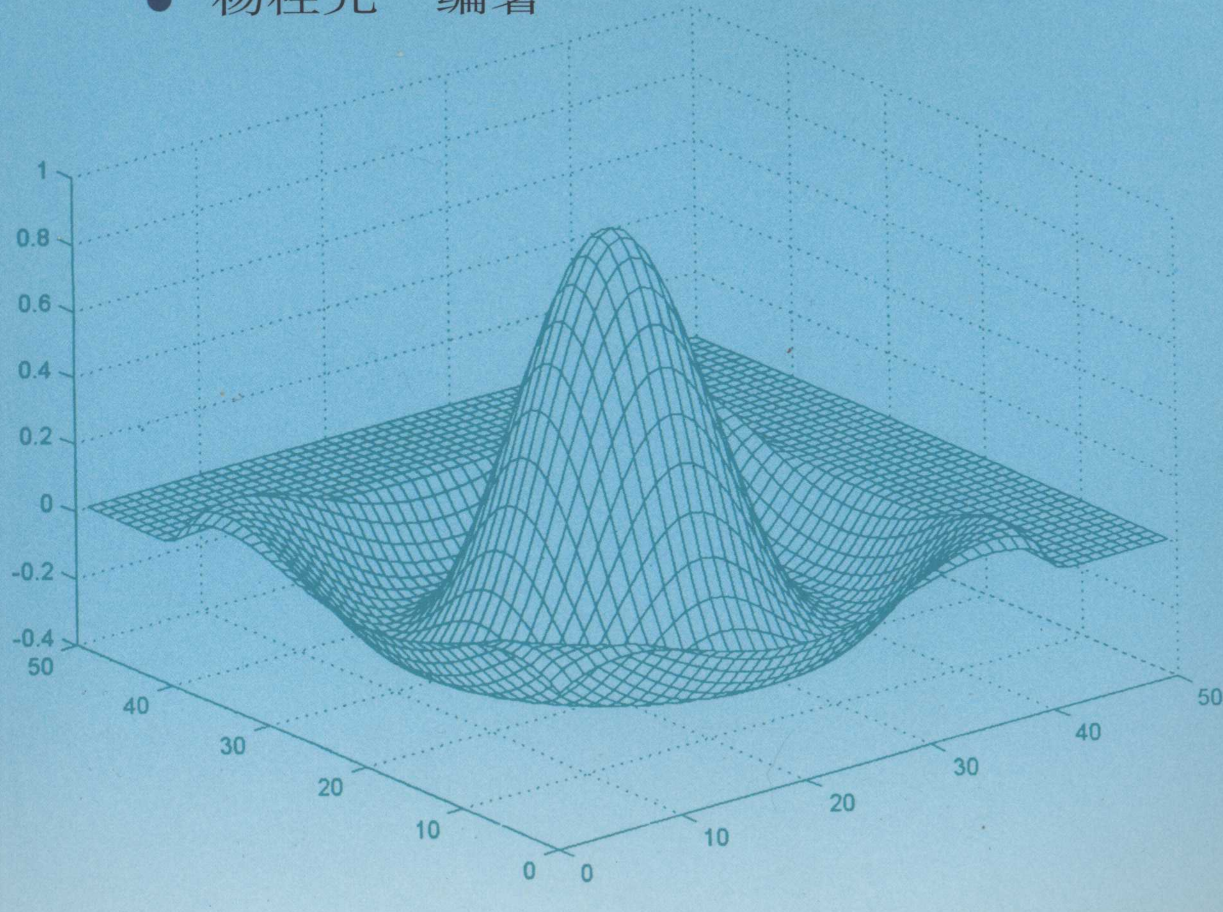
逼近理论及其应用

APPROXIMATION THEORY AND ITS APPLICATIONS

● 杨柱元　编著



云南出版集团公司
云南科技出版社

逼近理论及其应用

杨柱元 编著

云南出版集团公司
云南科技出版社
·昆明·

图书在版编目(CIP)数据

逼近理论及其应用/杨柱元编著.—昆明:云南科技出版社,2006.12.
ISBN 7-5416-2448-9

Ⅰ.逼...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.函数逼近论
Ⅳ.0174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 154698 号

云南出版集团公司
云南科技出版社出版发行
(昆明市环城西路 609 号云南新闻出版大楼　邮政编码:650034)
昆明市五华区教育委员会印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787mm×1 092mm　1/16　印张:9.75　字数:220 千字
2006 年 12 月第 1 版　2006 年 12 月第 1 次印刷
印数:1~800　定价:20.00 元

前　言

函数逼近论有着悠久的历史，1968 年逼近论杂志的创办更使它得以迅速发展，并成为富有深刻理论和实践性很强的分析数学分支。

逼近理论一般区分为最佳逼近、偏差、宽度三组问题。通常逼近对象属于 Sobolev、Besov 等经典函数空间，而逼近工具通常为多项式、样条、指数型整函数、平移不变子空间、小波等，特别是小波分析已成为一门新的数学分支，它在信号和图像处理等领域有广泛的应用。

本书是在给研究生讲授逼近论课程的讲义的基础上，以文献[1,5,15,17,21]为蓝本，结合作者自己的工作，选择和逼近理论与方法相关的素材编写而成。第一章介绍了 Sobolev 及 Besov 等古典空间的与逼近论相关的基本性质；第二章介绍了插值空间与插值方法；第三章介绍了样条和指数型整函数的逼近；第四章简要介绍了小波分析的基础知识；第五章介绍了 Cardinal 样条和单边宽度的研究，源于作者自身的工作。书中已尽力标注了文献出处，如有遗漏，望前辈见谅！本书可作为高年级学生或研究生的参考书。由于作者水平所限，不妥之处在所难免，望读者指正！

编者

2006 年 12 月

目　录

第一章　函数空间

1.1　预备知识

1.1.A　有关记号

N 或 Z^+ 表示非负整数集，$1 \leqslant d \in N$，R^d 表示 d 维欧氏空间，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ 表示 R^d 中的点，其范数是 $|x| = (\sum_{j=1}^{d} x_j^2)^{1/2}$，$x, y$ 的内积是 $x \cdot y = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in N^d$，记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

记号 $\alpha \leqslant \beta$ 意味着 $\alpha_j \leqslant \beta_j, 1 \leqslant j \leqslant d$. 记 $\alpha! = \alpha_1!\ \alpha_2!\ \cdots \alpha_d!$ 以及 $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\ (\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_d}{\beta_d}$，$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \cdots, \alpha_d \pm \beta_d)$.

若 $x \in R^d, \alpha \in N^d$，则 $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$. 类似地，如果对于 $1 \leqslant j \leqslant d$，$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$，则 $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_d^{\alpha_d}$ 表示一个阶数为 $|\alpha|$ 的微分算子，$D^{(0,0,\cdots,0)} u = u$.

对于在 x 的邻域内 $|\alpha|$ 阶连续可微的函数 u, ν，容易验证 Leibniz 公式：$D^\alpha(u\nu)(x) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma u(x) D^{\alpha-\gamma} \nu(x)$.

如果 $G \subset R^d$，用 $\overline{G}$ 表示 G 在 R^d 中的闭包，若 $\overline{G} \subset \Omega$，且 $\overline{G}$ 是 R^d 的紧子集，则记做 $G \subset\subset \Omega$. 若函数 u 定义在 G 上，则称 $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$ 为 u 的支集. 我们说 u 在 Ω 中具有紧支集，是指 $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$.

1.1.B　连续函数空间

设 Ω 是 R^d 中的一个区域，$m \in N$，$C^m(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上连续的函数 u，且其直到 m 阶的偏导数 $D^\alpha u(|\alpha| \leqslant m)$ 也在 Ω 上连续的全体函数组成的向量空间. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$，$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$；子空间 $C_0(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别由 $C(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$ 中有紧支集的函数组成.

由于 Ω 是开集，$C^m(\Omega)$ 中的函数不必在 Ω 中有界. 若 $\phi \in C^m(\Omega)$ 在 Ω 上有界且一致连续，则 ϕ 有一个从 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 的唯一的有界且连续的延拓. 因此我们定义向量空间 $C^m(\overline{\Omega})$ 是由全体 $\phi \in C^m(\Omega)$ 且 $D^\alpha \phi (0 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$ 在 Ω 上有界且一致的连续函数组成，$C^m(\overline{\Omega})$ 在如下范数下构成一个 Banach 空间，$\|\phi\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)|$.

注 1.1.1：$C^m(R^d)\neq C^m(\overline{R^d})$.

如果 $0<\lambda\leqslant 1$，定义

$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}):=\{\phi\in C^m(\overline{\Omega}):|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|\leqslant K|x-y|^\lambda,\ \forall x,y\in\Omega,0\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$

如果定义范数 $\|\phi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}=\|\phi\|_{C^m(\overline{\Omega})}+\max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup\limits_{x,y\in\Omega,x\neq y}\dfrac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}$，则 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是一个 Banach 空间. 此时也称其为指标是 (m,λ) 的 Hölder 空间.

注 1.1.2：对于 $0<v<\lambda\leqslant 1$，$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\subsetneq C^{m,v}(\overline{\Omega})\subsetneq C^m(\overline{\Omega})$，$C^{m,1}(\overline{\Omega})\not\subset C^{m+1}(\overline{\Omega})$，一般地也有 $C^{m+1}(\overline{\Omega})\not\subset C^{m,1}(\overline{\Omega})$，但对于某些区域后者可以成立.

如果 Ω 是有界区域，下面的两个定理提供了确定 $C(\overline{\Omega})$ 的子集合的稠密性和紧性的有效判别准则.

定理 1.1.1 (Stone－Weierstrass)：设 Ω 是 R^d 中的有界区域，若 $C(\overline{\Omega})$ 的子集合 A 满足：

(1) $f,g\in A,c\in K$（K 为一数域），则 $f+g,fg,cf$ 均属于 A；

(2) $f\in A$，则其共轭 $\bar{f}\in A$；

(3) 如果 $x,y\in\overline{\Omega},x\neq y$，则 $\exists f\in A$，s. t. $f(x)\neq f(y)$；

(4) 如果 $x\in\overline{\Omega}$，则 $\exists f\in A$，s. t. $f(x)\neq 0$.

那么 A 在 $C(\overline{\Omega})$ 中稠密.

推论 1.1.1：设 Ω 是 R^d 中的有界区域，$f\in C(\overline{\Omega})$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个多项式 p 满足 $\|f-p\|_{C(\overline{\Omega})}<\varepsilon$.

赋范空间 X 的子集 A 叫做（序列）紧的，若 A 中的每个点列包含一个收敛于 A 中的一个元素的收敛子列. 紧集是有界闭集，但反之未必，除非 X 是有限维的. A 准紧是指其闭包 $\overline{A}$（在范数拓扑下）是紧的. 集合 A 在 Banach 空间中是准紧的当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个有限的 ε－网.

定理 1.1.2 (Ascoli－Arzcla)：设 Ω 是 R^d 中的有界区域，K 是 $C(\overline{\Omega})$ 的子集，若

(1) $\exists M\geqslant 0$，s. t. $\forall f\in K,x\in\Omega,|f(x)|\leqslant M$；

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，s. t. $\forall f\in K,x,y\in\Omega$，只要 $|x-y|<\delta$，则有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.（这一性质称为 K 的等度连续性）

则 K 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧的.

设 X,Y 是赋范空间，f 是 X 到 Y 的一个算子. 算子 f 叫做紧的是指：当 A 在 X 中有界时，$f(A)$ 在 Y 中是准紧的. 若 f 是连续而且紧的算子，则 f 是完全连续的.

说赋范空间 X 嵌入到赋范空间 Y（记为 $X\mapsto Y$）是指：

(1) X 是 Y 的向量子空间；

(2) 对一切 $x\in X$，从 X 到 Y 的恒同映射 $Ix=x$ 连续，即存在常数 M，使得 $\|Ix\|_Y\leqslant M\|x\|_X$.

如果嵌入算子是紧的，就说 X 紧嵌入到 Y 中.

定理 1.1.3[1]：$m\in\mathbf{N},0<v<\lambda\leqslant 1$，则

$C^{m+1}(\overline{\Omega})\mapsto C^m(\overline{\Omega})$，$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\mapsto C^m(\overline{\Omega})$，$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\mapsto C^{m,v}(\overline{\Omega})$；若 Ω 有界，则后二者的嵌入是紧的；若 Ω 凸，则进一步有 $C^{m+1}(\overline{\Omega})\mapsto C^{m,1}(\overline{\Omega})$，$C^{m+1}(\overline{\Omega})\mapsto C^{m,v}(\overline{\Omega})$.

1.1.C 有关实变函数和泛函分析中的几个常用定理的注记

定理 1.1.4(鲁津):若f是E上几乎处处有限的可测函数,则对任给的$\delta > 0$,存在E中的一个闭集F_δ满足$m(E\backslash F_\delta) < \delta$且$f$在$F_\delta$上连续.

注 1.1.3:今后若未予说明E总指可测集.鲁津定理的结论不能改为$m(E\backslash F_\delta) = 0$而$f$在$F_\delta$上连续.鲁津定理常把一般可测函数的问题化为有关连续函数的问题,使问题简化.鲁津定理有另一形式:

设E是直线上的可测集,f是上的可测函数,则$\forall \delta > 0$,存在直线上的连续函数h_δ,满足$m\{x: f(x) \neq h_\delta(x)\} < \delta$.

鲁津定理的逆定理是成立的,即若$f(x)$在可测集E上几乎处处有限,则$\forall \delta > 0$,存在闭集F_δ,满足$F_\delta \subset E, m(E\backslash F_\delta) < \delta$,且$f$在$F_\delta$上连续.

另外鲁津定理中的连续函数不能改为多项式,利用鲁津定理可证:若E是直线上的可测集,f是定义在E上的实值函数,则f可测当且仅当存在连续函数序列$\{f_n\} \xrightarrow{\text{a.e}} f$.

上述结论的充分性是显然的,这是因为f作为连续从而可测的函数列的几乎处处收敛的极限是可测的.反之若f在E上可测,则依鲁津定理:$\forall n \in N$,存在连续函数序列g_n满足$m\{x: f(x) \neq g_n(x)\} < 1/n$,从而$g_n \xrightarrow{m} f$,由 Riesz 定理,必有几乎处处收敛的子列$g_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$,令$f_k = g_{n_k}$即可.

定理 1.1.5(叶果洛夫):设E是可测集,$mE < \infty$,f_n及f是E上的几乎处处有限的可测函数,$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$,则对任给的$\delta > 0$,存在$E$中的子集$F_\delta$,$mF_\delta < \delta$,使得$f_n$在$E\backslash F_\delta f$上一致收敛于$f$.

(我们把结论中的收敛称为近一致收敛,记为$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$).

注 1.1.4:叶果洛夫定理当$mE = \infty$时不成立,但其逆命题当$mE = \infty$时也成立;即若$\{f_n\}$为E上的可测函数列,$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$,则$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

记$L_p(E)(1 \leqslant p < \infty$表示$E$上的全体$p$-幂可积函数,而$L_\infty(E)$表示$E$上的全体本性有界函数.

定理 1.1.6(Lebesgue 控制收敛定理):$1 \leqslant p < \infty$,$f_n \in M(E)$(E上全体可测函数),$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, |f_n| \leqslant g \in L_p(E), n = 1,2,\cdots$,则$f_n \xrightarrow{L_p} f$.

上述定理可作为下面定理的推论.

定理 1.1.7:

$$f_n \in M(E), |f_n| \leqslant g_n, \text{a.e.}, f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{L_p} g, (g_n, g \in L_p, n = 1,2,\cdots), \text{则} f_n \xrightarrow{L_p} f.$$

这是因为$|f_n - f|^p \leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leqslant 2^p(g_n^p + g^p)$, a.e.,所以

$$2^{p+1}\|g\|_p^p = \int_E \lim_{n\to\infty}[2^p(g_n^p + g^p) - |f_n - f|^p]\mathrm{d}m \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E [2^p(g_n^p + g^p) - |f_n - f|^p]\mathrm{d}m$$

$$= 2^{p+1}\|g\|_p^p - \varlimsup_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p^p.$$

定理 1.1.8：若 $1\leq p<\infty$，$f_n, f\in L_p(E)$，$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 则 $f_n \xrightarrow{L_p} f \Leftrightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

这是因为设若 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$，则对非负函数列 $2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p$ 应用 Fatou 引理，有

$$2^{p+1}\|f\|_p^p=\int_E \lim_{n\to\infty}[2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p]\mathrm{d}m$$

$$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E [2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p]\mathrm{d}m\leq 2^{p+1}\|f\|_p^p-\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|_p^p$$

由此立得 $f_n \xrightarrow{L_p} f$；反之是显然的.

定理 1.1.9(Fubini)：若 $f(x,y)\in L(R^p\times R^q)$ 则

(1) a.e. $x\in R^p$，$f(x,y)$ 关于 y 在 R^q 上可积；

(2) $\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 R^p 上可积；

(3) $\int_{R^{p\times q}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$

注 1.1.5：f 的两个累次积分即使存在，也不能保证 f 的可积性. 但有下面的定理.

定理 1.1.10(Tonelli)：$f(x,y)$ 在 $R^p\times R^q$ 上非负可测，则

(1) a.e. $x\in R^p$，$f(x,y)$ 关于 y 在 R^q 上非负可测；

(2) $\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 R^p 上非负可测；

(3) $\int_{R^{p\times q}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$

f 的可测性通常不是问题，若 $f\geq 0$，则应用 Tonelli 定理(2)(3)时无需验证任何条件，完全不必考虑可积性，若 f 不是非负函数，可对 $|f|$ 应用 Tonelli 定理的(2)(3)来判定 f 的可积性.

在以上的定理中，Lebesgue 和 Fubini 定理涉及了积分与极限、积分与积分的换序问题，下面我们对其他的换序问题予以补充.

(1) Fatou 引理：若 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

(2) Levi 定理：

$f_n, f, u_n\in M(E)$，$0\leq f_n\uparrow f$，则 $\int_E f\mathrm{d}m=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m$.

(3) $f_n\geq 0$，$\sum_n \int_E f_n\mathrm{d}m<\infty$，则 $\int_E \sum_n f_n\mathrm{d}m=\sum_n \int_E f_n\mathrm{d}m$.

(4) $f_n\in L(E)$，$\sum_n \int_E |f_n|\mathrm{d}m<\infty$，则 $\sum_n f_n$ 几乎处处收敛，且 $\int_E \sum_n f_n\mathrm{d}m=\sum_n \int_E f_n\mathrm{d}m$.

(5) f_n 递增，$\sum_n f_n$ 收敛，则 $(\sum_n f_n)' = \sum_n f'_n$，a. e.

(6) $f_n \in AC$（绝对连续），$\exists x_0$ 满足 $\sum_n f_n(x_0)$ 收敛，且 $\sum_n \int_a^b |f_n'(x)|\,dx < \infty$，则 $\sum_n f_n(x)$ 收敛，其极限函数 $f \in AC$，且 $f' = \sum_n f_n'$，a. e.

(7) $f_y(x,y)$ 存在，$|f_y(x,y)| \leqslant g(x) \in L(X)$，$(\forall x \in X, y \in Y)$，则 $\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\,dx = \int_X f_y(x,y)\,dx$.

(8) 若 $|f(x,y)| \leqslant g(x) \in L(X)$，$(\forall x \in X, y \in Y)$，则 $\lim_{y \to y_0}\int_X f(x,y)\,dx = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx$；（只要右端的极限 a. e. $x \in X$ 存在）.

(9) 若 $|f(x,y)| \leqslant g(x) \in L(X)$，$(\forall x \in X, y \in Y)$ 且 a. e. $x \in X$，$f(x,y)$ 关于 y 在 y_0 连续，则 $\phi(y) = \int_X f(x,y)\,dx$ 在 y_0 连续.

(10) $g \in L$，则 $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \in AC$，且 $f' = g$，a. e.

(11) $f \in AC \Leftrightarrow \exists g \in L, s.t.\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

$\Leftrightarrow f$ a. e. 可微，$f' \in L$，且 $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$

(12) Newton - Leibniz 公式：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可微，$f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，则 $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

(13) Hahn - Banach 定理：设 X 是实或复的线性空间，$p(x)$ 是 X 上的次线性泛函，$f(x)$ 是定义在 X 的子空间 $\mathbf{Z}$ 上的实或复线性泛函，且满足 $|f(x)| \leqslant p(x)$，$x \in \mathbf{Z}$，则存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$，它是 f 的延拓，且满足 $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$，$x \in X$.

推论 1.1.2：设 f 是赋范空间 X 的子空间 $\mathbf{Z}$ 上的线性泛函，则存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$，它是 f 的保范延拓，即

当 $x \in X$，$\tilde{f}(x) = f(x)$，且 $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_{\mathbf{Z}}$.

推论 1.1.3：设 X 是赋范线性空间，$0 \neq x_0 \in X$，则存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $\|f\| = 1$，$f(x_0) = \|x_0\|$.

推论 1.1.4：X_0 是赋范线性空间 X 内的线性流形（或闭线性子空间），$x_0 \notin \overline{X}_0$，$d = \inf_{u \in X_0}\|x - u\|$，则存在 $f \in X^*$，满足

(ⅰ) $f(x) = 0, x \in X_0$；(ⅱ) $f(x_0) = 1$；(ⅲ) $f(x_0) = d^{-1}$.

推论 1.1.5[24]：$M \subset X$ 是一线性集，$x \in X$，

则成立如下的对偶定理

(ⅰ) $\inf_{u \in M}\|x - u\| = \max_{f \in M^{\perp}, \|f\| \leqslant 1}|f(x)| = \max_{f \in M^{\perp}, \|f\| \leqslant 1}|f(x - u)|$

(ⅱ) $\min\limits_{\phi \in M^{\perp}} \| f-\phi \| = \max\limits_{u \in M, \|u\| \leqslant 1} |f(u)| = \max\limits_{u \in M, \|u\| \leqslant 1} |(f-\phi)(u)|$

(14) g 是将赋范线性空间 X 的稠密线性子空间 L 映入 Banach 空间 Y 的有界线性算子，则可将 g 唯一地保范延拓成 X 到 Y 的有界线性算子.

(15) 一致有界或共鸣定理：设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$T_n \in \beta(X \to Y)$，$n=1, 2, \cdots$，若对每个 $x \in X$，$\{\|T_n x\|\}$ 有界，即 $\|T_n x\| \leqslant C_x$，$n=1,2,\cdots$ 则 $\{T_n\}$ 一致有界，即存在与 x 无关的常数 C，使得 $\|T_n\| \leqslant C$，$n=1,2,\cdots$

共鸣定理的一个直接应用是下面的结果：

存在一个实值连续函数，它的 Fourier 级数在给定的点 t_0 处发散；换言之，不是所有的连续函数其 Fourier 级数都处处收敛.

(16) 逆算子定理：若 $(X, \|\cdot\|_1$，$(Y, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间，T 是 X 到 Y 的一有界线性算子，则 T^{-1} 也是有界线性算子.

(17) 闭图像定理：设 X, Y 均为 Banach 空间，T 是 $D(T) \subset X$ 到 Y 的闭线性算子，如果 $D(T)$ 是闭线性子空间，则 T 是有界算子.

下面我们给出与 L_p 空间相关的几个定理：

(18) (ⅰ) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则存在非负可测的递增简单函数列 $\{\phi_n\}$，$\phi_k(x) \leqslant \phi_{k+1}(x) \leqslant f(x)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$，$x \in E$.

(ⅱ) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则存在简单函数列 $|\phi_k(x)| \leqslant |f(x)|$，$\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$，$x \in E$；若 $f(x)$ 还是有界的，则上述收敛是一致的.

推论 1.1.6：上述结论中的简单可测函数列的每一个均可取为具有紧支集的函数.

推论 1.1.7：(ⅰ) $1 \leqslant p \leqslant \infty$，简单函数在 $L_p(E)$ 中稠密；

(ⅱ) $1 \leqslant p < \infty$，则 $C_0(E)$ 在 $L_p(E)$ 中稠密；

(ⅲ) $C(E)$，$C_0(E)$，$C_0^{\infty}(E)$ 不在 $L_{\infty}(E)$ 中稠密，从而 $L_{\infty}(E)$ 不可分；

(ⅳ) $L_p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 是可分空间.

(19) $L_p(E)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是 Banach 空间.

(20) (ⅰ) $f_n \xrightarrow{L_p} f$，$(1 \leqslant p < \infty) \Leftrightarrow$ (i) $f_n \xrightarrow{m} f$，(ii) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists A_\varepsilon$（可测集）s. t. $\forall n$，$\|f_n\|_{L_p(A_\varepsilon^C)} \leqslant \varepsilon$，(iii) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\varepsilon > 0$，s. t. $\forall n$，$me < \delta_\varepsilon$，$\|f_n\|_{L_p(e)} < \varepsilon$.

Lebesgue 控制收敛定理可以作为上述结论的推论，这是因为 $\{f_n\}$ 所需要的一致 p－可积性，可由控制函数 g 保证.

(ⅱ) $f_n \xrightarrow{L_\infty} f \Leftrightarrow \exists E: m(E^C) = 0$，且 f_n 在 E 上一致地收敛到 f，即 $L_\infty(R^d)$ 内依范数收敛等价于几乎处处一致收敛.

(21) Hardy－Littlewood 极大函数.

设 $f \in L_p(R^d)$，令 $Mf(x) = \sup\limits_{r>0} \dfrac{1}{m(B(x,r))} \displaystyle\int_{B(x,r)} |f(y)| \mathrm{d}y$

则当 $f \in L_p(R^d)$ $(1 < p \leqslant \infty)$ 时，$Mf \in L_p(R^d)$，且 $\|Mf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$.

最后我们给出广义 Minkowski 不等式和广义 Hölder 不等式：

(22)设 X,Y 是任意两个一般的测度空间,$K(x,y)$ 是乘积空间上非负可测函数,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则 $\left(\int_X\left(\int_Y K(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\int_X\left(\int_Y K(x,y)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$.

(23)设 X 是任意一般测度空间,$f_i\in L_1^+$(L_1 的非负函数子集),$0<\alpha_1<1,i=1,2,\cdots,k,\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i=1$,则 $\|f_1^{\alpha_1}\cdots f_k^{\alpha_k}\|_1\leqslant\|f_1\|_1^{\alpha_1}\cdots\|f_k\|_1^{\alpha_k}$.

1.1.D 磨光核与磨光函数及单位分解定理

设非负实值函数 $j(x)\in C_0^\infty(R^d)$ 满足:$\mathrm{supp}j\subset B_1(0)=\{x\in R^d:|x|\leqslant 1\}$ 且 $\int_{R^d}j(x)\mathrm{d}x=1$,例如可取

$$j(x)=\begin{cases}a\exp(1/(|x|^2-1)), & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$,取 a 使函数 j 的积分值等于 1.

记 $j_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}j(x/\varepsilon)$,则 $j_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(R^d)$,$\int_{R^d}j_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$,$\mathrm{supp}j_\varepsilon=\overline{B_\varepsilon(0)}$.

设 $u(x)\in L_{loc}(R^d)$(局部可积函数类),则卷积函数

$J_\varepsilon u(x)=j_\varepsilon*u(x)=\varepsilon^{-d}\int_{R^d}j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y$ 称为磨光函数,它是函数 u 的光滑化.下面的定理给出了磨光函数的一些性质.

定理 1.1.11[2]:设 u 是 R^d 中的局部可积函数,则

(ⅰ)$J_\varepsilon u\in C^\infty(R^d)$;

(ⅱ)若 u 的紧支集含于 K,则 $J_\varepsilon u$ 的紧支集含于 K 的 ε 邻域内;

(ⅲ)若 u 是连续函数,则 $J_\varepsilon u\to u$ 在 R^d 的紧子集上是一致的;

(ⅳ)若 $u\in L_p(R^d)$,$(1\leqslant p<\infty)$,则 $J_\varepsilon u\in L_p(R^d)$,且 $\|J_\varepsilon u\|_p\leqslant\|u\|_p$,$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\|J_\varepsilon u-u\|_p=0$.

(ⅰ)的证明只需注意到积分是在 R^d 的紧子集上计算的并应用积分号下取微分的古典定理就可以了.(ⅱ)的证明注意到 K 的 ε 邻域是以 $x\in K$ 为中心,以 ε 为半径的开球之并即 $K_\varepsilon=\bigcup\limits_{x\in K}B_\varepsilon(x)$,而 $x\in R^d$ 及 $d(x,K)>\varepsilon$ 时,$x\notin K_\varepsilon$ 故 $\forall y\in K,j_\varepsilon(x-y)=0$,从而积分值为 0.(ⅲ)的证明直接由定义.(ⅳ)的证明第一式由 Hölder 不等式.第二式由广义 Minkowski 不等式.

推论 1.1.8:$C_0^\infty(R^d)$ 在 $L_p(R^d)$$(1\leqslant p<\infty)$中稠密.

定理 1.1.12[3]:设 K 是有界开集 Ω 中的闭子集,则存在函数 $f\in C_0^\infty(\Omega)$,满足(ⅰ)当 $x\in\Omega$ 时,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$;(ⅱ)在 K 的某个邻域上成立 $f(x)=1$.

定理 1.1.13[3]:设有限开集族 $\{O_i\}$,$(i=1,2,\cdots,k)$覆盖紧集 K,则存在函数组 $f_i\in C_0^\infty(O_i)$,$(i=1,2,\cdots,k)$,满足

(ⅰ)$f_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k$;$\sum\limits_{i=1}^k f_i\leqslant 1$;(ⅱ)在包含 K 的某一开集上 $\sum\limits_{i=1}^k f_i=1$.

定理 1.1.14（单位分解定理[3]）：K 是 R^d 中的一个集合，开集族 $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 K 的一个开覆盖，则在 $C_0^{\infty}(R^d)$ 中存在函数组 $\{f_i\}$（有时可能只有有限个）满足：

（ⅰ）对每一 f_i 成立 $0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1, \forall x \in R^d$；

（ⅱ）如果 $G \subset\subset K$，函数组 $\{f_i\}$ 中只有有限个函数在 G 不等于 0；

（ⅲ）对于每一个 f_i，存在 O_j 使得 $\operatorname{supp} f_i \subset O_j$；

（ⅳ）$\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1, \forall x \in K.$

注 1.1.6：当 K 中任一有界闭集 G，$\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中只有有限个开集与 G 的交不空时，定理仍成立.

1.1.E Fourier 分析简介

设 $f \in L_1(R^d)$，称

$Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{R^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$ 是 f 的 Fourier 变换.

下面的几个定理是简明的，在一般的实分析或有关 Fourier 变换的参考书中均能找到，可参见[4].

定理 1.1.15：（ⅰ）映射 $f \to \hat{f}$ 是 $L_1(R^d)$ 到 $L_\infty(R^d)$ 的一个有界线性变换，且 $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$；（ⅱ）若 $f \in L_1(R^d)$，则 $\hat{f}$ 一致连续.

定理 1.1.16（Riemann – Lebesgue）：若 $f \in L_1(R^d)$，则当 $|x| \to \infty$ 时，$\hat{f} \to 0$.

定理 1.1.17：（ⅰ）若 $f, g \in L_1(R^d)$，则 $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$，$(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.

（ⅱ）若 $f \in L_1(R^d)$，$g \in L_p(R^d)$，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则 $f * g \in L_p(R^d)$，

且几乎对一切 x，$(f*g)\hat{}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

注 1.1.7：为了形式上的“好看”，本定理中的卷积定义为

$(f*g)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{R^d} f(y) g(x-y) dy$. 一般地

若 $f \in L_p(R^d)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，$g \in L_1(R^d)$ 则通常定义的卷积（相差一个常数倍）$(f*g)(x) = \int\limits_{R^d} f(y) g(x-y) dy$ 属于 $L_p(R^d)$，且 $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

定理 1.1.18：若 $f, g \in L_1(R^d)$，则 $\int\limits_{R} \hat{f}(x) g(x) dx = \int\limits_{R^d} f(x) \hat{g}(x) dx$.

定理 1.1.19：（ⅰ）若 $f, \hat{f} \in L_1(R^d)$ 则 $f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{R^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$，a. e. x 成立.

我们知道 $\hat{f}$ 是连续的，当 $\hat{f}$ 可积时上等式右端的积分也是连续的，故在零测度集上改变 f 的值，就可使等式对一切 x 成立.

（ⅱ）若 $f \in L_1(R^d)$，$\hat{f} \geqslant 0$，f 在 0 点连续，则 $\hat{f} \in L_1(R^d)$，且几乎对一切 x 成立

$f(x)=(2\pi)^{-d/2}\int_{R^d}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$，特别有$f(0)=(2\pi)^{-d/2}\int_{R^d}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$.

定理 1.1.20：设$\tau_h f(x):=f(x-h)$，$\mathrm{d}_\delta f(x)=f(\delta x)$，则

$(\tau_h f)\hat{}(\xi)=e^{-ih\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$，$(\mathrm{d}_\delta f)\hat{}(\xi)=\delta^{-d}\hat{f}(\xi/\delta)$.

定理 1.1.21：若$f,x_k f\in L_1(R^d)$，则$\hat{f}$关于ξ_k可微，且$\frac{\partial\hat{f}}{\partial x_k}(\xi)=(-ix_k f)\hat{}(\xi)$.

类似地，若$f\in L_1(R^d)$，且$\frac{\partial f}{\partial x_k}$在通常意义下存在并属于$L_1(R^d)$或在$L_1(R^d)$中按如下意义下存在即：存在$g\in L_1(R^d)$使得$\left\|\frac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h_k}-g(\cdot)\right\|\xrightarrow{L_1}0$，则

$(\frac{\partial f}{\partial x_k})\hat{}(\xi)=i\xi_k\hat{f}(\xi)$.

注 1.1.8：对充分好的函数f，例如 Schwartz 函数类有

$P(D)\hat{f}(\xi)=(P(-ix)f)\hat{}(\xi)$，$P(i\xi)\hat{f}(\xi)=(P(D)f)\hat{}(\xi)$.

定理 1.1.22：设$f\in L_1(R^d)\cap L_2(R^d)$，则$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$.

注 1.1.9：这一定理说明，Fourier 变换是定义在$L_2(R^d)$的稠密子集$L_1(R^d)\cap L_2(R^d)$上的有界线性算子（且是等距算子），所以它存在一个到$L_2(R^d)$的唯一的有界扩张F，仍记$Ff=\hat{f}$，$\forall f\in L_2(R^d)$，且$\|F\|=1$；

我们称F就是$L_2(R^d)$上的 Fourier 变换.

当然我们亦可由$L_1(R^d)\cap L_2(R^d)$在$L_2(R^d)$中的稠密性及定理 1.1.22 直接定义.

定理 1.1.23：Fourier 变换F是$L_2(R^d)$上的酉算子.

定理 1.1.24：$\forall f,g\in L_2(R^d)$

（ⅰ）令$F^{-1}f=Ff(-x)$，则F^{-1}是F的 Fourier 逆变换.

（ⅱ）$\int_{R^d}Ff(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{R^d}f(x)Fg(x)\mathrm{d}x$.

（ⅲ）$\int_{R^d}Ff(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{R^d}f(x)\overline{(F^{-1}g)}(x)\mathrm{d}x$.

（ⅳ）$\int_{R^d}f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{R^d}Ff(x)\overline{Fg}(x)\mathrm{d}x$.

对于$p\neq2$的周期情形，有如下的 Hausdorff - Young 不等式：

若$f\in L_p(T)(1\leqslant p<2)$，则$\{\hat{f}(k)\}\in l_{p'}(1/p+1/p'=1)$，且其$l_{p'}$模被$\|f\|_{p(T)}$控制；若$\{c_k\}\in l_p$，则$\sum_{k\in Z}c_k e^{ikx}\in L_{p'}(T)$，且其$L_{p'}$模被$\|\{c_k\}\|_p$控制. 最后我们给出如下的 Possion 求和公式：

定理 1.1.25：设$f,\hat{f}$是R^d上的连续函数，且

$|f(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-d-\delta}$，$|\hat{f}(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-d-\delta}$，则有

$$(2\pi)^{-d/2}\sum_{k\in Z^d}\hat{f}(k)e^{ik\cdot x}=\sum_{k\in Z^d}f(x+2k\pi),x\in R^d.$$

1.1.F 弱导数、缓增广义函数及其 Fourier 变换

1.1.F(Ⅰ):弱导数

区域 $\Omega\subset R^d$ 上几乎处处有定义的函数 u 称为 Ω 上局部可积的,若对每一可测集 $A\subset\subset\Omega,u\in L_1(A)$,记作 $u\in L_1^{loc}(\Omega)$.

设 $u\in L_1^{loc}(\Omega)$,α 为多重指标,若存在 $\nu\in L_1^{loc}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\nu\varphi\mathrm{d}x,\ \forall\in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 ν 为 u 的(广义函数意义下)α 阶弱导数,仍记为 $\nu=D^\alpha u$.

弱导数除零测集外是唯一确定的. 如果 u 具有通常意义下的连续偏导数 $D^\alpha u$,则 $D^\alpha u$ 也是 u 的广义弱导数.

1.1.F(Ⅱ):缓增广义函数及其 Fourier 变换

若 $\phi\in C^\infty(R^d)$,$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^d$,$\lim\limits_{|x|\to\infty}|x^\alpha D^\beta\phi(x)|=0$,我们就说 ϕ 是速降函数或急减函数. R^d 上的全体速降函数组成的线性空间称为 Schwartz 空间,记为 $\Phi(R^d)$,由定义易知:$\Phi(R^d)\subset L_p(R^d)$,$C_0^\infty(R^d)\subset\Phi(R^d)\subset C^\infty(R^d)$.

例 $\exp(-|x|^2)\in\Phi(R^d)$.

设 $\phi\in C^\infty(R^d)$,则 $\phi\in\Phi(R^d)\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^d,\sup\limits_{x\in R^d}|x^\alpha D^\alpha\phi(x)|<\infty$

$\Leftrightarrow\forall m\in N,\beta\in\mathbf{N}^d,\sup\limits_{x\in R^d}|(1+|x|^2)^{m/2}D^\beta(x)|<\infty\Leftrightarrow P(x)Q(D)\phi(x)\in\Phi(R^d)$

$\Leftrightarrow Q(D)(P(x)\phi(x))\in\Phi(R^d)$,其中 $P(x)$ 为常系数多项式,$Q(D)$ 为偏微分算子.

设 $\{\phi_k\}\in\Phi(R^d)$,若 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^d,\sup\limits_{x\in R^d}|x^\alpha D^\beta\phi_k(x)|\longrightarrow0$ 一致地成立,则称 $\{\phi_k\}$ 在 $\Phi(R^d)$ 中收敛于 0,记为 $\phi_k\xrightarrow{\Phi}0,(k\to\infty)$. 类似地有

$\phi_k\xrightarrow{\Phi}0\Leftrightarrow\sup\limits_{x\in R^d}|(1+|x|^2)^{m/2}D^\alpha\phi_k(x)|\to0\Leftrightarrow P(x)Q(D)\phi_k(x)\to0$(在 R^d 上一致)$\Leftrightarrow Q(D)(P(x)\phi_k(x))\to0$(在 R^d 上一致).

上述收敛也等价于 $\Phi(R^d)$ 中由半范族

$p_{\alpha,\beta}(\phi):=\sup\limits_{x\in R^d}|x^\alpha D^\beta\phi(x)|,\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^d$ 确定的 Hausdorff 局部拓扑下的收敛,此拓扑亦可由下面半范族导出:

$p_{r,m}(\phi)=\sup\limits_{|\alpha|\leqslant m,x\in R^d}|(1+|x|^2)^{r/2}D^\alpha\phi(x)|,\forall r,m\in\mathbf{N}.$

前述节 1.1.E 中有关如 Fourier 变换、卷积、微商等运算对于速降函数空间而言是封闭的,且相应定理有效.

$\Phi(R^d)$ 上的所有连续线性泛函构成的空间 $\Phi'(R^d)$ 称为缓增广义函数空间.

例 $L_p(R^d)\subset\Phi'(R^d)(1\leqslant p\leqslant\infty)$

取 $f\in L_p(R^d)$,定义 $\langle f,\phi\rangle:=\int_{R^d}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x,\forall\phi\in\Phi(R^d)$,由 Hölder 不等式有

$|<f,\phi>| \leqslant \|f\|_p \|\phi\|_{p'} \leqslant C\|f\|_p \sup_{x\in R^d}|(1+|x|^2)^d\phi(x)|$,故

$<f,\phi>$定义了 $\Phi(R^d)$到自身的一个有界线性算子,在等距同构意义下,有 $f\in\Phi'(R^d)$,从而 $L^p(R^d)\subset\Phi'(R^d)$. 如果赋予 $\Phi'(R^d)$一个使线性范函 $L\to L(\phi)$($\forall\phi\in\Phi(R^d)$)连续的最弱拓扑,易知 $L_p(R^d)(1\leqslant p\leqslant\infty)$连续地嵌入到 $\Phi'(R^d)$.

又如每一个常系数多项式也确定一个缓增广义函数,即 $P(x)\in\Phi'(R^d)$,
事实上,若设多项式 $P(x)$的阶是 m,定义

$<P,\phi> = \int_{R^d} p(x)\phi(x)\,dx$,则有 $|<P,\phi>| \leqslant C\sup_{x\in R^d}|(1+|x|^2)^{d+m}\phi(x)|$,在同构意义下有 $P(x)\in\Phi'(R^d)$.

下面在 $\Phi'(R^d)$中定义几种常见运算.

(ⅰ)卷积:对 $u\in\Phi',\phi\in\Phi$,定义 $u*\phi(\psi):=u(\tilde{\phi}*\psi)$,$\forall\psi\in\Phi$,其中

$\tilde{\phi}(x)=\phi(-x)$为反射运算;

(ⅱ)反射:$\tilde{u}(\phi)=u(\tilde{\phi})$,$\forall\phi\in\Phi$;

(ⅲ)平移:$\tau_h u(\phi)=u(\tau_{-h}\phi)$,$\forall\phi\in\Phi(h\in R^d)$;

(ⅳ)微分:$D^\alpha u(\phi)=(-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\phi)$,$\forall\phi\in\Phi(\alpha\in\mathbf{N}^d)$;

(ⅴ)Fourier 变换及 Fourier 逆变换:

$Fu(\phi)=u(F\phi)$,$\forall\phi\in\Phi$,$F^{-1}u(\phi)=u(F^{-1}\phi)$,$\forall\phi\in\Phi$.

(或 $\hat{u}(\phi)=u(\hat{\phi})$,$\forall\phi\in\Phi$,$\check{u}(\phi)=u(\check{\phi})$,$\forall\phi\in\Phi$)

上述几式的右端定义了 $\Phi(R^d)$上的连续线性泛函,它们是 $\Phi'(R^d)$到 $\Phi'(R^d)$内的. 当 u 也属于 $\Phi(R^d)$时,它们都是古典意义下的运算,甚至无需 $u\in\Phi(R^d)$,只要 u 是使上述运算在古典意义下有定义的普通函数,则新的定义与古典定义一致. Fourier 变换是 $\Phi'(R^d)$到自身的一个拓扑同构. 由此可见在广义函数范围内许多运算可以自由进行. 如反演公式成立:$u=F^{-1}(Fu)$,$\forall u\in\Phi'(R^d)$,对微分运算也有$(D^\alpha u)\hat{}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)$,$D^\alpha\hat{u}(\xi)=((-i\xi)^\alpha u)\hat{}(\xi)$.

1.2 Sobolev 空间

1.2.A 整数次 Sobolev 空间

定义 1.2.1:对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$,记

$W_p^m(\Omega)=\{u\in L_p(\Omega)\mid D^\alpha u\in L_p(\Omega),\forall\alpha\in N^d,|\alpha|\leqslant m\}$,其中 $D^\alpha u$ 表示 u 的 α 阶弱(或强)导数. 对于 $u\in W_p^m(\Omega)$,定义其范数

$\|u\|_{W_p^m(\Omega)}=\|u\|_{p,m,\Omega}=\|u\|_{p,m}=(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{p,0}^p)^{1/p}$,

$\|u\|_{p,0},=(\int_\Omega|u(x)|^p dx)^{1/p}$,$(1\leqslant p<\infty)$;$\|u\|_{\infty,0,\Omega}=\operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$,$(p=\infty)$.

赋以上述范数后的 $W_p^m(\Omega)$ 称为 $L_p(\Omega)$ 上的 m 阶 Sobolev 空间.

除 $W_p^m(\Omega)$,引入另外两个 Sobolev 空间:

$H_p^m(\Omega):=\{u\in C^m(\Omega):\|u\|_{p,m}<\infty\}$ 关于上述定义范数 $\|\cdot\|_{p,m}$ 的完备化.

$W_{p,0}^m(\Omega):=C_0^m(\Omega)$ 在 $W_p^m(\Omega)$ 中的闭包,即

$W_{p,0}^m(\Omega):=\{u\in W_p^m(\Omega)\mid\exists u_k\in C_0^\infty(\Omega),\ \|u_k-u\|_{p,m,\Omega}\to 0,(k\to 0)\}$.

注 1.2.1[1]:$W_p^m(R^d)=H_p^m(R^d)=W_{p,0}^m(R^d)$

定理 1.2.1[2]:$W_p^m(\Omega)$ 按通常定义的加法和数乘构成 Banach 空间;当 $1\leqslant p<\infty$ 时,$W_p^m(\Omega)$ 可分;当时 $1<p<\infty$,$W_p^m(\Omega)$ 自反且一致凸.

下述几个定理在有关 Sobolev 空间的书中均能查到,这里的证明源于[5].

定理 1.2.2:设 $u\in W_p^m(\Omega)$,则存在序列 $u_k\in C^\infty(\Omega)\cap W_p^m(\Omega)$ 满足

$\|u_k-u\|_{p,m,\Omega}\to 0,(k\to\infty)$

证明:定义开集 $\Omega_0=\Phi,\Omega_i=\{x\in\Omega\mid\text{dist}(x,\partial\Omega>1/i,|x|<i)\}$,则 $\Omega=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(\Omega_{i+2}-\overline{\Omega}_i)$ 且任一紧集 K 仅与有限个开集 $\Omega_{i+2}-\overline{\Omega}_i$ 相交,由单位分解定理,存在函数组 $\{\alpha_i(x)\mid i=1,2,\cdots\}$,$\alpha_i(x)\geqslant 0$,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)=1,x\in\Omega$,

令 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}u\alpha_i$,则 $\text{supp}(u\alpha_i)\subset\Omega_{i+2}-\overline{\Omega}_i\subset\subset\Omega,u\alpha_i\in W_p^m(\Omega)$,

由定理 1.1.11,取 ε_i 充分小,使 $u\alpha_i$ 的光滑化 $J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 满足

$\text{supp}J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)\subset\Omega_{i+2}-\overline{\Omega}_i\subset\subset\Omega$, $\|J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)-u\alpha_i\|_{p,m,\Omega}<\varepsilon/2^{i+1}$

令 $w=\sum\limits_{i=1}^{\infty}J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$,由于 $J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)\in C_0^\infty(\Omega)$,且任一紧集 K 仅与有限个支集 $\text{supp}J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 相交,故 $w\in C^\infty(\Omega)$,由 Minkowski 不等式即得 $\|u-w\|_{p,m,\Omega}<\varepsilon$.

注 1.2.2:在上述证明中,对边界 $\partial\Omega$ 上的任一点 x_0,不论半径 r 多么小,球 $B_r(x_0)$ 都与无穷多个 $\Omega_{i+2}-\overline{\Omega}_i$ 相交,级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 非零项的数目一般是无穷,因而该级数在边界点 x_0 的状态是不清楚的,为了得到直到边界都光辉的函数逼近,需要对边界上的光滑性加某些限制.

设 $\Omega\subset R^d$ 为一开集,$\partial\Omega$ 为其边界,若对每点 x_0,存在一个邻域 O 和从 O 到 $B_1(0)\subset R^d$ 的变换 $\phi:\phi(x)=y$,满足

$\phi\in C^m(O),\phi^{-1}\in C^m(B_1(0)),\phi(\Omega\cap O)=B_1^+(0)=B_1(0)\cap\{y_d>0\}$

$\phi(\partial\Omega\cap O)=\Sigma=B_1(0)\cap\{y_d=0\}$

则说 $\partial\Omega\in C^m$. 若 $\phi,\phi^{-1}\in C^\infty$,则说 $\partial\Omega\in C^\infty$.

进一步有下面定理:

定理 1.2.3:设 $\Omega\subset R^d$ 是有界开集,$\partial\Omega\in C^m(1\leqslant m\in N)$,则对任意 $u\in W_p^m(\Omega)$,存在序列 $u_k\in C^m(\overline{\Omega})$,满足 $\|u_k-u\|_{p,m,\Omega}\to 0,(k\to 0)$.

证明:由 $\partial\Omega\in C^m$ 的定义,并注意到 Ω 是有界闭集,利用有限覆盖定理,有有限个区域