$$\mu\boldsymbol{a}^0+\lambda\boldsymbol{b}^0-(\lambda+\mu-c)\boldsymbol{c}^0=0.\qquad ④$$

又因为$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$,即

所以
$$\boldsymbol{c}^0=-\frac{1}{c}(a\boldsymbol{a}^0+b\boldsymbol{b}^0).\qquad ⑤$$

⑤代入④得
$$\mu\boldsymbol{a}^0+\lambda\boldsymbol{b}^0+(\lambda+\mu-c)\cdot\frac{1}{c}(a\boldsymbol{a}^0+b\boldsymbol{b}^0)=0.$$

化简得
$$[a\lambda+(a+c)\mu-ac]\boldsymbol{a}^0+[(b+c)\lambda+b\mu-bc]\boldsymbol{b}^0=0,$$

因为$\boldsymbol{a}^0 \not\parallel \boldsymbol{b}^0$,所以$\boldsymbol{a}^0$,$\boldsymbol{b}^0$线性无关,因此有
$$\begin{cases}a\lambda+(a+c)\mu-ac=0,\\(b+c)\lambda+b\mu-bc=0,\end{cases}$$

解得
$$\lambda=\frac{bc}{a+b+c},\mu=\frac{ac}{a+b+c},$$

将 λ 的值代入①得
$$\overrightarrow{AI}=\frac{bc}{a+b+c}(\boldsymbol{c}^0-\boldsymbol{b}^0),$$

所以
$$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}-\frac{\overrightarrow{CA}}{b}\right),$$
$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{c}-\frac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}}{b}\right),$$

化简即得
$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

注　将 μ 的值代入②将得到同样的结果.

例 2　如图 1.8 所示，在四面体 $ABCD$ 中，设 E 为棱 AD 的中点，G 是 $\triangle BCD$ 的重心，F 是 AG 上的一点，且 $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$，试证明 B,C,E,F 四点共面.

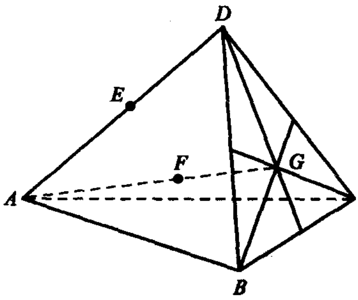

图 1.8

证法一　要证 B,C,E,F 四点共面，就是要证三向量 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}$ 共面，而

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB},$$

而
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}),$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF}&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}\\&=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BE})\cdot\overrightarrow{BF}\\&=\left[(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\\&=-\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})-\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\\&=-\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})+\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\\&=0.\end{aligned}$$

所以由定理 1.1.20 可知 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}$ 三向量共面，从而 B,C,E,F 四点共面.

证法二　取仿射坐标系 $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$，那么 A,B,C,D 的坐标为 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,1)$，从而有 $E\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，又因为

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}),$$

所以 G 的坐标为 $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，又因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$，所以 F 的坐标为 $F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，从而得

$$\overrightarrow{BC}=\{-1,1,0\},\overrightarrow{BE}=\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\},\overrightarrow{BF}=\left\{-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\},$$

所以

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}=0,$$

所以三向量$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}$共面，因而四点 B,C,E,F 四点共面.

例 3 证明四面体对边中点的连线交于一点且互相平分.

证明 如图 1.9 所示，设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB,CD 的中点 E,F 的连线为 EF，它的中点为 P_1，其余两组对边中点连线的中点分别为 P_2,P_3 下面只要证明 P_1，P_2,P_3 三点重合就可以了.取不共面的三向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_3$，先求$\overrightarrow{AP_1}$用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 线性表示的关系式.

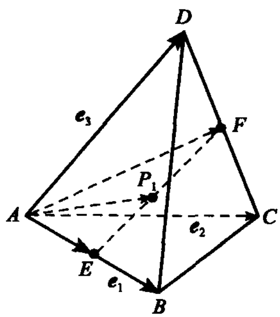

图 1.9

联结 AF，因为 AP_1 是$\triangle AEF$ 的中线，所以有

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}),$$

又因为 AF 是$\triangle ACD$ 的中线，所以又有

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

而
$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得
$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

同理可得
$$\overrightarrow{AP_i}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\qquad(i=2,3),$$

所以
$$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3},$$

从而知 P_1,P_2,P_3 三点重合，命题得证.

例 4 利用向量的方法证明柯西—施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right),$$

“=”成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.(设 $a_i\neq0,b_i\neq0,i=1,2,3$).

证明 在直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，

因为
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

而
$$-1\leqslant\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant1,$$

所以
$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

从而得
$$\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2},$$

所以
$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right),$$
"="成立当且仅当$|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|=1$,即向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线,而向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线当且仅当
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_2}{b_2},$$
所以"="成立当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_2}{b_2}$.

例 5　计算下列各题

(1) 已知三角形ABC的边长分别为3,4,5,且$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 已知$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直,且$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$与$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$垂直,求$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角;

(3) 已知$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=3,\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3},\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=5\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,问系数$\lambda$取何值时$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$垂直.

解　(1)因为$a+b+c=0$,且根据题意有
$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2=3^2+4^2+5^2=50,$$
因为
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0,$$
即
$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0,$$
所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2)=-25;$$

(2) 因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

所以
$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,$$
$$(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0.$$
即
$$3\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}^2=0 \qquad ①$$
$$3\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=0 \qquad ②$$
②－①得
$$\boldsymbol{b}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$
所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{b}^2}{12},$$
代入①得
$$3\boldsymbol{a}^2+\frac{\boldsymbol{b}^2}{3}-4\boldsymbol{b}^2=0,$$
得
$$\boldsymbol{a}^2=\frac{11}{9}\boldsymbol{b}^2,$$
所以
$$|\boldsymbol{a}|=\frac{\sqrt{11}}{3}|\boldsymbol{b}|,$$
而
$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{\boldsymbol{b}^2}{12}}{\sqrt{\frac{11}{3}}\boldsymbol{b}^2}=\frac{1}{4\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{44},$$