21世纪
高职高专精品教材

◎ 李景昌 主编　　丁瑞 张延莉 副主编

高等数学

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

GaoDeng Shuxue

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

高等数学

李景昌　主编
丁瑞　张延莉　副主编

经济管理出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李景昌主编. —北京:经济管理出版社,2007.6
ISBN 978-7-80207-967-0

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 074483 号

出版发行:经济管理出版社
北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 11 层
电话:(010)51915602 邮编:100038

印刷:北京银祥印刷厂 经销:新华书店

责任编辑:娄俊杰 王光艳
技术编辑:杨 玲
责任校对:郭红生

787mm×1092mm/16 16.75 印张 386 千字
2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—7000 册 定价:34.00 元
书号:ISBN 978-7-80207-967-0/F·840

前　言

本书作为高职教育的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位。高等数学是高职院校各专业重要的基础课程之一，随着高职教育的蓬勃发展和教学改革的不断深入，为了适应高等职业教育培养高技能人才的需要，更好地贯彻教育部等七部门《关于进一步加强职业教育工作的若干意见》的有关精神，在认真总结兄弟高职院校高等数学课程的教学改革经验以及我院教师的教学经验的基础上，我们组织编写了教材《高等数学》，本书力求充分考虑高职教育的特点与要求，使其既满足高职各类专业需要，又适合高职学生的不同知识需求。

在本书的编写过程中我们遵循以下原则：

1. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学思想消化吸收专业知识的能力。注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换。

2. 缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当地把握教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。

3. 充分考虑高职学生特点以符合高职学生的认知结构，便于学生自学。在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。对课程的每一主题都尽量从几何、数值和解析三个方面加以体现，避免只注重解析推导。

4. 注意有关概念的解释，以及与专业实际的联系，力求表述确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述。注意培养学生的综合素质，体现数学课程改革的新思路——数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力。

5. 注意数学软件包 MATHEMATICA 的引入，力求做到易教、易学、易懂。

6. 全书共分八章，教学学时不少于60学时。

本书由李景昌任主编，丁瑞、张延莉任副主编，张焕玮主审。第一、四、五、七章以及附录由李景昌编写，第二、三章由丁瑞编写，第六、八章由张延莉编写。

编者水平有限，错误在所难免，敬请批评指正。

编　者

2007年3月

—目　录—

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章 导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分

第六章　微分方程

第七章　多元函数的微积分

第八章 无穷级数

第一章　极限与连续

极限的概念是微积分学中最基本的概念之一，本章在给出极限的描述性定义的基础上研究函数的连续性.

§1.1　极限的概念

一、数列的极限

定义 1.1　以正整数 n 为自变量的函数 $y_n=f(n)$，把函数值依自变量 n 由 $1,2,3,\cdots$ 依次增大的顺序排列起来：

$$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$$

这样的一列数称为数列，记作 $\{y_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，y_n 称为数列的一般项或通项.

例如　$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$　(1.1)

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n},\cdots \tag{1.2}$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots \tag{1.3}$$

$$1,3,5,7,\cdots,(2n-1),\cdots \tag{1.4}$$

由上述几个例子可以看到，当 n 逐渐增大以至无限增大时，数列(1.1)由大于 1 而无限接近于 1；数列(1.2)时而大于 0，时而小于 0，但无限接近于 0；数列(1.3)在 -1 与 1 之间振荡，不与任何常数接近；数列(1.4)无限变大，而不与任何常数接近.

像上面数列(1.1)，(1.2)，当 n 无限增大时，y_n 无限趋近于一个常数，这样的数列我们称为有极限的数列，这个常数称为数列的极限值.

定义 1.2　设有数列 $\{y_n\}$，如果当 n 无限增大时，y_n 无限趋近于一个确定的常数 A，我们称常数 A 是数列 $\{y_n\}$ 的极限，或称数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A(n\to\infty)$$

对于上例(1.1)有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \quad 或 \quad 1+\frac{1}{n}\to 1\ (n\to\infty)$$

数列(1.2)有

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0 \quad 或 \quad (-1)^n\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

如果当 $n\to\infty$ 时，y_n 不趋向于一个确定的常数，我们就说数列 $\{y_n\}$ 没有极限，或称数列 $\{y_n\}$ 是发散的.

对于上述数列(1.3)，(1.4)，它们都是发散的.

二、函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，它的极限是一种特殊函数的极限. 现在，我们讨论一般定义于实数集合上函数的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1　$f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$，如图 1－1.

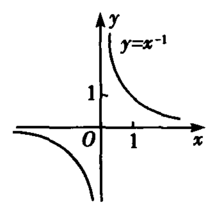

图 1－1

我们现在讨论当 x 无限增大时，函数的变化趋势. 从图形可以看出，当自变量 x 连续无限增大时，因变量 $f(x)$ 就无限趋近于常数零. 这时，我们称 x 趋于无穷大时，$f(x)$ 以零为极限.

定义 1.3　如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

对于例 1，$f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

在定义 1.3 中，x 可取正值或负值，即 x 趋于无穷大指的是既可趋于正无穷大，又可趋于负无穷大. 如果限制 x 在某个时刻后，只取正值(或负值)我们记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

称为变量 x 趋于正无穷大(或负无穷大)时，$f(x)$ 以常数 A 为极限.

例如图 1－2.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}2^x=0$$

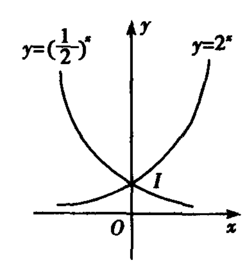

图 1－2

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 2　函数 $f(x)=x+1$，讨论当 $x\to 1$ 时，函数变化的趋势，列表1－1.

表 1 - 1

x	0.9	0.99	0.999	…	1	…	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	…	2	…	2.001	2.01	2.1

由表 1 - 1 可以看到 x 趋于 1 时，$f(x)$ 趋于 2，这时称 x 趋于 1 时，函数 $f(x)=x+1$ 以 2 为极限.

例 3　已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，如图 1 - 3. 讨论当 x 趋于 1 时，这个函数的变化趋势.

显然表 1 - 1 中的所有数值，除 $x=1,y=2$ 这对数值外，其他的数值均适用于这个函数. 同样由表 1 - 1 可以看出，当 x 无限趋近于 1 时，函数 $f(x)$ 的值趋近于 2，这时称 x 趋于 1 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 以 2 为极限.

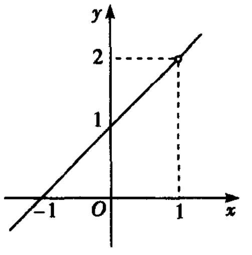

图 1 - 3

定义 1.4　如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

注意　当研究 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是指 x 充分接近 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势，而不是求 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 的函数值. 所以研究 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限问题与 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 是否有意义无关.

由以上定义，我们很容易得到两个常见的简单的极限

$$\lim_{x\to a}x=a \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}c=c \quad (c\ 为常数)$$

另外，初等函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 处有定义时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，此结论在 §1.5 中讨论.

3. 左极限与右极限

前面给出的 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，x 趋于 x_0 的方式是任意的，可以从 x_0 的左侧 $(x<x_0)$ 趋于 x_0，也可以从 x_0 的右侧 $(x>x_0)$ 趋于 x_0. 但是，有时我们只能或只须考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^-$），或仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 的变化趋势.

定义 1.5　如果当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，那么称常数 A 为 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

例如，$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

如果当 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，那么称常数 A 为 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例如，$\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

根据左右极限的定义，显然可以得到如下定理.

定理 1.1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

例 4 讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x) = |x|$ 的极限是否存在.

解 因为 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

所以由定理 1.1 得 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，如图 1－4.

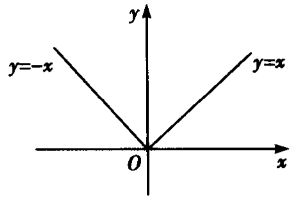

图 1－4

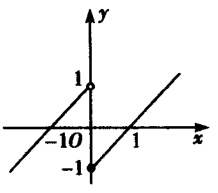

图 1－5

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geqslant 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ 讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = -1$

$f(x)$ 的左、右极限都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在，如图 1－5.

习题 1.1

1. 讨论下列函数当 $x \to 0$ 时，函数的极限是否存在.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & x \geqslant 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ 画出它的图像，并讨论 $x \to 1$ 时，函数的极限是否存在.

§1.2　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

我们常会遇到以零为极限的变量. 例如：当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$是以零为极限的；当 $x\to 2$ 时，$x-2$ 是以零为极限的.

定义 1.6　以零为极限的变量称为无穷小量，简称无穷小.

以上所说的例子中，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$是无穷小量；$x\to 2$ 时，$x-2$ 是无穷小量.

应当注意，无穷小量是一个变量，是一个以零为极限的变量，它不是一个很小的数. 一个不论多么小的数都是一个常数. 只有常数 0 是一个特殊的无穷小，因为 $\lim 0=0$.

可以验证无穷小量具有如下性质：

(1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量；

(2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量；

(3) 有界变量与无穷小量之积是无穷小量.

推论　常量与无穷小量之积仍是无穷小量.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解　因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界变量；而 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$是无穷小量；所以当 $x\to\infty$ 时，$\frac{\sin x}{x}$是有界变量 $\sin x$ 与无穷小量$\frac{1}{x}$的乘积. 于是，由性质 3 可知，当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}$是无穷小量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

由极限定义和无穷小量的定义，可以推得以下定理.

定理 1.2　变量 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 可以表示为常数 A 与一个无穷小量之和. 即：

如果　$\lim f(x)=A$，则有　$f(x)=A+\alpha$；
其中 α 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

反之，如果　$f(x)=A+\alpha$，其中 α 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.
则　$\lim f(x)=A$.

注意　这里是为了省略起见，在极限符号下面并没有注明变化的趋向，即它们对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 等都适用. 当然，在同一问题中，自变量的变化过程是相同的，这一点以后不再加以说明.

二、无穷小量与无穷大量的关系

当我们研究变量变化趋势时，有一类变量具有共同点，在各自的变化过程中都是无限增大的. 如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|$ 无限增大. 函数 $f(x)=x^2$，当 x 无限增大时，x^2 也无限增大. 这类变量称为无穷大量.

定义 1.7　在变量的变化过程中，如果 $|y|$ 可以无限增大，则称变量 y 是无穷大量（简称无穷大），记作　$\lim y=\infty$.

由以上讨论可知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$.

在定义 1.7 中，如果变量 y 只取正值（或只取负值），就称变量 y 为正无穷大（或负无穷大），记作　$\lim y=+\infty$（或 $\lim y=-\infty$）.

例如，由函数图像可得出　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

在求极限的过程中，我们常用到无穷小量与无穷大量的关系，对此有如下定理.

定理 1.3　在变量的变化过程中

(1) 如果 $y(\neq 0)$ 是无穷小量，则 $\frac{1}{y}$ 是无穷大量；

(2) 如果 y 是无穷大量，则 $\frac{1}{y}$ 是无穷小量.

（证明略）.

三、无穷小量的比较

两个无穷小量的比较，不论在理论上还是在实际问题中，都是很重要的. 所谓两个无穷小量的比较，就是对它们趋向于零的快慢程度进行比较.

例如，当 $x\to 0$ 时，x、$2x$、x^2 都是无穷小量，但它们趋于 0 的速度却不一样. 列表比较如下.

表 1－2

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
$2x$	0.2	0.02	0.002	0.0002	…
x^2	0.01	0.0001	0.000001	0.00000001	…

显然 x^2 比 x 及 $2x$ 趋于零的速度要快得多.

为了比较无穷小量趋于零的快慢程度，我们给出无穷小量阶的概念.

定义 1.8　设 α、β 是两个无穷小量，如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小

量，记作 $\beta=o(\alpha)$.

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小量.

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq0,c$ 为常数)，则称 β 与 α 是同阶的无穷小量；特别地当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是等价的无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$，所以当 $x\to0$ 时，x 与 $2x$ 是同阶的无穷小量. 又因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$，所以当 $x\to0$ 时，x^2 是比 x 较高阶的无穷小量，反之，当 $x\to0$ 时，x 是比 x^2 较低阶的无穷小量.

习题 1.2

1. 函数 $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ 在什么变化过程中是无穷大量？又在什么变化过程中是无穷小量？

2. 当 $x\to0$ 时，下列变量中哪些是无穷小量？

$2x$，　$\sqrt{x}$，　$\frac{2}{x}$，　$\frac{x}{x^2}$，　$\frac{x^2}{x}$，　2^x-1，　$\ln(1+x)$

§1.3　极限的运算

为了解决极限的计算问题，本节将讨论极限运算法则，并利用这些法则去求一些变量的极限. 在下面的讨论中，u、v 都是 x 的函数，a、b、c 都是常量.

定理 1.4　如果 $\lim u=A,\lim v=B$ 则 $\lim(u+v)$ 存在，且

$$\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v=A\pm B$$

即两个具有极限的变量的和(差)的极限等于这两个变量的极限的和(差).

证明　因为 $\lim u=A,\lim v=B$　由定理 1.2 有

$$u=A+\alpha,v=B+\beta$$

其中 α、β 均为无穷小量，

于是 $(u\pm v)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$.

由无穷小量的性质 1 知 $\alpha\pm\beta$ 是无穷小量，因此由定理 1.2 有

$$\lim(u\pm v)=A\pm B=\lim u\pm\lim v$$

此定理可推广到三个或三个以上的有限个变量的情况.

定理 1.5　如果 $\lim u=A,\lim v=B$，则 $\lim uv$ 存在，且

$$\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v=AB$$

即两个具有极限的变量的积的极限等于这两个变量的极限的积.

证明 因为 $\lim u=A,\lim v=B$ 由定理 1.2 有

$$u=A+\alpha,v=B+\beta$$

其中 α、β 均为无穷小量，

于是
$$uv=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(B\alpha+A\beta+\alpha\beta)$$

由无穷小量的性质及推论知 $B\alpha+A\beta+\alpha\beta$ 是无穷小量，因此有

$$\lim(uv)=AB=\lim u\cdot\lim v$$

此定理也可推广到三个或三个以上的有限个变量的情况，且由此定理很容易得出以下推论：

推论 1 如果 $\lim u=A$，c 为常数，则

$$\lim(cu)=c\lim u=cA$$

此推论表明，常数因子可以提到极限符号外面.

推论 2 如果 $\lim u=A$，n 为正整数，则

$$\lim u^n=(\lim u)^n=A^n$$

以后可证明，如果 n 是正整数，则

$$\lim u^{\frac{1}{n}}=(\lim u)^{\frac{1}{n}}=A^{\frac{1}{n}}$$

同样我们可以证明：

定理 1.6 如果 $\lim u=A,\lim v=B\neq0$，则 $\lim\frac{u}{v}$ 存在，且

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}=\frac{A}{B}$$

利用这些定理和推论可求下面变量的极限.

例 1 $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-5x+8)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-5x+8)=\lim\limits_{x\to1}3x^2-\lim\limits_{x\to1}5x+\lim\limits_{x\to1}8=3\lim\limits_{x\to1}x^2-5\lim\limits_{x\to1}x+8$

$$=3(\lim_{x\to1}x)^2-5+8=3-5+8=6$$

前面已经给出，若初等函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

即可如下求极限：$\lim\limits_{x\to1}(3x^2-5x+8)=3\times1^2-5\times1+8=6$

例 2 $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x}{x^2-9}$

解 因为 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)=0$

所以不能直接利用商的运算法则求此分式的极限，但

$$\lim_{x\to3}2x=6\neq0$$

因此可求出 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to3}2x}=\frac{0}{6}=0$

即当 $x\to3$ 时，$\frac{x^2-9}{2x}$ 是无穷小量，由无穷大量与无穷小量的关系可以得出