经济数学基础

王嘉武◎编著

JINGJI SHUXUE JICHU

北 京 出 版 社

中共北京市委党校成人教育统编教材

经济数学基础

王嘉武◎编著

JINGJI SHUXUE JICHU

北 京 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础/王嘉武编著. —北京：北京出版社，2007.7
中共北京市委党校成人教育统编教材
ISBN 978-7-200-06860-3

Ⅰ.经… Ⅱ.王… Ⅲ.经济数学—党校—成人教育—教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 096995 号

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

王嘉武 编著

*

北 京 出 版 社 出 版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网 址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
北 京 奥 鑫 印 刷 厂 印 刷

*

850×1168 32开本 12印张 240千字
2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷
印数 1—4 800

ISBN 978-7-200-06860-3
F·354 定价:20.40元
质量投诉电话:010-58572393

前 言

随着我国社会经济的不断发展，以及研究和掌握现代化管理方法的不断深化，对经济数学方法的学习、研究和应用也越来越受到广大读者的重视。特别是广大的党政干部，为了掌握市场经济理论与现代化管理方法，迎接知识经济时代的到来，迫切需要一本能够针对他们的学习特点，适应他们的文化水平的经济数学基础知识读物。本书正是为适应他们的需要而编写的，希望它能够成为党政干部学习和掌握经济数量分析方法的一本重要参考书。

本书分为 18 章，包括微积分、线性代数（含投入产出方法和线性规划）、概率论与数理统计等，这些都是经济数学最基础和最重要的知识。针对党政干部的需要和特点，本书在内容上力求简明扼要，在叙述上注重阐述数学思想和数学与经济之间的联系。为此目的，本书避免了过多不必要的数学推导，对一些定理和命题，只给出条件和结论，而不予证明。虽然如此，本书在理论上仍保持了一定的完整性和严谨性。为了便于学习，书中配备了一定量的例题和习题。其中，一部分例题和习题是比较简单和易于理解的，它们是用来解释概念、定义、法则和定理的；还有一部分例题和习题是为了帮助读者加深对概念的理解，提高运用法则和定理的能力。本书备有习题答案，供读者参考。书末附有泊松概率分布、标准正态分布、T 分布和 F 分布等函数表格。

本书在编写过程中，得到众多同行朋友的指教。这里特别要感谢多年来讲授这部书的老师，他们对本书的结构和内容，提出了许多重要的、具体的意见。

由于作者的学识和水平所限，希望读者对书中不妥之处予以批评指正。

作者

目 录

第一章 函 数

函数是数学的最重要的基本概念之一，它在数学中占有重要地位。作为预备性知识，本章介绍函数的基本概念，反函数、复合函数、分段函数、初等函数和二元函数等一些内容。

§1.1 函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某个变化过程中，数值保持不变的量称为常量，可以取不同值的量称作变量。习惯上常以字母 $a,b,c\cdots$ 表示常量，以 $x,y,z\cdots$ 表示变量。

2. 函数的定义

对于一个给定的数集 D，若有两个变量 x 和 y，对于 D 中的每一个数值 x，按照一个确定的法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数。f 称为 D 上的一个函数关系，记作 $y=f(x),x\in D$。x 称为自变量，y 称为因变量。当 x 取遍 D 中的每一个数值时，对应的 y 值构成一个数集 Z。数集 D 称为函数的定义域，数集 Z 称为函数的值域。

函数的定义域，对应法则和值域是构成函数的三要素。

3. 函数的定义域

确定函数的定义域，就是确定自变量的取值范围。对于用解析式表示的函数，就是确定使其解析式得以运算（或者说使运算有

意义)的自变量的值。我们需要注意下面四种基本情况:

(1)分式函数$\frac{1}{g(x)}$的定义域是使分母$g(x)\neq 0$的全体实数。

例如:$y=\frac{4x}{x^2-3x+2}$的定义域是使$x^2-3x+2\neq 0$,即$x\neq 1$,且$x\neq 2$的全体实数,或

$$D:(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

(2)偶次根式函数$\sqrt[2n]{g(x)}(n\in N)$的定义域是使被开方式$g(x)\geqslant 0$的全体实数。

例如:$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是使$1-x^2\geqslant 0$,即$-1\leqslant x\leqslant 1$的全体实数,或

$$D:[-1,1]$$

(3)对数函数$\log_a g(x)(a>0,a\neq 1)$的定义域是使真数$g(x)>0$的全体实数。

例如:$y=\log_3(2+x-x^2)$的定义域是使$2+x-x^2>0$,即$-1<x<2$的全体实数,或

$$D:(-1,2)$$

(4)反正弦函数$\arcsin g(x)$和反余弦函数$\arccos g(x)$(见§1.2)的定义域是使$|g(x)|\leqslant 1$的全体实数。

例如:$y=\arcsin(3x-1)$的定义域是使$-1\leqslant 3x-1\leqslant 1$,即$0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$的全体实数,或

$$D:\left[0,\frac{2}{3}\right]$$

如果函数解析式中含有以上几种情况,那么函数的定义域则为每种情况所确定的集合的交集。

在一元函数中,区间是表示定义域的一种具体形式。有的时候,仅需研究函数在某个点x_0附近的一个很小的区间上的变化情况,这个小区间又被称作邻域。邻域一般表示为$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,

其中 δ 是一个小的正数。

【例 1】 确定函数 $y=\dfrac{\lg(3+2x-x^2)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解 观察这个函数是一个分式函数,同时有对数关系,开平方关系,根据求定义域的几条原则,可综合列出下列不等式组:

$$\begin{cases}3+2x-x^2>0\\x-1>0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-1<x<3\\x>1\end{cases}$$

也就是 $1<x<3$

所以,函数的定义域 $D:(1,3)$

【例 2】 求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1-x^2)$ 的定义域。

解 由函数解析式及求定义域的原则,可综合列出下列不等式组:

$$\begin{cases}x\neq0\\1-x^2>0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x\neq0\\-1<x<1\end{cases}$$

$\therefore$ 定义域 $D:(-1,0)\cup(0,1)$

4. 函数值

对于给定的函数 $y=f(x)$,与 x 对应的 y 值称为函数值。对应于 x_0 的函数值是 $f(x_0)$,也可记作 y_0,或 $y\big|_{x=x_0}$。一个函数所有的函数值的集合叫作值域。

例如,若 $f(x)=x^2-x+1$,则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)+1=\dfrac{3}{4}$, $f(0)=1$, $f(-1)=(-1)^2-(-1)+1=3$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)+1\cdots\cdots$

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

设给定函数 $y=f(x)$，若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

例如：$y=x^4+x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=x\sin x$，$y=x^2\cos x$ 等，都是偶函数，而 $y=x^3+x$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=x^2\sin x$ 等，都是奇函数。但 $y=x^3+x+1$，$y=x^2+x$ 等既不是奇函数，也不是偶函数。

2. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期。

三角函数都是周期函数。正弦和余弦函数的周期是 2π，正切和余切函数的周期是 π。

3. 函数的单调增减性

若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递增的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递减的。

例如：函数 $y=x^3$，对任意的 x_1,x_2，对于 $x_1<x_2$ 总有 $x_1^3<x_2^3$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增。

又如：函数 $y=x^2$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的，在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的。

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。若不存在这样的正数，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

例如：$y=\sin x$，由于对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。函数 $y=\frac{1}{x}$，在 $x=0$ 点处无界，在 $(\delta,+\infty)$ 上是有界的，δ 为任意小的正数。

§1.2　反函数·复合函数·分段函数

一、反函数

函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 是随着 x 的变化而变化。但是在某些情况下，需要研究 x 是怎样随着 y 的变化而变化的。

设某种商品的价格为 p，则销售收入 y 取决于销售量 x。它们之间的关系可表示为 $y=px$，销售收入 y 是销售量 x 的函数。反过来，对任意一个销售收入 y，都可以由 $x=\frac{y}{p}$ 来确定销售量 x，销售量 x 是销售收入 y 的函数。我们称后一函数是前一函数的反函数，或者说它们互为反函数。

定义 1.1　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一函数，值域为 Z。若对每一个 $y\in Z$ 都有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。

只有在函数的对应关系为一一对应关系时，函数才有反函数。

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 互换，写成以 x 为自变量，y 为因变量的函数 $y=f^{-1}(x)$。所以一般说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，或称 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域，分别是原函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域。$y=f^{-1}(x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

求反函数的步骤如下。第一步反解：把 y 当作已知量，由 $y=f(x)$ 的解析式中，解出 $x=f^{-1}(y)$ 来；第二步互换：将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x,y 位置互换，写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式；第三步由原函数的值域，确定反函数的定义域。

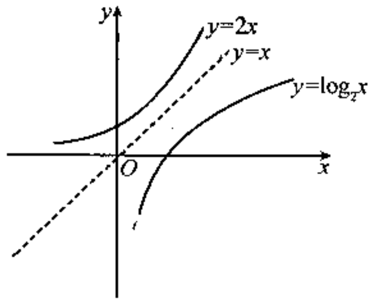

图 1-1

例如，函数 $y=2^x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$，它的反函数是 $y=\log_2 x$，定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$。它们的图像如图 1-1，是关于直线 $y=x$ 对称。

【例 1】 求函数 $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$ 的反函数。

解 第一步反解：由 $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$

解出 $x=\dfrac{3y+1}{2y-1}$

第二步互换： $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

第三步确定反函数定义域：由 $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$ 可知值域为 $y\neq\dfrac{1}{2}$ 的全体实数，从而反函数的定域为 $\left\{x\mid x\neq\dfrac{1}{2}\text{且 }x\in R\right\}$。

所以反函数为 $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}\quad x\in\left\{x\mid x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$

【例 2】 求函数 $y=\log_2(x+1)$ 的反函数。

解 第一步反解：由 $y=\log_2(x+1)$

解出 $x+1=2^y$

$x=2^y-1$

第二步互换： $y=2^x-1$

确定定义域$\because y=\log_2(x+1)$定义域 $x>-1$ 值域 $y\in R$,所以反函数定义域为 $x\in R$。

即反函数为 $y=2^x-1 \quad (x\in R)$

二、复合函数

在许多实数问题中,虽然两个变量存在着确定的相依关系,但是这两个变量可能不是直接联系的,而是通过一个中间变量联系的。这样的两个变量所构成的函数就是复合函数。

例如:企业的总收入 R 是产量 Q 的函数 $R=R(Q)$,产量又是投入(资金、劳力)x 的函数 $Q=Q(x)$。那么,总收入 R 通过中间变量 Q 与投入 x 之间的函数关系就是复合函数关系:$R=R[Q(x)]$。

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=g(x)$。若对于自变量 x 对应的每一个函数值 u,函数 $y=f(u)$都有定义,则称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f[g(x)]$。

掌握函数的复合过程,将复合函数分解成简单函数系列,对于求复合函数的定义域及作其他运算都是必要的。这个分解过程,往往是由外向里进行的。

【例 3】 求函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域。

解 函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$可以看成是由

$$y=\arcsin u \text{ 及 } u=\frac{2x-1}{3}$$

两个简单函数复合而成。外层函数关系是反正弦函数。由$y=\arcsin u$ 可知,其定义域为$|u|\leqslant 1$。反正弦函数的变量部分是整式函数$\dfrac{2x-1}{3}$,综合起来,也就是$\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$,解之得 $-1\leqslant x\leqslant 2$。由此得出函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域 D: $[-1,2]$。

【例4】 求函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 的定义域。

解 函数可以看成是由

$$y=e^u \quad u=\sqrt{g} \quad g=x^2+1$$

三个函数复合而成。

显然,复合函数的定义域 $D:(-\infty,+\infty)$。

三、分段函数

有些函数,在其定义域的不同部分,往往需用不同的解析式表达函数关系。比如:生产成本在生产规模不同时,它与产量的函数关系的解析式是不同的。设成本函数为 $C=C(x)$。在生产规模不大时,总成本 C 对产量 x 的函数关系可用线性解析式表达,如当 $0\leqslant x\leqslant 1000$ 时,设总成本为 $C=4000+4.5x$;当生产达到一定规模后产量再增加时,如当 $1000<x\leqslant 1500$ 时,总成本 C 与产量 x 的函数关系可设为 $C=9x-0.0005x^2$。其中,$x=1500$ 表示最大生产量。那么,总成本函数可记为

$$C(x)=\begin{cases}4000+4.5x & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 9x-0.0005x^2 & 1000<x\leqslant 1500\end{cases}$$

$$C(0)=4000+4.5\times 0=4000$$

它表示,企业不生产时,也要支付4000单位费用。

$$C(1500)=9\times 1500-0.0005\times 1500^2=13500-1125=12375$$

它表示,企业达到最大生产能力时,总成本为12375单位。

定义1.3 对于函数 $y=f(x)$,在其定义域的不同区间上,函数关系需用不同的解析式表达的函数,称为分段函数。

例如:已知定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

其图像如图1-2所示。