通用版

高中 新课程 导读丛书

数学

必修1

主编：黄仁寿

课标解读 知识要点 课程探究 方法整合 课外延伸 自主练习

湖南文艺出版社

高中新课程导读丛书

数学 必修1

主编：黄仁寿
编者：刘 亮 黄 伟 宁 致 吴有根 陈炽喜
吴江春 方汪涛 张国辉 姜义军 戴雄辉

湖南文艺出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中新课程导读丛书．数学．1：必修/黄仁寿主编；刘亮等编写．—长沙：湖南文艺出版社，2007．7
ISBN 978-7-5404-3959-0

Ⅰ.高... Ⅱ.①黄...②刘... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 112510 号

高中新课程导读丛书

数学必修 1

黄仁寿 主编

责任编辑：徐应才

湖南文艺出版社出版、发行

（长沙市雨花区东二环一段 508 号 邮编：410014）

网址：www.hnwy.net

湖南省新华书店经销

湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷

*

2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092mm 1/16 印张：9.25

字数：214,000

ISBN 978－7－5404－3959－0

定价：12.00 元

绪　言

屈指数来，自英国工程师培利（J. Perry，1854—1920）于1901年打响教改第一枪，至今已越百年。进入21世纪，发生在中国的基础教育的课程改革，其涉及的人数之多，政府介入的力度之大，堪称世界之最。2004年秋季，广东、山东、海南、宁夏等省率先进入高中课程改革实验；2005年、2006年，江苏、福建等省依次跟进；湖南省也将于2007年正式进入高中课改。

新的课程理念为课堂注入了新的活力，也对教学提出了更高层次的要求。为与时俱进，把课程改革引向深入，我们组织了一批资深的特（高）级教师、教研员，针对高中新课程教材的各个模块，编写了《高中新课程导读丛书》。

本书为丛书中的《数学必修1》。本书在依据课标、植根课本、立足课堂、拓展创新的理念下，对新课标教材进行了教学法上的再创造。全书结构严格与现行教材匹配。每节设置了如下栏目：

课标解读

教材是学科教学的蓝本，《课标》是主导教材的灵魂。本栏目对本节内容的《课标》要求进行了简明扼要的解读，旨在让学生领悟教学内容的精髓。

知识要点

这是一张“知识点”的清单，也是一个能力发展的基础平台。掌握了它，学生就拥有了一个知识结构，学什么？为什么？也就一清二楚了。

课程探究

这是本书最具特色的栏目之一。编者站在“引领者”的角度，对教学内容的重点和难点，既进行深入浅出的分析，又在学生可接受的前提下，沿着知识结构的“最近发展区”进行了合情的发散。

方法整合

这是本节内容的主体部分。它通过一系列立足基础、新意盎然的例题，辅之以精辟的解析，并提炼隐含于问题中的通性和通法，让读者从方法论高度整合教材内容，形成能力结构。

课外延伸

这也是本书的一个特色栏目。栏目内容和教学内容相关，但又突破了教学

内容的束缚，将读者的视野引向一个更广阔的空间。

优化训练

包括自主练习、单元检测和综合测试。

任何能力均要在训练中养成和发展，数学能力也不例外。这个栏目正好为读者提供了一个科学的训练基地。选题注重小、巧、活，表现出高智能含量并且面向全体学生，是本栏目的特色。它将引领学生从基点起步，以最快的速度攀升，直达能力发展的高峰。

本丛书既是对新课标教材教学的“导读”，也是引导学生以“探究者”的身份学习新课标高中教材的一种尝试，是否心想事成，我们不敢多说。我们期待着读者读完此书后给予恰如其分的评价，并提出宝贵的意见、建议，以便再版时补正。

丛书编写组

2007 年 6 月

目　录

第一章　集合与函数概念

1.1　集　合

课标解读

1. 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系.

2. 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，体会集合语言的意义和作用.

3. 理解集合之间“包含”与“相等”的含义，能识别给定集合的子集.

4. 理解两个集合的“并集”与“交集”的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

5. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定集合的补集.

第1讲　集合的含义与表示

知识要点

1. 将研究对象称为元素，由一些元素组成的总体叫做集合.

2. 元素和集合的关系是“属于”和“不属于”的关系. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

3. 集合的表示法通常有列举法和描述法两种.

列举法：把集合的元素一一列举出来，并用大括号“{}”括起来表示集合的方法.

描述法：用集合所含元素的共同特征表示集合的方法.

4. 常用数集及其记法如下：

所有正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$.

课程探究

集合的元素有确定性、互异性和无序性三大特征，常称之为集合的三要素.

1. 确定性：给定一个集合，任何一个元素在不在这个集合中是确定的，不存在“可能在”又“可能不在”的模糊判断. 如：

“某学校的聪明女生”“著名的歌星”“数轴上很靠近原点的点”等，均不能构成集合，因为“聪明”“著名”“很靠近”在这里都是不确定的. 李宇春算不算“著名的歌星”无法作出判断.

2. 互异性：给定一个集合，构成该集合的元素是互不相同的，也就是说同一元素在集合中不能重复出现. 如：

设集合 $A=\{a^2+1,a+1,-3\}$,$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若$-3\in B$，求实数 a 的值.

事实上，由$-3\in B$，而 $a^2+1>0$，知 $a^2+1\neq-3$.

故 $a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$.

由此解得 $a=0$ 或 $a=-1$.

但当$a=0$时，集合 A 中的元素$a^2+1=a+1$，不符合集合中元素互异性的要求. 而当$a=-1$时，$A=\{2,0,-3\}$,符合题意.

3. 无序性：给定一个集合，其构成与该集合元素的排列顺序没有关系. 如：$\{1,2,3,4\}$与$\{4,3,2,1\}$是同一个集合.

方法整合

【例 1】 下列每组对象，可以组成集合的是　　　（　　）

A. 当代著名科学家　　B. 面积为 1 的三角形

C. $\sqrt{2}$的近似值.　　C. 绝对值很小的数

【分析】 A 中的“著名”无法确定标准；B 中“$\sqrt{2}$的近似值”也没有明确要求；D 中什么叫“绝对值很小”也说不清楚. C 中“面积为 1 的三角形”具有确定性.

【答案】 C.

【评注】 确定一个对象能否构成集合的关键就是看该对象是否具有确定性.

【例 2】 选择适当的方法表示下列集合：

(1) 由方程 $x^2-9=0$ 的实数根组成的集合；

(2) 由小于 8 的所有质数组成的集合；

(3) 不等式 $4x-5<3$ 的解集.

解 (1) 用列举法，$\{-3,3\}$；

(2) 用列举法，$\{2,3,5,7\}$；

(3) 用描述法，$\{x|x<2\}$.

【例 3】 设集合 $B=\left\{x|x\in\mathbf{N},\dfrac{6}{x+2}\in\mathbf{N}\right\}$,试用列举法表示集合 B.

【分析】 把 B 中的元素给予具体化，然后一一列举出来，并放在大括号内即可.

解 因为$\dfrac{6}{x+2}\in\mathbf{N}$，$x\in\mathbf{N}$，

所以 $2+x$ 只能是 1，2，3，6，

所以 x 只能是 0，1，4，即 $B=\{0,1,4\}$.

【例 4】 有三个集合：

①$\{x|y=x^2+1\}$；②$\{y|y=x^2+1\}$；③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$

(1) 它们是不是相同的集合?

(2) 它们各自的含义是什么?

【分析】 对于用描述法给出的集合，首先要清楚集合中的代表元素是什么，元素满足什么条件?

解 (1) 它们是互不相同的集合.

(2) 因为集合①中$\{x|y=x^2+1\}$的代表元素是 x，满足条件 $y=x^2+1$ 中的 $x\in\mathbf{R}$，所以$\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$；

因为集合②中$\{y|y=x^2+1\}$的代表元素是y，满足条件$y=x^2+1$中的y的取值范围是$y\geqslant 1$，所以$\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}$；

因为集合③中$\{(x,y)|y=x^2+1\}$的代表元素是(x,y)，可以认为是满足$y=x^2+1$的数对(x,y)的集合，所以

$\{(x,y)|y=x^2+1\}=\{$抛物线$y=x^2+1$上的点$\}$.

【点悟】 认识由描述法表示的集合，一要看集合的代表元素是什么，它反映了集合的元素的形式；二要看元素满足什么条件．集合是一套数学的符号语言，对数学符号语言的理解和运用，是高中数学能力的一个重要方面．

【例5】 数集A满足：若$a\in A$，$a\neq 1$，则$\frac{1}{1-a}\in A$．证明：

(1) 若$2\in A$，则在A中还有另外两个数，求出这两个数；

(2) 集合A不可能是单元素的实数集．

【分析】 根据题干给出的信息，"若$a\in A,a\neq 1$，则$\frac{1}{1-a}\in A$"来寻求解题思路．

【证明】 (1) 因为$2\in A$，$2\neq 1$，所以$\frac{1}{1-2}=-1\in A$．

因为$-1\in A$，$-1\neq 1$，所以$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$．

因为$\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\neq 1$，所以$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$．

所以-1，$\frac{1}{2}\in A$，即集合A中另外两个数为-1和$\frac{1}{2}$．

(2) 若A是单元素实数集合，则$a=\frac{1}{1-a}$，即$a^2-a+1=0$．

又方程$a^2-a+1=0$在实数范围内无解，所以$a\neq\frac{1}{1-a}$，故集合A不是单元素实数集合．

课外延伸 »»»

【问题】 给定一个数集A和一种运算"$*$"，若对这个集合A中的任意两个元素x_1、x_2都有$x_1 * x_2$仍然是这个集合A的元素，那么就称集合A对运算法则$*$是封闭的．现设$A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$

(1) 证明集合A对加法和乘法是封闭的；

(2) 集合A对减法和除法是封闭的吗？

【分析】 根据封闭性的定义，在集合A任取两数x_1，x_2，需判断x_1+x_2，x_1x_2，x_1-x_2，$\frac{x_1}{x_2}$分别是不是A的元素，是，则运算是封闭的，否，则是不封闭的．

【探究】 (1) 任取x_1，$x_2\in A$，则必存在m_1，n_1，m_2，$n_2\in\mathbf{Z}$，使得$x_1=m_1+n_1\sqrt{2}$，$x_2=m_2+n_2\sqrt{2}$，于是

$$x_1+x_2=(m_1+n_1\sqrt{2})+(m_2+n_2\sqrt{2})=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2};$$

$$x_1x_2=(m_1+n_1\sqrt{2})(m_2+n_2\sqrt{2})=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}.$$

因为m_1，n_1，m_2，$n_2\in\mathbf{Z}$，所以m_1+m_2，n_1+n_2，$m_1m_2+2n_1n_2$，$m_1n_2+m_2n_1\in\mathbf{Z}$.

所以，x_1+x_2，$x_1x_2\in A$.

故集合 A 对加法和乘法是封闭的.

(2) 同 (1) 可证明集合 A 对减法是封闭的，但对除法不是封闭的. 如：

令 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=2$，则 x_1，$x_2\in A$，而$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

因为$\frac{1}{2}\notin \mathbf{Z}$，所以$\frac{x_1}{x_2}\notin A$.

即集合 A 对除法不是封闭的.

【说明】 此题立足于本节内容，思维合情发散，十分有趣，本问题是命题创新的一种重要方式.

自主练习

一、选择题

1. 下列集合表示方法正确的是 ( )

A. $\{1,2,2,4\}$

B. 不等式 $x-5>0$ 解集为$\{x-5>0\}$

C. 所有奇数表示的集合为$\{x\in \mathbf{Z}|x=2k+1\}$

D. 所有偶数表示的集合为$\{x\in \mathbf{Z}|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$

2. 方程组$\begin{cases}3x+y=2\\2x-3y=27\end{cases}$的解集是 ( )

A. $\begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}$　　B. $\{x,y|x=3,y=-7\}$

C. $\{3,-7\}$　　D. $\{(x,y)|x=3,y=-7\}$

3. 集合 $A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=4k+1,k\in \mathbf{Z}\}$，又 $a\in A$，$b\in B$，则有 ( )

A. $(a+b)\in A$　　B. $(a+b)\in B$

C. $(a+b)\in C$　　D. $(a+b)$不属于 A、B、C 中任何一个

二、填空题

4. 用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 若 $A=\{x|x^2=x\}$，则-1 ________ A；

(2) 若 $B=\{x|x^2+x-6=0\}$，则 3 ________ B；

(3) 若 $C=\{x\in \mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，则 8 ________ C；

(4) 若 $D=\{x\in \mathbf{Z}|-2<x<3\}$，则 1.5 ________ D.

5. 将集合$\{(x,y)|2x+3y=16,x,y\in \mathbf{N}\}$用列举法表示为________.

三、解答题

6. 下面两个集合的意义是否相同？为什么？

$\{x|x^2-ax-1=0\}$，$\{a|$方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根$\}$.

7. 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\frac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2) $B=\{y\mid y=-x^2+8, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$；

(3) $C=\{(x,y)\mid y=-x^2+8, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$.

8. 用描述法表示下列集合：

(1) 被 5 除余 1 的正整数集合；

(2) 使 $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合；

(3) 坐标平面内，以 x 轴为中心轴线，宽度为 2 的带形区域（包括边界）中的点的集合.

9. (1) 用列举法表示下列给定的集合：

①大于 1 且小于 6 的整数；

②$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -\pi<2x-1\leqslant 3\}$.

(2) 用适当的方法表示下列集合并化简：

①二元二次方程组 $\begin{cases} y=-x, \\ y=x^2 \end{cases}$ 的解集；

②一元一次不等式组 $\begin{cases} -3<x<\pi, \\ 3\leqslant x<\sqrt{17} \end{cases}$ 的整数解.

第2讲　集合间的基本关系

知识要点

1. 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，也称集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A).$$

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A).$$

2. 用平面上封闭曲线的内部来代表集合，这种图称为 Venn 图.

3. 如果集合 A 是集合 B 的子集($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$)，此时集合 A 与集合 B 的元素是一样的，称集合 A 与集合 B 相等，记作

$$A=B.$$

4. 对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A).$$

5. 将不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$，并规定：空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

课程探究

1. 空集是一个特殊的集合. 准确理解空集的概念，运用空集的性质，是求解集合问题的重要一环.

如：给出以下命题：①$\varnothing=\{x|x\neq x\}$；②$\varnothing\in\{\varnothing\}$；③$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；④$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$，试判断这些命题的真假.

事实上，集合 $\{x|x\neq x\}$ 中不存在任何元素，故①为真命题；$\{\varnothing\}$ 为非空集合，其元素为 $\varnothing$，故②为真命题；空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，故③④均为真命题. 所以这些命题均是真命题.

2. 对于含有 n 个元素的有限集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

当 $n=0$ 时，A 为空集，其子集个数为 $1=2^0$；

当 $n=1$ 时，A 的子集有 $\varnothing$，$\{a_1\}$，其子集个数为 $2=2^1$；

当 $n=2$ 时，A 的子集有 $\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_1,a_2\}$，其子集个数为 $4=2^2$；

……

一般地，集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集的个数为 2^n 个；真子集个数为 2^n-1 个；非空真子集个数为 2^n-2 个.

待将来进一步学习了高中数学的有关内容之后，这个结论可给出严格的证明.

方法整合

【例 1】 已知 $A=\{x|x\leqslant a-1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x<0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是　　　　(　　)

A. $a\in\mathbf{R}$ B. $a\leqslant 1$ C. $a<1$ D. $a\neq 1$

【分析】 由 $A\subseteq B$，知 A 的元素一定是 B 的元素，故 $a-1<0$，即 $a<1$.

【答案】 C.

【例 2】 设集合 $M=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{11+\sin x}$，其中 $x\in(0°,90°)$，则下列关系中正确的是 （ ）

A. $a\subsetneqq M$ B. $a\notin M$ C. $\{a\}\in M$ D. $\{a\}\subsetneqq M$

【分析】 由 $x\in(0°,90°)$，知 $0<\sin x<1$，$a=\sqrt{11+\sin x}<\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，故 $a\in M$，$\{a\}\subsetneqq M$.

【答案】 D.

【点悟】 元素和集合的关系是“属于（$\in$）”或“不属于（$\notin$）”的关系，因而“$a\subsetneqq M$”的表示法是错误的. 集合和集合的关系是“包含于（$\subseteq$）”或“不包含于（$\not\subseteq$）”的关系，因而“$\{a\}\in M$”的表示法是错误的. 本题容易误选 A 或 C，需引起注意.

【例 3】 试讨论下面的集合哪些是相等的？并说明理由.

$\{0,5\}$，$\{(0,5)\}$，$\{(5,0)\}$，$\{5,0\}$.

解 四个集合中只有$\{0,5\}$和$\{5,0\}$的意义相同，它们都有且只有两个相同的元素 0 和 5，故$\{0,5\}=\{5,0\}$.

而$\{(0,5)\}$与$\{(5,0)\}$虽都只有一个元素，但$\{(0,5)\}$中的元素$(0,5)$与$\{(5,0)\}$中的元素$(5,0)$的意义是不一样的. 它们是两个不同的元素. 因此，其他集合中再没有两个集合的相等的关系了.

【例 4】 已知集合 $A=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

（1）若 A 是空集，求 a 的取值范围；

（2）若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并把这个元素写出来；

（3）若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

解 集合 A 是方程 $ax^2-3x+2=0$ 在实数范围内的解集.

（1）因为 A 是空集，故方程 $ax^2-3x+2=0$ 无解，即$\triangle=(-3)^2-8a<0$. 因此解得

$$a>\frac{9}{8}.$$

（2）当 $a=0$ 时，方程只有一个解 $x=\dfrac{2}{3}$；

当 $a\neq 0$ 时，要 A 中只有一个元素，即要一元二次方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两个相等的实数根，故

$$\triangle=(-3)^2-8a=0$$

由此解得 $a=\dfrac{9}{8}$.

故当 $a=0\left(\text{或 } a=\dfrac{9}{8}\right)$时，$A$ 中只有一个元素，是$\dfrac{2}{3}\left(\text{或}\dfrac{4}{3}\right)$.

（3）要 A 中至多只有一个元素，包括 A 是空集和 A 中只有一个元素两种情况. 由（1）（2）的结果，知 $a=0$ 或 $a\geqslant\dfrac{9}{8}$.

【例 5】 已知集合 $A=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}^*\}$，求证：$A\subsetneqq B$.

【分析】欲证 $A \subsetneqq B$，即要证 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$. 为证 $A \subseteq B$，只要证对任一 $x_0 \in A$，就能够证明 $x_0 \in B$；要证 $A \neq B$，可从 B 中找一个元素不属于 A.

【证明】设 $x_0 \in A$，即存在 $a \in \mathbf{N}^*$ 满足 $x_0 = a^2 + 1$. 由于

$$a^2+1=(a+2)^2-4(a+2)+5,\text{其中 } a+2\in\mathbf{N}^*$$

故 $x_0 \in B$，即 $A \subseteq B$.

又当 $b=2$ 时，

$$y=b^2-4b+5=(b-2)^2+1=1,$$

这里 $1 \in B$，而当 $a \in \mathbf{N}^*$ 时，$x=a^2+1>1$，可知 $1 \notin A$，因此 $A \neq B$. 由 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，即得 $A \subsetneqq B$.

【例 6.】设集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x \mid mx-1=0\}$，若 $B \subsetneqq A$，求实数 m 组成的集合 M 的子集的个数.

解 由 $x^2-2x-3=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$，所以 $A=\{-1, 3\}$.

因为 $B \subsetneqq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{3\}$，所以 $m=0$ 或 $m=-1$ 或 $m=\frac{1}{3}$，

所以 m 的集合 $M=\left\{0, -1, \frac{1}{3}\right\}$. 所以 M 的子集有 $2^3=8$(个).

【说明】$B \subsetneqq A$ 这个条件在应用时切记 $B=\varnothing$ 这种情况，否则会造成失误.

课外延伸 »»

【问题】设 f 是一个对应法则，A、B 是两个非空集合. 如果对于 A 中的任何元素 x，按对应法则 f 在 B 中有惟一的元素 y 和它对应，反之对 B 中的任何元素 y，在 A 中存在惟一元素 x，按照对应法则 f 和 y 对应，则称 f 为从 A 到 B 的一一对应. 已知 $A=\{x \mid x \geqslant 1\}$，$B=\{y \mid y>1\}$，请建立一个从 A 到 B 的一一对应.

【探究】此问题的困难在于 A 比 B 多了一个元素“1”. 为了突破这个难点，我们先退而考虑两个特殊的情况.

(1) 若 $A=B$，则问题很好办，取 $y=x$ 即可.

(2) 若 A、B 的元素均为正整数，即 $A=\mathbf{N}^*$，$B=\{y \mid y \geqslant 2, y \in \mathbf{N}\}$，这也好办，取 $y=x+1$，即可.

现将两种办法结合起来，即可得到从 A 到 B 的一一对应：

$$y=\begin{cases} x, & x\in A \text{ 且 } x\notin\mathbf{N}^*, \\ x+1, & x\in A \text{ 且 } x\in\mathbf{N}^*. \end{cases}$$

【评注】从分析到求解是一个先退后进、以退求进的过程，同时也是分解与组合的过程，其中 $y=x+1(x\in\mathbf{N}^*)$ 用到了无限集的性质. 这也是解题的一个关键.

自主练习 »»

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x \mid x^2=1\}$，集合 $V=\{x \mid ax=1\}$，若 $V \subseteq P$，那么 a 的值是 ( )

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 0，1 或 -1

2. 集合 $M=\{x \mid x=1+a^2, a\in\mathbf{N}^*\}$　$P=\{x \mid x=a^2-4a+5 \quad a\in\mathbf{N}^*\}$ 下列关系中正确的是 ( )

A. $M\subsetneqq P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M=P$　　D. $M\not\subseteq P$ 且 $P\not\subseteq M$

3. 设 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$若 $A\subsetneqq B$，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\{a|a\geqslant 2\}$　　B. $\{a|a\leqslant 1\}$　　C. $\{a|a\geqslant 1\}$　　D. $\{a|a\leqslant 2\}$

4. 非空数集 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$且 S 还满足条件：若 $a\in S$，$6-a\in S$，则符合上述条件的集合 S 的个数是　　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 3

5. 数集 $M=\{x|x=(2n+1)\pi, n\in\mathbf{Z}\}$和数集 $N=\{x|x=(4k\pm1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M=N$　　C. $N\subsetneqq M$　　D. $M\supset N$

二、填空题

6. 若$\{1,2,3\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4\}$，则 $A=$________.

7. 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且 $A\supseteq B$，则 a 的值为________.

三、解答题

8. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+4=0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|(x+1)(x^2+3x-4)=0, x\in\mathbf{R}\}$，又 $A\subsetneqq P\subseteq B$，求满足条件的集合 P.

9. 若 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|2m-1\leqslant x\leqslant m+1\}$，$B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

10. 若方程 $x^2+x+a=0$ 至少有一根为非负实数，求实数 a 的取值范围.

11. 设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，集合 $A=\{(x,y)\mid x-y=0\}$，集合 $B=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x-y=1\\x+4y=5\end{cases}\right\}$. 化简集合 B，并求出集合 A 与集合 B 的关系.

第3讲　集合的基本运算

知识要点

1. 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（读作 A 交 B），即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

2. 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$（读作 A 并 B），即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

3. 如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

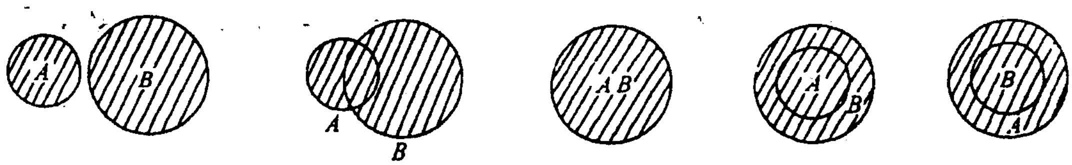
对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合，称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

课程探究

集合的并（$\cup$）、交（$\cap$）、补（$\complement_U A$）等称为集合的运算，用 Venn 图表示集合的运算是十分直观的.

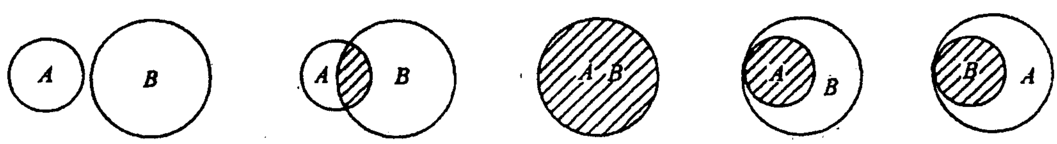
如：图 1—1 的阴影部分表示的是 A 与 B 的并集的各种情况.



①A，B 无公共元素　②A，B 有部分公共元素　③$A=B$　④$A\subseteq B$　⑤$B\subseteq A$

图 1—1

图 1—2 的阴影部分表示的是 A 与 B 交集的各种情况.



①A，B 无公共元素　②A，B 有部分公共元素　③$A=B$　④$A\subseteq B$　⑤$A\subseteq B$

图 1—2

集合的 Venn 图在解题中也有着广泛的应用，请读者进一步参看下面的例 5.

方法整合

【例 1】 已知集合 $A=\{x \mid x>2 \text{ 或 } x<0\}$，$B=\{x \mid x>-4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

【分析】 画出图形，由图形作出解答.