众创精品

依据国家教育部最新考试大纲编写

精品书伴你
十年寒窗
新思路唱响
辉煌前程

XINSILU

新思路

高考总复习

随书赠2007年高考真题精粹

魏安龙　张　亚　主编

数学

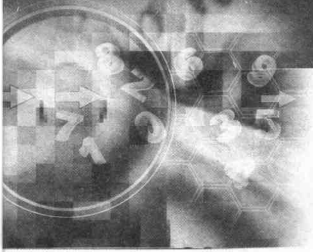
学生用书

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

XINSILU

新思路

高考总复习



随书赠2007年高考真题精粹

魏安龙　张　亚　主编

数学

学生用书

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

新思路　高考总复习

促膝小语（代前言）
——写给高考备战的莘莘学子

新思路，伴您苦读寒窗！

“年年岁岁花相似，岁岁年年人不同。”今年，我们继续组织北大附中、北师大二附中以及各名校长期致力于高中教学、高考研究的专家、教师，依据最新考试大纲和最新考试说明编写了这套《新思路　高考总复习用书》。

同学们，当您满怀热切地翻开这套丛书时，相信大家的心情一定是焦灼而又充满期盼的。谓之焦灼，只因高考在即，心绪定为紧张；谓之期盼，则因新书在手，心潮定为澎湃。是啊！高考，在中国作为掌握个人命运的罗盘，揪动着多少教师和家长的心，令多少考生食不甘味夜不安寝……

清代学人王国维在《人间词话》中侃侃谈及：古今成大事业、大学问者，必经过三种之境界，其一为“昨夜西风凋碧树。独上高楼，望尽天涯路”；其二为“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”；其三为“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”。上述三阕诗词的出处笔者自不必多言，想必同学们早已谙熟于心。此番化词入境，新意顿生，可谓妙趣。然先生之言，贵在点悟。实际上，“三境”道出的是探索学问的三个必经之途：从对理想的执著追求到辛勤跋涉的过程再到渐入佳境的欢欣。说到这里，我们相信同学们也一定会深有感触的，只不过大家尚处于前二阶段，至于末一阶段，则有待同学们在金秋九月领悟它的妙处！

古之治学之人推崇“业精于勤，荒于嬉；行成于思，毁于随”，学业说到底是一个循序渐进、日积月累的过程，只能是一分耕耘，一分收获，靠的是脚踏实地埋头苦干。成功无捷径，苦学＋巧学＝成功。我们深信同学们一定能从本书中领悟到更为深远的东西，同时，我们也虔诚地祝愿同学们百尺竿头，更进一步！

“工欲善其事，必先利其器。”本丛书囊括了高中阶段的九门课程，其体例、特点在丛书内容中均有体现，此处不再赘述。诸位参与编审的同仁一致坚信同学们若能系统扎实地领悟书中的精华，定能在知识的掌握、积累、运用等方面达到质的飞跃。同时，本编辑部几经斟酌，决定用“促膝小语”来替代“编写说明”，可谓用心良苦矣！“促膝”是期望与同学们倾心交谈，坦言心得；“小语”则是因篇幅短小，体裁所囿而言之。笔者曾在图书市场浏览过相关教辅图书的介绍材料，真可谓是百花齐放，万象峥嵘，然此“小语”有的只是朴素的思想，平实的笔调，权以之抛砖引玉吧！

本书容最新高考之资讯，集名家之心得。其独特之处在于：“高瞻远瞩、考学并重、思路新颖、授人以渔”。主要从基础知识、活跃思维、提高能力三方面入手，给同学们精到、精辟、精彩的指导。“复习指导”、“解题新思路”、“临场新技巧”、“基础能力训练”、“综合创新训练”、“单元综合检测”等栏目，为本书中的经典。希望同学们慧眼识珠，藉以攀登理想的峰巅！

最后，本套丛书在编写过程中承蒙有关领导、老师的大力支持，在此谨表谢意。同时因我们的水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请广大读者不吝指正。

《新思路》丛书编辑部

新思路　高考总复习
阅读向导

新思路，伴您苦读寒窗！

复习指导

"明确目标，重点复习"，指出高考考点，重点复习。

知识精要

"考点讲析，融会贯通"，具体知识点的讲述，全面覆盖知识点。

解题新思路

"引领思路，点拨方法"，例题的讲析注重前所未有，开辟一条最独特的解题思路。

热点透视

"名师讲析，关注时政"，政治生活中的重点热点问题，为你开阔视野，联系社会实际。

基础能力训练

"源于教材，夯实基础"，以教材为基础，扎实掌握最基本的知识点。

综合创新演练

"知识迁移，巩固提升"，在教材的基础上，对知识进行整合提升，使其达到能力的综合考查的效果。

单元综合检测

本套试卷均涵盖高考中的题型，分别包括：易、难、综合三个级别。

参考答案

参考答案准确无误，并有解析和解答过程，以便进行对照和检测。

目录

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函数

第三章 数列

目录

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第六章　不等式

目录

目录

第一章　集合与简易逻辑

本章综述

1. 在本章复习中应把握基础性知识，深刻理解基本知识点，基本数学思想和基本数学方法. 重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法，掌握数形结合的思想——用文氏图解题.

2. 高考中涉及本章的考题既有小型综合题，又有大型综合题，所以在复习中，第一要灵活掌握小型综合题型(如集合与映射、集合与自然数集、集合与不等式、集合与方程；充分条件及必要条件与三角、立体几何、解析几何中的知识点的结合等)；第二要领悟集合的思想方法在大型综合题中的运用.

第一单元　集合的概念

明晰目标，夯实基础

复习指导

◆考点精析

理解集合、交集、并集、子集、补集的概念；了解空集及全集的意义，以及属于、包含、相等等关系的意义；掌握集合相关术语及符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

◆知识精要

1. 集合是"某些确定对象的全体"

2. 集合中元素的三要素

(1)确定性

(2)互异性

(3)无序性

3. 集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法.

有限集用列举法表示，元素较多时也选用描述法，而无限集用描述法表示，区间法是数集的特有表示方法.

4. 集合概念中相关符号的含义

符号"$\in$"、"$\notin$"表示的是元素与集合之间的"从属"关系.

符号"$\subseteq$""$\subsetneqq$""$\not\subset$"表示的是集合与集合之间的"包含"关系.

5. 全集、子集、交集、并集、补集

(1)子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫集合B的子集，记作$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$.

(2)交集：由所有属于集合A，且属于集合B的元素组成的集合，叫做A、B的交集，记作$A\cap B$.

(3)并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，叫做A、B的并集，记作$A\cup B$.

(4)空集$\varnothing$是一个特殊的集合，是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，在解题中要经常注意对空集的讨论.

(5)设S是一个集合，A是S的一个子集(即$A\subseteq S$)，由S中所有不属于A的元素组成的集合，叫做S中子集A的补集(或余集)记作$C_SA=\{x|x\in S,且x\notin A\}$.

(6)如果集合S含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用U表示.

全集具有性质：$C_U\varnothing=U$，$C_UU=\varnothing$.

◆备考应对

在本节的复习中，应重点放在集合符号语言与文字语言的相互翻译上，另外，还要熟练掌握集合的图形表示(即韦恩图或称文氏图)、数轴表示等基本方法，并树立借助韦恩图、数轴解决集合问题的意识——"画图意识"或"数形结合意识"，还要明确集合元素的确定性、互异性和无序性在解题中的应用.

引领思路，点拨方法

解题新思路

◆题型解读

对本节知识的考查主要有三种题型，一是考查元素与集合关系的逻辑推理题；二是考查集合包含关系的题型；三是考查集合表示方法，重点是描述法，如$\{x|p(x)\}$、$\{(x,y)|p(x,y)\}$的区别.

◆高考命题走向

集合知识与整数集、不等式、方程、函数、曲线方程等知识相结合的题目在高考题中屡见不鲜，基本是每年必考，题目属中低档题目.

【例1】设集合$A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，若$a\in A$，$b\in B$，试判断$a+b$与$A$、$B$的关系.

【分析】本题是判断一个对象是不是某个集合的元素，也就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性. 由于集合是多种多样的，因而判断的方法也要因题而异.

解：$\because a\in A$，$\therefore a=2k_1(k_1\in\mathbf{Z})$；$\because b\in B$，$\therefore b=2k_2+1(k_2\in\mathbf{Z})$.

$\therefore a+b=2(k_1+k_2)+1$，又$k_1+k_2\in\mathbf{Z}$，$\therefore a+b\in B$. 从而$a+b\notin A$.

◆误区点拨

本题中集合 A 是偶数集，集合 B 是奇数集，由于 $a\in A$，$b\in B$，所以 $a+b$ 就是一个奇数加一个偶数，显然 $a+b$ 属于 B，不属于 A. 就是这样一个显而易见的事实，怎样用数学符号语言说清楚呢？把最简单的事实用数学语言说清楚，才叫数学证明题. 千万注意不能用说理代替证明.

【例2】设集合 $M=\{x|x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in N$，则 x_0y_0 与 M、N 的关系为________.

【分析】有些同学看到题目后，不明其意，无法下手. 那么到底整数集的什么知识可以用来解答这类问题呢？利用余数给整数集分类的方法是解答这类题目的知识点.

一个整数用2去除，余数只能是0或1，利用这两个余数就把整数集分成了两类，奇数集和偶数集，即 $\mathbf{Z}=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$. 这样任意一个整数不属于奇数集就属于偶数集. 如果一个整数用3去除，余数就为0、1或2，利用这三个余数就把整数集分成了三类，即 $\mathbf{Z}=\{x|x=3n,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，这样任何一个整数必属于三者之一. 依此类推，如果一个整数用4去除，得到的余数为0、1、2或3，这四个余数就把整数集分成了四类.

有了上述知识，我们就能明白题意了，即只需判断 x_0y_0 被3除所得的余数.

解：$\because (3m+1)(3n+2)$

$=9mn+6m+3n+2$

$=3(3mn+2m+n)+2$

$\therefore x_0y_0$ 被3除余2，$\therefore x_0y_0\in N$，$x_0y_0\notin M$.

◆临场新技巧

见到形如"$an+b$，其中 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$"的形式，就应想到利用余数分类的方法.

【例3】集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)|(x-3)^2+(y-4)^2=r^2,r>0\}$，若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素，则 r 的值是________.

【分析】集合与函数，集合与方程曲线的小型综合题，是高考考查集合知识的主要题型，解答这类题目的关键是对描述法给出的两种形式，$\{x|P(x)\}$ 和 $\{(x,y)|P(x,y)\}$ 的集合符号语言的正确识读.

解：依题意，$A\cap B$ 中有且只有一个元素，即两圆 $x^2+y^2=4$ 与 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ 外切或内切. 若两圆外切，则有 $(r+2)^2=3^2+4^2$，解得 $r=3$，或 $r=-7$（舍）；若两圆内切，则有 $(r-2)^2=3^2+4^2$，解得 $r=7$，或 $r=-3$（舍）.

故 $r=3$，或7.

◆误区点拨

混淆两种描述法 $\{x|P(x)\}$，$\{(x,y)|P(x,y)\}$ 表示的集合.

$\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 和 $\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 前者表示的是函数 $y=x^2+1,x\in\mathbf{R}$ 的值域，后者表示的是抛物线 $y=x^2+1$ 上的所有的点. 更有同学认为像这样的集合 $\{(1,2)\}$ 是两个元素，就大错特错了.

◆临场新技巧

解答集合问题时，要认准代表元素.

【例4】设满足条件 $P\subseteq\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{Z}\}$ 的集合 P 的个数记为 n，则 n 等于________.

【分析】在知识的交汇点上命题是高考的命题方向，本题就是一道集合与方程曲线相结合的题目.

解：$\because x,y\in\mathbf{Z}$，$\therefore \{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{Z}\}=\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$

集合中有4个元素，又 P 是 $\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{Z}\}$ 的子集，故 $n=2^4=16$.

事实上，集合 $\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{Z}\}$ 表示的是圆 $x^2+y^2=1$ 上的坐标为整数的点，同学们，如果能结合方程曲线知识来思考，也就能够感受到知识的交汇、知识的综合.

◆误区点拨

$\varnothing$ 是一个重要的集合，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，忘却对空集的讨论是一件令人遗憾的事情. 不知道你是否有漏空集的习惯.

◆临场新技巧

元素个数为 n 的集合的子集个数是 2^n，真子集的个数是 2^n-1.

【例5】已知集合 A 和 B 各有4个元素，$A\cap B$ 有1个元素，$C\subsetneqq A\cup B$，C 中含有3个元素且其中至少1个元素在 A 中，则不同的集合 C 有（　　）

A. 35个　　B. 31个　　C. 52个　　D. 34个

【分析】本题是集合与组合知识相结合的题目，方法灵活. 方法选择不当就会造成题目解错，甚至无法解出的后果. 恰当选择方法是高考的新要求，在学好基础知识，扎实基本功的同时，一定要注意解题策略水平的提高，否则由于方法选择不当，在某一道题目上耗时过多，都会丧失宝贵时间.

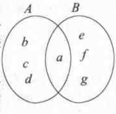


图1-1-1

解一：设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,e,f,g\}$. 如图1-1-1，因为 C 中至少有一个元素在 A 中，而 $a\in A\cap B$，所以对 a 进行分类讨论.

(1)若 $a\in C$，因为 $a\in A$，所以满足条件的另两个元素可由 A 中剩余的3个元素任取2个，共 C_3^2 种取法，对应 C_3^2 个集合；或从 B 中的其它3个元素中任取2个，共有 C_3^2 种取法，对应 C_3^2 个集合；或从 A、B 中其它元素各取1个元素，共有 $C_3^1\cdot C_3^1$ 种取法；对应 $C_3^1\cdot C_3^1$ 个集合. 共有 $C_3^1\cdot C_3^1+C_3^2+C_3^2=15$ 个集合.

(2)若 $a\notin C$，满足条件的3个元素，可由 A 中全取，有 C_3^3 种取法；或由 A 中取2个，B 中取1个，有 $C_3^2\cdot C_3^1$ 种取法；或由 A 中取1个，B 中取2个，有 $C_3^1\cdot C_3^2$ 种取法.

共有 $C_3^3+C_3^2\cdot C_3^1+C_3^1\cdot C_3^2=19$ 种取法，对应19个集合.

综上，满足条件的集合 C 共有 $15+19=34$ 个.

解二："至少1个元素在 A 中"的反面是 A 中一个元素也不取，即不符合要求的情况是3个元素都在 B 中，所以共有 $C_7^3-C_3^3=34$个.

◆临场新技巧

方法选择恰当就能使"小题小做"，从而为解答大题赢得时间. 方法选择不当，"小题大做"就会耗费时间，后面的大题就会没有足够的时间思考. 因而解题方法的选择是高考的新要求. 以下面这道题为例，看一看，你是怎么选择方法的.

题目：设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差为 $M-P=\{x|x\in M,且x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于

A. P　B. $M\cap P$　C. $M\cup P$　D. M

本题答案选B. 请同学自己完成，认真体会选择方法的重要性.

【例6】已知集合 $A=(-1,3,2m-1)$，集合 $B=(3,m^2)$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$____.

【分析】由题设 $m^2=2m-1$，得 $m=1$.

【答案】1

【特点】主要考查集合的运算.

源于教材.

基础能力训练

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x>1\}$，$P=\{x|x^2>1\}$，则下列关系中正确的是　(　　)

A. $M=P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M\subsetneqq P$　　D. $\complement_U M\cap P=\varnothing$

2. 若集合 $M=\{x||x|\leq 2\}$，$N=\{x|x^2-3x=0\}$，则 $M\cap N$ 是　(　　)

A. $\{3\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,3\}$

3. 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是　(　　)

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

4. 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_{S3}=I$，由下面论断正确的是　(　　)

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　　B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　　D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

5. 设集合 $I=\{x||x|<3,x\in\mathbf{Z}\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{-2,-1,2\}$，则 $A\cup(\complement_I B)=$　(　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

6. 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则　(　　)

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cap N=M$

C. $M\cup N=M$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

7. 对于实数 a,b,c,d 定义的运算"$*$"：$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$，那么 $(0,1)*(0,1)$ 等于________.

8. 集合 A 中有 m 个元素，若 A 中增加1个元素，它的子集个数将增加______个.

9. 已知 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=16\}$，$B=\{(x,y)|x-y=m\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围是______.

10. 若非空集合 $M\subset N$，则"$a\in M$ 或 $a\in N$"是"$a\in M\cap N$"的______条件

知识迁移.

综合创新演练

1. 已知集合 $M=\{x|x<3\}$，$N=\{x|\log_2 x>1\}$，则 $M\cap N=$　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

2. 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是　(　　)

A. 1　B. 3　C. 4　D. 8

3. 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$，则 $(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$　(　　)

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

4. 集合 $A=\{(x,y)|4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)|3x+2y=7\}$，满足 $C\subseteq A\cap B$ 的集合 C 的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1

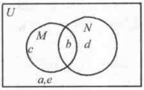
C. 2　　D. 4

5. 已知全集 $I=\mathbf{N}^*$，集合 $A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=4n,n\in\mathbf{N}^*\}$，则(　　)

A. $I=A\cup B$　　B. $I=\complement_I A\cup B$

C. $I=A\cup\complement_I B$　　D. $I=\complement_I A\cup C_I B$

6. 已知全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$M,N\subsetneqq U$，若 $M\cap N=\{b\}$，$(\complement_U M)\cap N=\{d\}$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{a,e\}$，则下列结论正确的是　(　　)



A. $c\in M$ 且 $c\in N$　　B. $c\in\complement_U M$ 且 $c\in N$

C. $c\in M$ 且 $c\in\complement_U N$　　D. $c\in\complement_U M$ 且 $c\in\complement_U N$

7. 定义 $A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}$，若 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{2,3,6\}$，则 $M-N=$　(　　)

A. M　　B. N

C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{6\}$

第二单元 集合的运算

复习指导

◆考点精析

1. 理解交集、并集的概念，能正确应用交集和并集的符号和表示形式；

2. 会求两个集合的交集和并集，并能解决一些实际问题；

3. 了解集合交并运算的一些简单性质；

4. 能熟练运用图形解决交并运算问题.

◆知识精要

1. 交集、并集的定义

①$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$；

②$A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$.

2. 交集、并集的性质(U为全集)

$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap U=A$；

$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup U=U$；

$A\cap B\subseteq A$，且$A\cap B\subseteq B,A\subseteq A\cup B$，且$B\subseteq A\cup B$；

$A\cup\complement_UA=U,A\cap\complement_UA=\varnothing$.

3. 其它拓展知识

①$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

②$\complement_UA\cap\complement_UB=\complement_U(A\cup B),\complement_UA\cup\complement_UB=\complement_U(A\cap B)$；

③含有n个元素的集合含有2^n个子集，2^n-1个真子集.

◆备考应对

1. 明确概念，记忆交集、并集、补集的定义，相关性质要深刻理解；

2. 归纳含参数集合问题，总结这类问题的讨论方法；

3. 领会数形结合思想的应用；

①用文氏图表示集合间的交、并、补关系；

②两个集合都是数集时，在数轴上画出它们的区间；

③集合中的元素以坐标形式给出时，能想像出满足条件的点所构成的图形，能画出示意图.

4. 会用性质转化问题的处理方向，如将$\complement_UA\cap\complement_UB$转化为$\complement_U(A\cup B)$，将$A\cup B=A$，转化为$B\subseteq A$等；

5. 注意集合问题与函数、方程、不等式的联系. 在练习中，注意知识的融会贯通.

解题新思路

◆题型解读

对本节知识的考查一般有两种题型：一是对集合的交、并、补运算的考查；二是将集合作为工具考查集合语言与集合思想的运用.

◆高考命题走向

集合的交集、并集、补集知识是高考考查的重点内容，题目基本都是在知识的交汇点上.

常与不等式、方程、函数的定义域、值域、曲线方程等综合，属小型综合题. 考查的主要思想方法首推“数形结合”思想，其次是等价转化的思想.

【例1】已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\},A=\{2,4,5,7\},B=\{3,4,5\}$，则$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=$ (　　)

A. $\{1,6\}$　　B. $\{4,5\}$

C. $\{2,3,4,5,7\}$　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

【分析】$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,6,7\}$

【答案】D

【特点】主要考查集合的运算.

【例2】设集合$P=\{x|x^2-4x-5<0\},Q=\{x|x-a\leqslant0\}$，

(1)若$P\cap Q=\varnothing$，求实数a的取值范围；

(2)若$P\subset Q$，求实数a的取值范围.

【分析】本题是以集合知识为背景，结合不等式考查讨论参数取值范围的能力，利用画数轴图的方法可使问题顺利解出.

解：$P=\{x|-1<x<5\},Q=\{x|x\leqslant a\}$，

(1)由图1-2-1易知，当$a\leqslant-1$时，$P\cap Q=\varnothing$.

(2)由图1-2-2易知$a\geqslant5$时，$P\subset Q$.

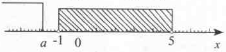


图1-2-1

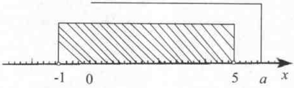


图1-2-2

◆误区点拨

讨论含参数的集合的包含关系时，端点值能否取到，是部分同学常“马虎”的问题，可以通过代入端点值后，写出具体集合检验的方法来避免出错.

◆临场新技巧

(1)如果讨论的是两个数集之间的关系，可以画数轴图帮助思考，在讨论中要特别注意区间的端点是否在所求的范围.

(2)见到关系式$M\cap N=N$应能立刻想到转化为$N\subseteq M$，即N是M的子集；见到关系式$M\cup N=N$，应能立刻想到转化为$M\subseteq N$，M是N的子集. 不能混淆子集的性质.

【例3】已知$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\},C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，若$\varnothing\subsetneqq A\cap B,A\cap C=\varnothing$，求$a$的值和集合$A$.

【分析】本题考查交集的性质，条件$\varnothing\subsetneqq A\cap B$的含义是——$\varnothing$是集合$A\cap B$的真子集，因而$A\cap B$一定是非空集合，

$A\cap C=\varnothing$的含义为A、C没有公共元素,求出参数.

解:$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{2,3\}$,

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$.

$\because A\cap C=\varnothing$,$\therefore -4\notin A,2\notin A$,

又$\varnothing\subsetneqq A\cap B$,$\therefore A\cap B\neq\varnothing$.$\therefore 3\in A$.

于是得$9-3a+a^2-19=0$,解得$a=5$,或$a=-2$.

当$a=5$时,$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,与$A\cap C=\varnothing$矛盾.

$\therefore a=-2$. 此时$A=\{-5,3\}$.

◆误区点拨

一些同学忽视对集合性质的记忆和理解,在看到$\varnothing\subsetneqq A\cap B$和$A\cap C=\varnothing$这样的符号语言时,不理解含义导致了错解. 因而复习时一定要深刻理解交、并的性质.

交、并集概念在与方程的解集综合出题时,有一类题目将逻辑知识也综合了进来,现摘一例,以引起同学们的重视.

题目:如果方程$ax+b=0$的解集为A,$cx+d=0$的解集为B,利用A、B表示:

(1)$(ax+b)(cx+d)=0$的解集;

(2)$(ax+b)(cx+d)\neq0$的解集.

解:(1)$\{x|(ax+b)(cx+d)=0\}=\{x|ax+b=0\}\cup\{x|cx+d=0\}=A\cup B$.

(2)$\{x|(ax+b)(cx+d)\neq0\}=\{x|ax+b\neq0\}\cap\{x|cx+d\neq0\}=C_{\mathbf{R}}A\cap C_{\mathbf{R}}B$.

【例4】已知$A=\{(x,y)|x^2+y^2=16\}$,$B=\{(x,y)|x-y=m\}$,若$A\cap B=\varnothing$,则实数m的取值范围是________.

【分析】本题是在集合的背景上,考察直线和圆的位置关系,是集合与解析几何的综合题型. 若能结合解析几何的知识画出曲线,就能使问题直观、简捷得解.

解一:集合A表示圆心在原点,半径为4的圆,集合B表示斜率为1的直线系,要使$A\cap B=\varnothing$,只要直线和圆没有交点即可. 也即方程组$\begin{cases}x^2+y^2=16\\x-y=m\end{cases}$无解. 消去$y$得,$2x^2-2mx+m^2-16=0$.

由$\Delta=4m^2-8(m^2-16)<0$,得$m>4\sqrt{2}$或$m<-4\sqrt{2}$

故m的取值范围是$(4\sqrt{2},+\infty)\cup(-\infty,-4\sqrt{2})$.

解二:如图1-2-3,$-m$的几何意义是直线$y=x-m$在y轴上的截距,观察图形可得$-m>4\sqrt{2}$或$-m<-4\sqrt{2}$,即$m>4\sqrt{2}$或$m<-4\sqrt{2}$.

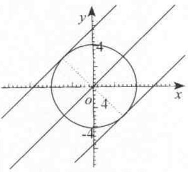


图1-2-3

◆误区点拨

对集合与方程曲线结合的知识不能透彻理解,数形结合的能力较弱,只会用代数方法处理,导致方法选择不当,会造成在一道题上用时过多的局面.

◆临场新技巧

集合与解析几何结合的综合题,可借助图形帮助思考,直观地获得解答.

源于教材,

基础能力训练

1. 已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{3,4,5\}$,则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{1,6\}$

B. $\{4,5\}$

C. $\{2,3,4,5,7\}$

D. $\{1,2,3,6,7\}$

2. 已知集合$M=\{x|\frac{x}{(x-1)^3}\geqslant0\}$,$N=\{y|y=3x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,则$M\cap N$等于 ( )

A. $\varnothing$　B. $\{x|x\geqslant1\}$

C. $\{x|x>1\}$　D. $\{x|x\geqslant1$或$x<0\}$

3. 设集合$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant2\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant4\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $[0,2]$　B. $[1,2]$

C. $[0,4]$　D. $[1,4]$

4. 集合$P=\{x|x^2-16<0\}$,$Q=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,则$P\cap Q=$ ( )

A. $\{-2,2\}$　B. $\{-2,2,-4,4\}$

C. $\{-2,0,2\}$　D. $\{-2,2,0,-4,4\}$

5. 已知集合$A=\{x|-3\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\{x||x|\leqslant2\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$

B. $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$

C. $\{x|-3\leqslant x\leqslant2\}$

D. $\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$

6. 设全集为$\mathbf{R}$,集合$A=[2,+\infty)$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,则$B\cap\complement_{\mathbf{R}}A=$ ( )

A. $\{1,2\}$　B. $\{0,1\}$

C. $\{0\}$　D. $\varnothing$

7. 已知集合$A=\{x|-3\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\{x||x|\leqslant2\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$　B. $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$

C. $\{x|-3\leqslant x\leqslant2\}$　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$

8. 已知全集$I=\{2,3,5,7,11\}$,$A=\{2,|a-5|,7\}$,$\complement_I A=\{5,11\}$,则a的值为______.

9. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$,若$A$中元素至多有一个,则$a$的取值范围是__________.

10. 设集合$A=\{(x,y)|a_1x+b_1y+c_1=0\}$,$B=\{(x,y)|a_2x+b_2y+c_2=0\}$,则方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$的解集是__________,方程$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

新思路札记

第一章

的解集是________.

11. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(m+2)x+1=0\}$，若 $A\cap\{$正实数$\}=\varnothing$，则实数 m 的取值范围是________.

12. 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合：

①$f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$；

②若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$.

试问：定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $g(x)=x^2+2x-1$ 是否属于集合 M？并说明理由.

13. 设 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$ 问：是否存在自然数 k,b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，试证明你的结论.

知识迁移

综合创新演练

1. 若集合 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}$，$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cap P=$ ( )

A. $\{y\mid y>1\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant 1\}$

C. $\{y\mid y>0\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant 0\}$

2. 已知集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，那么下列各式中一定成立的是 ( )

A. $A\cap B=A\cap C$　　B. $B=C$

C. $B\subseteq C$ 或 $C\subseteq B$　　D. 以上都不对

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A=\{x\mid |x-1|>2\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B$ ( )

A. $[-1,4)$　　B. $(2,3)$

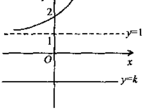
C. $(2,3]$　　D. $(-1,4)$

4. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$，且 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$，$g(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集 ( )

A. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　B. $\mathbf{R}$

C. $\varnothing$　　D. $\{x\mid x<1$ 或 $x>2\}$

5. 集合 $P=\{(x,y)\mid y=k,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=a^x+1,x\in\mathbf{R},a>0$，且 $a\neq 1\}$，已知 $P\cap Q=\varnothing$，那么实数 k 的取值范围是 ( )



A. $(-\infty,1)$

B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$

D. $(-\infty,+\infty)$

6. 集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2},x,y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x=1,y\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{(1,0)\}$　　B. $\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$

C. $\{1,0\}$　　D. $\varnothing$

7. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，$P=\{x\mid f'(x)>0\}$，若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

8. 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

9. 设 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有 ( )

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$

C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

10. 已知 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$，若 $A\cup B=A$，实数 a 的取值集合为______.

11. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant 1\}$，集合 $B=\{x\mid \lg(x^2+5)>\lg 6x\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$________.

12. 已知二次函数 $f(x)=2x^2-(a-2)x-2a^2-a$，若在区间 $[0,1]$ 内至少存在一个实数 b，使 $f(b)>0$，则实数 a 的取值范围是________.

13. 设集合 $A=\{x\mid |x|<4\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$，则集合 $\{x\mid x\in A$，且 $x\notin A\cap B\}=$________.

14. 设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid \cos\dfrac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\}$. 则 $A\cap B$ 的元素个数为______.

15. 已知 $A=\{x\mid (x+1)(2-x)<0\}$，$B=\{x\mid 4x+a<0\}$，当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是________.

第三单元 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

复习指导

◆考点精析

1. 理解$|ax+b|<c$与$|ax+b|>c(c>0)$型不等式的概念，并掌握它们的解法；

2. 了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系；

3. 掌握一元二次不等式的解法.

◆知识精要

一、含绝对值不等式的解法

1. 实数绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a,(a>0)\\0,(a=0)\\-a,(a<0)\end{cases}$$

对$a,b\in\mathbf{R}$,有$|ab|=|a|\cdot|b|$,$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$.

对$x\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}^+$,有$|x|<a\Rightarrow x^2<a^2\Rightarrow -a<x<a$.

2. 含绝对值不等式的解法

(1)$|x|<c\Rightarrow\begin{cases}-c<x<c,(c>0)\\\varnothing,(c\leqslant0).\end{cases}$

(2)$|x|>c\Rightarrow\begin{cases}x>c,\text{或}x<-c(c>0)\\x\neq0,(c=0)\\\mathbf{R},(c<0)\end{cases}$

注意理解“$|x|$”中的x可以是任意有意义的数学式子$f(x)$,“c”可以是实数，也可以是任意有意义的数学式子$g(x)$，因此

$|f(x)|<g(x),g(x)>0\Rightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$,

$|f(x)|>g(x)\Rightarrow f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$.

利用换元的思想，可得

$|ax+b|<c(c>0)\Rightarrow -c<ax+b<c$;$|ax+b|>c(c>0)\Rightarrow ax+b>c$,或$ax+b<-c$.

3. 解含绝对值的不等式的基本思路是去掉绝对值，将含有绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式求解.

二、一元二次不等式的解法

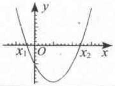
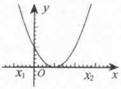
1. 一元二次不等式的标准形式是$ax^2+bx+c>0$,或$ax^2+bx+c<0$,其中$a>0$. 要求一元二次不等式的解集，应该先将其化为标准形式.

2. 从函数的观点看，一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集，就是一元二次函数$y=ax^2+bx+c(a>0)$在x轴上方的点的横坐标的集合. 而一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a>0)$的根就是相应的二次函数与x轴交点的横坐标，因此要解一元二次不等式，只要先解相应的一元二次方程即可.

3. 一元二次不等式的解集是根据二次函数、二次方程的有关知识分析而得出的，利用二次函数图象的直观性研究一元二次不等式的解集，具有直观形象的特点.

4. 一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$的图象解法.

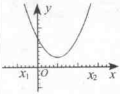
一元二次不等式图象解法表

判断Δ符号	求解方程根	作出二次函数图象	确定不等式的解集	
$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$ax^2+bx+c>0(a>0)$	$ax^2+bx+c<0(a>0)$
$\Delta>0$	x_1,x_2 $(x_1<x_2)$		$\{x\mid x<x_1,\text{或}x>x_2\}$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$
$\Delta=0$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$		$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$\varnothing$

新思路札记

第一章

续表

判断Δ符号	求解方程根	作出二次函数图象	确定不等式的解集	
$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$ax^2+bx+c>0(a>0)$	$ax^2+bx+c<0(a>0)$
$\Delta<0$	没有实根		**R**	$\varnothing$

对于 $a<0$,应首先将一元二次不等式的二次项系数化为正数,然后再求解.

◆备考应对

1. 绝对值是一个重要的概念,对绝对值不等式的复习,应以提高化简绝对值的能力为主;

2. 一元二次不等式是最常见的基础不等式,在求函数的定义域、值域、单调区间时,都需要解有关的不等式,可以说解不等式是运算能力的最直接体现,一定要夯实基础,避免"卡壳";

3. 一元二次不等式的知识经常和方程、集合、函数相结合在一起出题,也常结合实际问题构成混和组解决问题,所以应在这些知识的结合点上加强练习.

引领思路、点拨方法

解题新思路

◆题型解读

对绝对值不等式的考查主要包括三种题型:一是绝对值的"概念型"题,常以选择题的形式出现;二是解含绝对值符号的不等式;三是综合题,主要是含参数的一元二次不等式的解法;但要注意在解决各类问题中都会涉及到解不等式的问题.

◆高考命题走向

绝对值是一个重要概念,在高考中是常考的内容,绝对值不等式大都属中档要求,考查化简绝对值的能力,而一元二次不等式是最常见的基础不等式,在历年的高考中都涉及到解不等式的问题.

【例1】解下列绝对值不等式

(1) $|2x+3|>1$;(2) $|5-3x|<7$.

【分析】对于 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式,不妨称为"公式型",宜用公式直接求解,此类题目属于扎实基本功的题型,通常与集合运算综合在一起出题.

解:(1) $|2x+3|>1\Rightarrow 2x+3>1$,或 $2x+3<-1\Rightarrow x<-2$,或 $x>-1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x<-2$,或 $x>-1\}$.

(2) $|5-3x|<7\Rightarrow -7<5-3x<7\Rightarrow -12<-3x<2\Rightarrow 4>x>-\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|-\dfrac{2}{3}<x<4\}$.

◆临场新技巧

注意理解下表,正确求解.

不等式形式	去掉绝对值后的形式	解的含义区别
$\|ax+b\|<c$	$-c<ax+b<c$	$\{x\|ax+b>-c\}\cap\{x\|ax+b<c\}$
$\|ax+b\|>c$	$ax+b<-c$,或 $ax+b>c$	$\{x\|ax+b<-c\}\cup\{x\|ax+b>c\}$

【例2】已知集合 $A=\{x||x|<1\}$,$B=\{x||5-2x|>5\}$,求 $A\cap B$.

【分析】本题是含绝对值的不等式与集合相结合的题目,解的情况较为复杂,画出数轴是正确取出解集的方法.

解:集合 $A=\{x||x|<1\}=\{x|-1<x<1\}$,

$B=\{x||5-2x|>5\}=\{x||2x-5|>5\}=\{x|2x-5>5$,或 $2x-5<-5\}=\{x|x>5$,或 $x<0\}$.

在数轴上画出各解集区间,如图 1-3-1,可得:$A\cap B=\{x|-1<x<0\}$.

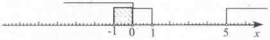


图 1-3-1

◆误区点拨

画数轴图取解集时,有同学经常弄不清"或"的意义,导致错误. 为避免这种情况可以用几种颜色的笔迹画,所有笔迹相交的地方就是所取解集区间.

【例3】解不等式 $1<|2x+1|\leqslant 3$.

【分析】本题是双边不等式,思路之一是根据不等式的定义,分两种情况去掉绝对值符号,转化为与之等价的不含绝对值的不等式组;思路之二是先将不等式转化为等价的不等式组,再利用 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型的不等式的解法逐一求解.

解一:根据绝对值定义,原不等式同解于下面的不等式组

$\begin{cases}2x+1\geqslant 0\\1<2x+1\leqslant 3\end{cases}$,或 $\begin{cases}2x+1<0\\1<-(2x+1)\leqslant 3\end{cases}$,$\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{1}{2},\\0<x\leqslant 1\end{cases}$

或$\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\-2\leqslant x<-1\end{cases}$,⇒$\{x|0<x\leqslant1\}\cup\{x|-2\leqslant x<-1\}$.

解二:原不等式可化为

$\begin{cases}|2x+1|\leqslant3\\|2x+1|>1\end{cases}$,⇒$\begin{cases}-3\leqslant2x+1\leqslant3\\2x+1>1\text{ 或 }2x+1<-1\end{cases}$,⇒

$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant1\\x>0,\text{或 }x<-1\end{cases}$,

在数轴上画出各区间(如图1-3-2),得解集$\{x|0<x\leqslant1\}\cup\{x|-2\leqslant x<-1\}$.

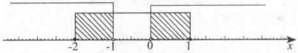


图1-3-2

◆误区点拨

在去掉绝对值的解法思路中,有同学经常忘记去绝对值的前提条件,如下述过程.

当$x\geqslant-\frac{1}{2}$时,原不等式可以化为$1<2x+1\leqslant3$,

$\therefore 0<x\leqslant1$;当$x<-\frac{1}{2}$时,原不等式可化为$1<(2x+1)\leqslant3$,

$\therefore -2\leqslant x<-1$;

故原不等式解集为$\{x|0<x\leqslant1\}\cup\{x|-2\leqslant x<-1\}$.

这里的条件$x\geqslant-\frac{1}{2}$和$x<-\frac{1}{2}$起什么作用呢?考虑了没有呢?

◆临场新技巧

形如$m<|ax+b|<n(m>0,n>0)$型的不等式,一个不等式中含有两个不等号,不是我们熟悉的形式,这时的思维方向应是怎样利用转化的思想,转化为熟悉的不等式,再求解.对于含绝对值的双边不等式,也可以利用$a\leqslant|x|\leqslant b\Rightarrow-b\leqslant x\leqslant-a$,或$a\leqslant x\leqslant b$求解.

【例4】解不等式$|x+1|>2-x$.

【分析】本题是形如$|ax+b|<mx+n$,$|ax+b|>mx+n$(其中m,n为常数,且$m\neq0$)型不等式,对于$mx+n$,可以理解为$|ax+b|<c$与$|ax+b|>c$型不等式中c为代数式的情况.

解一:原不等式同解于下面的不等式组

$\begin{cases}x+1\geqslant0\\x+1>2-x\end{cases}$,或$\begin{cases}x+1<0\\-(x+1)>2-x\end{cases}$,⇒$\begin{cases}x\geqslant-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}$

或$\begin{cases}x<-1\\-1>2\end{cases}$,⇒$\{x|x>\frac{1}{2}\}\cup\varnothing=\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

解二: $|x+1|>2-x\Rightarrow x+1>2-x$,

或$x+1<-(2-x)\Rightarrow x>\frac{1}{2}$.

本题型可以和一次函数的图象建立联系,是绝对值不等式与函数的结合点.

设$y_1=|x+1|$,$y_2=2-x$,作出两函数图象(图1-3-3)

观察图象,使不等式成立的x的范围,需要y_2的图象在y_1的图象上方.由$x+1=2-x$解得$x=\frac{1}{2}$,由图象可知不等式的

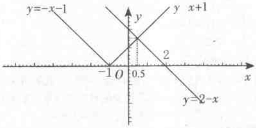


图1-3-3

解集是$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

◆临场新技巧

绝对值符号的存在是解含有绝对值不等式的障碍,因此如何去掉绝对值符号,使其转化为等价的、不含绝对值符号的不等式是解这类问题的关键和要害.本题的前两种解法都体现了思想方法的重要性,因而在复习中要注意思想方法的领悟.

【例5】解不等式$|x-1|+|x+1|<2$.

【分析】本题中含有两个绝对值,这与前面的题型不同,如何去掉绝对值是思维的方向.

解:原不等式同解于下面的不等式组

$\begin{cases}x\leqslant-1\\-(x-1)-(x+1)<2\end{cases}$,或$\begin{cases}-1<x<1\\-(x-1)+(x+1)<2\end{cases}$,或

$\begin{cases}x\geqslant1\\(x-1)+(x+1)<2\end{cases}$,即$\begin{cases}x\leqslant-1\\-2x<2\end{cases}$,或$\begin{cases}-1<x<1\\2<2\end{cases}$,

或$\begin{cases}x\geqslant1\\2x<2\end{cases}$,即$\varnothing\cup\{x|-1<x<1\}\cup\varnothing=\{x|-1<x<1\}$.

注:本题解中,采用"零点分段讨论法"去掉绝对值,由$|x-1|=0$和$|x+1|=0$得到两个零点1和-1,由于1和-1把数轴分成了三个区间(如图1-3-4),从左到右依次为$(-\infty,-1]$,$(-1,1)$,$[1,+\infty)$,按区间顺序讨论绝对值的符号就能去掉绝对值.当$x\leqslant-1$时,$x-1<0$,$x+1\leqslant0$;

当$-1<x<1$时,$x-1<0$,$x+1>0$;

当$x\geqslant1$时,$x-1\geqslant0$,$x+1>0$.

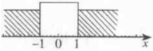


图1-3-4

本题型可以和分段函数建立联系,是绝对值不等式和函数的结合点.

例如:对任意实数x,若不等式$|x+1|-|x-2|>k$恒成立,则k的取值范围是 ( )

A. $k<3$

B. $k<-3$

C. $k\leqslant3$

D. $k\leqslant-3$

解:令$y=|x+1|-|x-2|$,要使原不等式恒成立,只要y的最小值比k大即可.在直角坐标系中作出其图象,如图1-3-5.

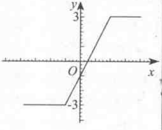


图1-3-5

新思路札记

第一章