新世纪教改项目规划教材（五年制高职、中职）

JICHU SHUXUE

基础数学

JICHU SHUXUE

（通用版）

JICHU SHUXUE

基础数学教材编写组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪教改项目规划教材(五年制高职、中职)

基础数学(通用版)

基础数学教材编写组

高等教育出版社

内容提要

本书是遵循“必需、够用为度”的原则编写而成的基础数学通用教材.本教材对传统数学体系削枝强干,力求深入浅出,在不影响数学体系的前提下,浅化理论推导,强化应用能力和实践能力的培养.

本教材介绍了最基本的初等数学的知识和解决问题的方法,主要内容包括:集合与函数;幂函数、指数函数和对数函数;任意角的三角函数;加法定理、反三角函数、解三角形;平面向量;复数;空间图形;直线与二次曲线;极坐标与参数方程;数列与数学归纳法;排列组合和二项式定理;并附有计算器的使用方法简介、习题答案等内容.本教材富有弹性,可供教师根据专业的特点与学生的实际情况灵活选用.

本教材可供五年制高职、中职和职高学生使用,也适用于参加成人高考的学生.

图书在版编目(CIP)数据

基础数学:通用版/《基础数学》编写组编.—北京:高等教育出版社,2007.3

ISBN 978-7-04-021420-8

Ⅰ.基… Ⅱ.基… Ⅲ.高等数学—职业教育—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 036713 号

策划编辑 徐　东　　责任编辑 徐　东　　封面设计 吴　昊　　责任印制 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	江苏如皋市印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007 年 4 月第 1 版
印　　张	16.5	印　　次	2007 年 4 月第 1 次
字　　数	420 000	定　　价	19.00 元

物料号　21420-00

基础数学教材编委会

前　言

本教材遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”、“必需、够用为度”的原则编写，在内容、体例安排、习题设置等方面，使教学理论和实际应用结合得更紧密，在整体上有一定的创新.

本教材有以下特点：

1. 为把学生培养成有较宽的数学基础，具有现代创新意识，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化应用能力和实践能力培养，同时适度更新内容.

2. 本教材展示了数学广泛的应用，编写了大量新颖的例题和习题，其中有许多数学在其他学科中应用的题目.例如工程技术、经营管理等方面的计算问题，这些题目有助于开阔学生的视野、启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而使学生不仅喜欢学数学，而且也会应用数学知识来解决实际问题.

3. 教材富有弹性，部分内容加有*号，供教师根据专业的特点与学生的实际情况选用.本书立足“好教好学”，每章复习题分A组和B组，A组为基本题，B组供学生选用，增强了教材的实用性和适用性.本书后面附有常用对数表、反对数表和三角函数表.

本书由高世贵任主编，曾维欣、王福成、徐瑞龙任副主编，参编人员有柯长利、王玉华、朱峥、陈鉴、李自仙，由何成善、曾晓兰任主审，刘维娜、刘光东任副主审，参加审稿的有银燕、康果、贺海燕、张忠明、鄢祝波、刘明、何丽亚.

本书参编院校有：辽宁广播电视大学（辽宁装备制造职业技术学院）、成都商务职业技术学院、泸洲工业学校、成都工业学校、成都铁路运输学校、成都铁路工程学校.

本书在编写过程中，得到了高等教育出版社上海分社徐东同志的热情指导，各编审教师所在院校的领导对编审工作给予了大力的支持，在此我们表示衷心感谢.

由于编者水平有限，不妥之处，恳请使用教材的广大师生批评指正，以便我们进一步提高本教材的质量.

基础数学教材编写组

2006 年 11 月

目　　录

第一章　集合与函数

集合与函数是现代数学的重要概念和基本内容.本章介绍了集合中最基本的常识和集合的简单运算,然后介绍简易逻辑和某些不等式的解法,最后介绍函数及反函数的有关概念.

§1-1　集合的概念

一、集合

我们先考察下面由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些事物为对象所组成的全体:

(1) 1, 3, 5, 7, 9;

(2) 到两定点的距离相等的所有点;

(3) 同一平面内的所有四边形;

(4) $2x$, $3x$, $x+y$;

(5) 某车间的全体工人.

容易发现:每一组对象的全体都是在一定范围内,具有某种特定的性质.例如,(1)中的每一个对象都是大于零小于 10 的奇数;(2)中的每一个对象都是到两个定点等距离的点;(3)中的每一个对象都是同一平面内的四边形;(4)中的每一个对象都是整式;(5)中的每一个对象都是某个车间的工人.

我们把在一定范围内具有某种特定性质的对象的全体,称为**集合**,简称**集**,把组成某一集的各个对象称为这个集的**元素**.

如果集合 A 含有有限个元素,则称集 A 为**有限集**,此时 A 中的元素的个数记为 $n(A)$. 例如,上面(1)、(4)、(5)就是有限集.含有无限个元素的集称为**无限集**.例如,上面(2)、(3)就是无限集.

集一般用大写字母 A, B, C, … 来表示,而集的元素则用小写字母 a, b, c, … 来表示.如果元素 a 是集 A 的元素,记为"$a \in A$",读作"a 属于 A";如果元素 a 不是集 A 的元素,记为"$a \notin A$",读作"a 不属于 A".例如,设 $\mathbf{N}$ 为自然数组成的集(规定 0 是自然数),则

$$5 \in \mathbf{N},\quad 59 \in \mathbf{N},\quad 1203 \in \mathbf{N},\quad 0 \in \mathbf{N};$$

而

$$-3 \notin \mathbf{N},\quad \frac{2}{3} \notin \mathbf{N}.$$

由数组成的集称为**数集**.例如,前面的(1)和 $\mathbf{N}$ 都是数集.我们通常把自然数集、整数集、有理数集、实数集,分别表示为$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$.为了方便起见,有时我们还用 $\mathbf{Q}_+$($\mathbf{Q}_-$)表示正(负)有理数集,用 $\mathbf{R}_+$($\mathbf{R}_-$)表示正(负)实数集,用 $\mathbf{Z}_+$($\mathbf{Z}_-$)表示正(负)整数集.

由点组成的集称为**点集**.如前面的(2)就是一个点集.

对于一个给定的集合,它具有下列性质:

(1)集合中元素的确定性;(2)集合中元素的互异性;(3)集合中元素的无序性.

二、集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在花括号“{ }”内来表示集合的方法，称为**列举法**.

例如，不大于 5 的自然数所组成的集合，可以表示为$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可以写出几个元素，其他用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数可以表示为$\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$，正偶数集可以表示为$\{2, 4, \cdots, 2n, \cdots\}$，$n\in \mathbf{Z}_+$.

2. 描述法

把集合中元素的共同属性描述出来写在花括号“{ }”内表示集合的方法，称为**描述法**. 一般采用的形式为

{元素的一般形式|元素的共同属性}或

{元素的一般形式:元素的共同属性}.

例如，

由不等式 $x-3>2$ 的所有解组成的集合，可表示为

{不等式 $x-3>2$ 的解}或$\{x \mid x-3>2\}$；

正比例函数 $y=kx$ 图像上的点组成的集合，可表示为

{正比例函数 $y=kx$ 的图像上的点}或$\{(x, y) \mid y=kx\}$；

平面直角坐标系中第二象限的点所组成的集合可表示为 $\{(x, y) \mid x<0, y>0\}$.

在实际应用时，用集的哪一种表示法，要由具体问题来定，有的集既可用列举法表示，也可用描述法表示，有的集只能用描述法表示. 例如，方程 $2x-1=0$ 的根可表示为$\{x \mid 2x-1=0\}$，也可用列举法表示为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$；而不等式 $-3<x\leqslant 1$ 的解只能用描述法表示为$\{x \mid -3<x\leqslant 1\}$，却无法用列举法表示.

三、单元素集和空集

定义 1　如果集合 A 只含有一个元素，即 $n(A)=1$，则称 A 为**单元素集**.

我们把方程 $f(x)=0$ 的解组成的集合，称为该方程的**解集**.

例如，方程 $2x-1=0$ 的解集$\left\{\frac{1}{2}\right\}$就是一个单元素集；{某工厂的厂长}也是一个单元素集；集 $\{x \mid x+3=3\}$ 同样是一个单元素集，即$\{0\}$.

定义 2　不含有任何元素的集，称为**空集**，记为$\varnothing$，于是 $n(\varnothing)=0$.

例如，{本班今天第一节课缺席的学生}是一个给定集，但是本班今天第一节课没有人缺席，那么这个集就没有任何元素，是一个空集.

应注意，$\{0\}$是含有一个元素 0 的单元素集，$\varnothing$是不含任何元素的集，即 $n(\{0\})=1$，$n(\varnothing)=0$，它们是两个完全不同的集；a 与$\{a\}$是不同的概念，a 只表示一个元素，而$\{a\}$则表示含一个元素 a 的单元素集.

四、子集

定义 3 在两个集 A 和 B 中，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作"A **包含于** B"或"B **包含** A".

例如，$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$，或 $\{a, b, c\} \supseteq \{a, b\}$；又例如，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Z}$ 等等.

当 A 不是 B 的子集时，记为 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$，读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

对于任何一个集 A，因为它的任何一个元素都属于集 A 本身，所以 $A \subseteq A$. 也就是说，任何一个集都是它本身的子集. 此外还规定，空集是任何集合的子集(当然也有 $\varnothing \subseteq \varnothing$).

定义 4 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$，读作"A 包于 B"或"B 包 A".

例如，$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$，而且 $\{a, b\} \subsetneqq \{a, b, c\}$；还有 $\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z}$；$\mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q}$；$\mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$ 等等.

我们规定，空集是任何非空集的真子集.

为了形象地表示集之间的关系，通常用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示集，用图形中的点表示该集的元素. 这样的图形称为**文氏图**. 图1-1 就表示 $A \subsetneqq B$.

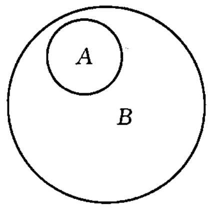

图 1-1

定义 5 在两个集 A 和 B 中，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，则称集 A 与集 B **相等**，记为 $A = B$.

例 1 写出集 $\{a, b, c\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

解 集 $\{a, b, c\}$ 的所有子集为 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{b, c\}$，$\{c, a\}$，$\{a, b, c\}$. 除 $\{a, b, c\}$ 外，其余都是 A 的真子集.

例 2 讨论集 $A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$ 与集 $B = \{x \mid x + 1 = 0\}$ 的包含关系.

解 因为 $A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-1, -2\}$，$B = \{x \mid x + 1 = 0\} = \{-1\}$，所以

$$B \subsetneqq A.$$

习题 1-1

1. 举出三个给定集的例子.

2. 判断下列各对象的全体能否组成集：

(1) 某个图书馆里的所有藏书；　(2) 某校在校学生；　(3) 所有的胖子；　(4) 所有的小孩.

3. 用列举法表示下列各集：

(1) 小于 10 的自然数；　(2) 小于 30 的素数；　(3) $\{x \mid x = 2n - 1, x \leqslant 10, n \in \mathbf{N}\}$；

(4) $\left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}\right\}$.

4. 用描述法表示下列各集：

(1) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$；　(2) $\{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}$；

(3) {北京，上海，天津，重庆}；　(4) {火药，指南针，印刷术，纸}.

5. 用表示元素与集关系的符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 0 ____ $\mathbf{N}$；　(2) -2 ____ $\mathbf{Z}_+$；　(3) -5 ____ $\mathbf{Q}_-$；

(4) $\sqrt{5}$ ____ $\mathbf{R}$；　(5) $-\dfrac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$；　(6) $\dfrac{\pi}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$.

6. 用符号 $\in$、$\notin$、$=$、$\supsetneqq$、$\subsetneqq$ 填空：

(1) $\varnothing$ ____ $\{e\}$；　(2) a ____ $\{a, b\}$；　(3) $\{1, 2, 3\}$ ____ $\{3, 1, 2\}$；

(4) $\varnothing$____$\{0\}$;　　(5) $\mathbf{Q}_-$____$\mathbf{R}_-$;　　(6) $\{P, Q\}$____$\{Q, P\}$.

7. 单元素集的子集有多少个？$\varnothing$的子集有多少个？

8. 写出$\{r, s, t\}$的所有子集，指出哪些是真子集.

9. 讨论下列两个集的包含关系：

(1) $A=\{x \mid x=4n, n\in \mathbf{N}$, 且 $n<8\}$ 与 $B=\{4, 12, 8, 16, 20\}$;

(2) $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 与 $B=\{$小于 15 的素数$\}$.

§1-2 集合的运算

一、交集及交运算

6 的正约数的集为 $A=\{1, 2, 3, 6\}$，10 的正约数的集为 $B=\{1, 2, 5, 10\}$，易见 6 与 10 的正公约数集为 $C=\{1, 2\}$.

显然，集 $C=\{1, 2\}$ 是由所有属于 B 且属于 A 的元素组成的. 对于这样的集，给出下述定义：

定义 1　由所有属于集 A 且属于集 B 的元素所组成的集，称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即　$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

所谓"$x\in A$ 且 $x\in B$"的含义为 x 是集 A 与集 B 的公共元素. 如图 1-2 中的阴影部分就是 A 与 B 的交集 $A\cap B$. 它分为 $A\cap B\neq\varnothing$（图 1-2(1)、(3)、(4)，其中(3)、(4)是(1)的两种特殊情况）和 $A\cap B=\varnothing$（图 1-2(2)）两种情形. 所以，6 与 10 的正公约数的集可以从求 6 的正约数集与 10 的正约数集的交集而得出，即

$$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{1, 2, 5, 10\}=\{1, 2\}.$$

由交集的定义，显然有

$$A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B,\ A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

求交集的运算称为**交运算**.

例 1　设 $A=\{x \mid x>-2\}$，$B=\{x \mid x<4\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x \mid x>-2\}\cap\{x \mid x<4\}=\{x \mid -2<x<4\}$.

例 2　设 $A=\{$四边形$\mid$四个角相等$\}$，$B=\{$四边形$\mid$四边相等$\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{$四边形$\mid$四个角相等$\}\cap\{$四边形$\mid$四边相等$\}$

$=\{$四边形$\mid$四边相等且四个角相等$\}$.

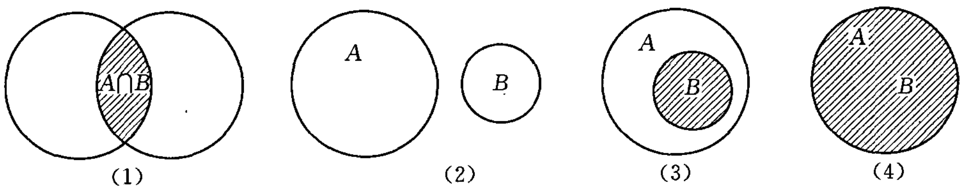

图 1-2

例 3　设 $A=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{3n \mid n\in\mathbf{N}\}$，求 $A\cap B$.

解　$A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2n, \cdots\}$，$B=\{0, 3, 6, 9, 12, \cdots, 3n, \cdots\}$，

故　$A\cap B=\{0, 6, 12, 18, \cdots, 6n, \cdots\}=\{x \mid x=6n, n\in\mathbf{N}\}$.

例 4 已知 $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{a, c, d, e, f\}$, $C=\{d, e, f, m, n\}$,
试求:(1) $(A\cap B)\cap C$; (2) $A\cap(B\cap C)$.

解 (1) $(A\cap B)\cap C=\{a, c, d, e\}\cap\{d, e, f, m, n\}=\{d, e\}$;

(2) $A\cap(B\cap C)=\{a, b, c, d, e\}\cap\{d, e, f\}=\{d, e\}$.

显然,交运算满足交换律和结合律,即

(1) $A\cap B=B\cap A$; (2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

例 5 如图 1-3, $A\supseteq B\supseteq C$, 求:(1) $A\cap C$; (2) $A\cap B\cap C$.

解 (1) $A\cap C=C$;

(2) $A\cap B\cap C=C$.

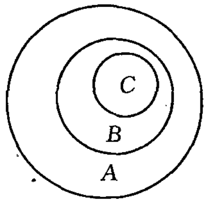

图 1-3

二、并集及并运算

设集 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, 把 A 和 B 两个集的所有元素合并在一起(相同元素只取一个)可以组成一个集 $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. 对于这样的集,给出下述定义:

定义 2 由所有属于集 A 或属于集 B 的元素所组成的集,称为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$, 读作"A 并 B",即 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}$.

$A\cup B$ 的文氏图如图 1-4,图中阴影部分为 $A\cup B$, 它分 $A\cap B\neq\varnothing$ (图 1-4(1), (3), (4),其中(3)、(4)是(1)的特殊情况)和 $A\cap B=\varnothing$ (图 1-4(2))两种情形.

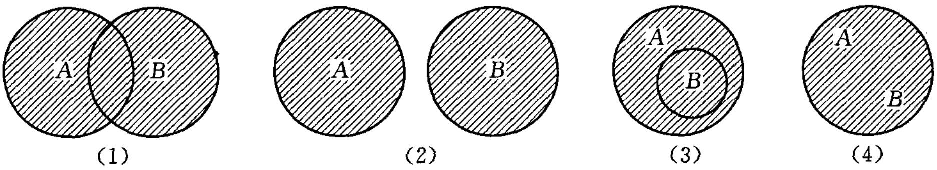

图 1-4

由定义和图 1-4 可知 $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

对于任何一个集 A,显然有 $A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$.

求并集的运算称为**并运算**.

例 6 设 $A=\{x\mid (x+2)(x-3)=0\}$, $B=\{x\mid x^2-9=0\}$, 求 $A\cup B$.

解 因为 $A=\{x|(x+2)(x-3)=0\}=\{-2, 3\}$, $B=\{x|x^2-9=0\}=\{-3, 3\}$.

所以 $A\cup B=\{-2, 3\}\cup\{-3, 3\}=\{-3, -2, 3\}$.

例 7 设 $A=\{x\mid -1<x<3\}$, $B=\{x\mid 1<x<3\}$, $C=\{x\mid 2<x<5\}$. 求:
(1) $A\cup B$; (2) $(A\cup B)\cup C$; (3) $A\cup(B\cup C)$.

解 (1) $A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<3\}=\{x\mid -1<x<3\}$;

(2) $(A\cup B)\cup C=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 2<x<5\}=\{x\mid -1<x<5\}$;

(3) 因为 $B\cup C=\{x\mid 1<x<3\}\cup\{x\mid 2<x<5\}=\{x\mid 1<x<5\}$,

所以 $A\cup(B\cup C)=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<5\}=\{x\mid -1<x<5\}$.

例 8 求 $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\cup\mathbf{R}$.

解 $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\cup\mathbf{R}=\mathbf{R}$.

可以证明,并运算满足交换律与结合律,即

(1) $A \cup B = B \cup A$;　　　(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

三、全集和补集

当研究集与集的关系时，在某些情况下，这些集都是某一个给定集的子集，这个给定的集一般称为**全集**，记为 Ω. 这样，全集包含了所要研究的这些集的全部元素，而各个集都是它的子集.

例如，在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集，自然数集、整数集、有理数集、无理数集等都是它的子集.

研究全集 Ω 和它的子集 A 时，常常涉及 Ω 中不属于 A 的元素组成的集，为此，引入补集的概念.

定义 3　设 Ω 为全集，集 $A \subseteq \Omega$，由 Ω 中不属于 A 的元素组成的集，称为集 A 的**补集**，记为 $\complement_\Omega A$，读作"A 补"，即　$\complement_\Omega A = \{x \mid x \in \Omega$ 且 $x \notin A\}$.

全集的文氏图一般用矩形表示. 图 1-5 的阴影部分表示 A 的补集 $\complement_\Omega A$.

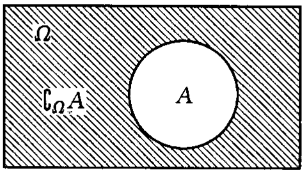

图 1-5

由补集定义可知

$A \cup \complement_\Omega A = \Omega$,　$A \cap \complement_\Omega A = \varnothing$,　$\complement_\Omega \Omega = \varnothing$,　$\complement_\Omega \varnothing = \Omega$,　$\complement_\Omega(\complement_\Omega A) = A$.

求补集的运算称为**补运算**.

例如，若 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A = \{1, 3, 5\}$，则 $\complement_\Omega A = \{2, 4, 6\}$.

容易看出，$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$,

$$\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing,\quad \complement_\Omega(\complement_\Omega A) = \complement_\Omega\{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\} = A.$$

例 9　设 $\Omega = \mathbf{R}$，求 $\complement_\Omega \mathbf{Q}$.

解　有理数集在实数集中的补集是无理数集，所以

$$\complement_\Omega \mathbf{Q} = \{a \mid a \text{ 为无理数}\}.$$

例 10　已知 $\Omega = \mathbf{R}$，$A = \{x \mid 3x + 2 < 0\}$，求 $\complement_\Omega A$.

解　因为 $A = \{x \mid 3x + 2 < 0\} = \left\{x \mid x < -\frac{2}{3}\right\}$，所以

$$\complement_\Omega A = \left\{x \,\middle|\, x \geqslant -\frac{2}{3}\right\}.$$

习题 1-2

1. 判断下列各命题的正误：

(1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{3, 2, 1\}$，则 $A \neq B$；　(　　)

(2) 空集是任何集合的真子集；　(　　)

(3) 设 $A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{1, 3, 4, 5\}$，则 $A \cup B = \{2, 4, 6, 1, 3, 4, 5\}$；　(　　)

(4) 设 $A = \{1, 3, 5\}$，$B = \{3, 5, 7\}$，则 $A \cap B = \{3, 5\}$.　(　　)

2. 已知两个集 A 与 B，求 $A \cap B$：

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$，$B = \{c, d, e, f\}$；　(2) $A = \{$整数$\}$，$B = \{$无理数$\}$；

(3) $A = \{$直角三角形$\}$，$B = \{$等腰三角形$\}$；　(4) $A = \{x \mid x \geqslant 2\}$，$B = \{x \mid x < 4\}$.

3. 已知两个集 A 与 B，求 $A \cup B$：

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$，$B = \{c, d, e, f\}$；　(2) $A = \{$负整数$\}$，$B = \{$负分数$\}$；

(3) $A=\{x \mid x>-2\}$, $B=\{x \mid x<3\}$.

4. 用适当的符号 ($\supseteq$, $\subseteq$, $=$) 填空:

(1) $A\cap B$ ____ B;　(2) $A\cap B$ ____ $B\cap A$;　(3) $A\cup B$ ____ B;　(4) $A\cup B$ ____ $A\cap B$.

5. 设 $A=\{x \mid x(x+2)(x-5)=0\}$, $B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$.

6. 设 $A=\left\{x \,\middle|\, x-\frac{3}{5}<0\right\}$, $B=\{x \mid 5x+1>0\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$.

7. 设 $A=\{a, b, c, d, e, f\}$, $B=\{a, c, e, f, g\}$, $C=\{c, e, g\}$, 求:

(1) $A\cup B\cup C$;　(2) $A\cap B\cap C$;　(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

8. 设 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, $C=\{3, 5, 7\}$, 验证:

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;　(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(3) $\complement_\Omega(A\cap B)=\complement_\Omega A\cup\complement_\Omega B$;　(4) $\complement_\Omega(A\cup B)=(\complement_\Omega A)\cap(\complement_\Omega B)$.

9. 设 $\Omega=\{x \mid -3<x<10\}$, $A=\{x \mid -2<x<5\}$, 求 $\complement_\Omega A$.

§1-3 命　　题

一、命题的概念

我们在初中已经学过命题,可以判断真假的语句称为**命题**. 例如语句:

① $6>5$,　② 3 是 15 的约数,　③ π 是整数

都是命题. 其中①、②是真的,③是假的. 不能判断真假的句子,不能称为命题. 例如,句子

④ 祝你健康!　⑤ 你会说英语吗?　⑥ 你快离开这里

等都不是命题. 正确的命题称为**真命题**;错误的命题称为**假命题**. 命题常用小写的拉丁字母 p, q, r, s, …表示.

以上三个命题比较简单,由简单的命题可以组合成新的比较复杂的命题. 例如,

⑦ 5 的倍数的末位数字是 0 或 5,　⑧ 菱形的对角线互相垂直且平分,

⑨ π 是非整数.

二、逻辑联结词

"或"、"且"、"非"这些词称为**逻辑联结词**. 不含逻辑联结词的命题,称为**简单命题**,例如①、②、③. 由简单命题与逻辑联结词构成的命题,称为**复合命题**. 例如命题⑦、⑧、⑨. 复合命题⑦、⑧、⑨的构成形式分别是:p 或 q, p 且 q, 非 p(非 p 也叫做命题 p 的否定).

下面介绍这几个联结词.

1. 且

设 p、q 是两个命题,则 p 且 q 构成一个新命题,记为 $p\wedge q$, 读作 p 且 q. 例如,命题

p: 15 能被 3 整除,　q: 15 能被 5 整除,

用"且"联结,则构成新命题

$p\wedge q$: 15 能被 3 整除,且能被 5 整除.

表 1

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

容易理解,两个命题用"且"联结构成的新命题,**当且仅当这两个命题都是真命题时,新命题**

才是真命题;如果其中有一个是假命题,那么新命题就是假命题.给定两个命题 p、q,它们与 p 且 q 的真假关系可列成表 1.根据表 1,我们可由命题 p、q 的真假判断出 p 且 q 的真假.表 1 称为 $p \wedge q$ 的**真值表**.

2. 或

设 p、q 是两个命题,则 p 或 q 构成一个新命题,记为 $p \vee q$,读作 p 或 q.例如,命题

$$p: 4 > 3, \qquad q: 4 = 3,$$

用"或"连结,则构成新命题

$$p \vee q: 4 > 3 \quad 或\ 4 = 3.$$

上式又通常记为 $4 \geqslant 3$,读作 4 大于或等于 3.

两个命题用"或"联结构成的新命题,在数学中,规定**只有在两个命题都是假命题情况才是假命题,在其他情况下所得的新命题都是真命题**.给定两个命题 p、q,它们与 $p \vee q$ 的真假关系可列成表 2.根据表 2,我们可由 p、q 的真假来判断 $p \vee q$ 的真假.表 2 称为 $p \vee q$ 的**真值表**.

在上面的例子中,$4 > 3$ 是真的,$4 = 3$ 是假的,则 $4 \geqslant 3$ 应是真命题.

我们再看一个例子: p:明天刮风, q:明天下雨,

用"或"联结,则构成新命题: 明天刮风或明天下雨.

根据上述真值表,这个新命题,当"明天刮风不下雨",或者"明天下雨不刮风",或者"明天刮风又下雨"时是真命题,只有当"明天既不刮风又不下雨"时才是假命题.

表 2

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例 1 指出下列命题组构成的"p 且 q","p 或 q"形式的复合命题的真假:

(1)p: $2+1=5$, q: $4>3$; (2)p: 20 是 5 的倍数, q: 20 是 4 的倍数.

解 (1) 因为 p 假、q 真,所以由且、或的真值表得

$2+1=5$ 且 $4>3$ 是假命题; $2+1=5$ 或 $4>3$ 是真命题.

(2) 因为 p 真、q 真,所以由且、或的真值表得

20 是 5 的倍数且 20 是 4 的倍数是真命题;

20 是 5 的倍数或 20 是 4 的倍数是真命题.

表 3

p	$\neg p$
真	假
假	真

例 2 指出下列命题的真假: (1) $3 \geqslant 3$; (2) $4 \leqslant 3$.

解 (1) $3 \geqslant 3$ 的含意是 $3 > 3$ 或 $3 = 3$,由于 $3 = 3$ 是真命题,所以 $3 \geqslant 3$ 是真命题;

(2) $4 \leqslant 3$ 的含意是 $4 < 3$ 或 $4 = 3$,由于这两个命题都是假命题,所以 $4 \leqslant 3$ 是假命题.

3. 非

设 p 是一个命题,则 p 的"否"构成一个新命题,记为 $\neg p$,读作"非 p".例如

① p: $5=3$, $\neg p$: $5 \neq 3$ ($\neg p$ 还可写为"$5>3$ 或 $5<3$"); ② p: $2>3$, $\neg p$: $2 \leqslant 3$;
③ p:全班同学**都是**男生,$\neg p$:全班同学**不都是**男生,或$\neg p$:全班同学至少有一个女生;

(注意:"都是"的否定只需是"不都是",而不必是"都不是".事实上有一个不是就足以把"都是"否定了.)

④ p:甲、乙两射手都击中目标,$\neg p$:甲、乙两射手中至少有一个没有击中目标.

容易理解,如果 p 是真命题,则 $\neg p$ 是假命题;如果 p 是假命题,则 $\neg p$ 是真命题. p 与 $\neg p$ 的真假关系,可列成表 3. 根据表 3,我们可由 p 的真假来判断 $\neg p$ 的真假. 表 3 称为 $\neg p$ 的**真值表**.

习题 1-3

1. 判断下列句子是不是命题:

(1) 地球是太阳的行星;　(2) 今天会下雨吗?　(3) $20-5\times 3=10$;

(4) 请你到办公室去;　(5) 等腰三角形两底角相等;　(6) 8 是素数;

(7) $\sqrt{2}$是无理数;　(8) 在三角形中,大角所对的边也大.

2. 分别写出由下列各组命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题:

(1) p: $\sqrt{2}$是有理数,　q: $\sqrt{2}$是无理数;

(2) p:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根符号不同,q:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根绝对值不同;

(3) p:正方形的四条边相等,　q:正方形的四个角相等;

(4) p:三角形两条边的和大于第三边,q:三角形两条边的差小于第三边.

3. 指出下列复合命题的形式及其构成:

(1) 12 是 48 与 36 的公约数;　(2) 方程 $x^2+1=0$ 没有实根;　(3) 10 或 15 是 5 的倍数;

(4) 有两个角为 45°的三角形是等腰直角三角形.

4. 判断下列命题的真假:

(1) $5>2$ 且 $7>3$;　(2) $3>4$ 或 $3<4$;　(3) $7\geqslant 8$;

(4) 方程 $x^2-3x+4=0$ 的判别式小于或等于 0.

5. 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题的真假:

(1) p: π 是无理数,　q: π 是实数;　(2) p: $2>3$,　q: $8+7\neq 15$.

6. 填写下表:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$p\wedge q$
真	真				
真	假				
假	真				
假	假				

§1-4　充分条件与必要条件

在数学中,我们常遇到"如果 p,则 q"形式的命题,其中 p、q 分别表示研究对象所具有的性质或命题. 这种命题的真假需要通过证明来判定. 当"若 p 则 q"是真命题时,我们又说,由 p 可推出 q,记为

$$p\Rightarrow q, \tag{1}$$

读作"p 推出 q". 这时我们又称

$$p\text{ 是 }q\text{ 的充分条件}, \tag{2}$$

或

$$q\text{ 是 }p\text{ 的必要条件}. \tag{3}$$

这就是说,(1)、(2)、(3)这三个命题所表达的都是同一逻辑关系,只是说法不同而已. 下面我们举例说明.