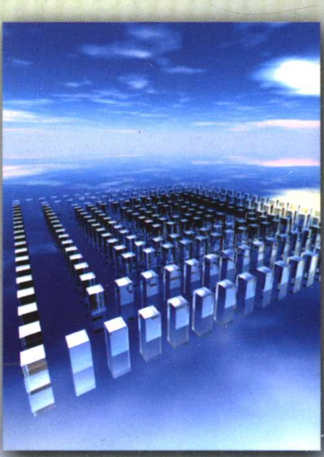
高等学校“十一五”精品规划教材

大学数学（一）

主　编　刘　萍
副主编　武　群　丁　梅
主　审　杨　健





中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校"十一五"精品规划教材

大学数学（一）

主　编　刘　萍
副主编　武　群　丁　梅
参　编　李　丽　李晓晓　董海燕
主　审　杨　健

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本教材分为《大学数学（一）》和《大学数学（二）》。本书是《大学数学（一）》，主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等。每节均配有习题，每章后均有学习指导并配有总复习题和综合测试题，全书最后的附录部分给出了初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、积分表和习题参考答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校以及本科院校的二级职业技术学院等工科类各专业的数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学. 1 / 刘萍主编. —北京：中国水利水电出版社，2007

高等学校"十一五"精品规划教材

ISBN 978-7-5084-4809-1

Ⅰ. 大… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 099829 号

书　　名	高等学校"十一五"精品规划教材 **大学数学（一）**
作　　者	主编　刘萍　　副主编　武群　丁梅　　主审　杨健
出版 发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	787mm×1092mm　16 开本　18 印张　427 千字
版　　次	2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	**28.00 元**

前　言

本教材从培养高职高专教育人才的目标出发，以教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导，在认真总结、分析、吸取全国高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上，以中国水利水电出版社出版的《大学数学》（刘萍、武群、丁梅等编写）为蓝本编写的。

本教材取材合适、深度适宜、份量恰当，符合认知规律，富有启发性，便于学习，有利于激发学生学习兴趣及各种能力的培养。

本教材与蓝本《大学数学》比较，作了如下的改动：

1. 本教材将蓝本《大学数学》的十九章精简为十三章，删掉了原教材中的第九章和第十九章的数学实验、第十四章的场论、第十七章的概率论、第十八章的数理统计等内容。

2. 调整了章节顺序，使本教材在整体结构上构成了新的形式：第一章至第六章为一元函数微积分学，第七章至第十章为多元函数微积分学，第十一章至第十三章为工程数学。

3. 其中，《大学数学》（一）中作了如下较大改动：

（1）第一章：将极限的 ε—δ 定义、极限的几何意义以及跳跃间断点、可去间断点等改为选学内容，合并了某些内容，由原来的八节改为现在的六节。

（2）第二章：将左导数、右导数、微分在近似计算中的应用以及由参数方程确定的函数的二阶导数作为选学内容。

（3）第三章：将 ∞^0、0^0、1^∞ 等形式的极限和利用函数的单调性证明不等式改为选学内容。

（4）第四章：增加了选学的内容倒代换。

（5）第六章：鉴于目前中学数学与大学数学内容的衔接问题，增加了极坐标，作为选学内容。

4. 本教材注重教学中的因材施教的原则，体现了分层次教学的新思路，将习题分为 A 组、B 组、C 组，以便不同层次、不同能力的学生可以有选择地学习。

每一章之后有总复习题、综合测试题，学习在复习了本章内容之后，可对其内容的掌握情况进行检测。

5. 为适应新形势，全书减少了一些较难的例题和习题，精简了一些定理的证明。

6. 选学内容用小号字体的形式给出，供教师和学生选用。

参加本教材编写的有：刘萍、丁梅、武群、李丽、李晓晓、董海燕。刘萍主编，武群、丁梅副主编。刘萍统稿并定稿。课后所有习题由李丽、李晓晓、董海燕完成。杨健同志在百忙之中审阅了全稿，并提出许多宝贵的意见。

由于编者水平有限，加之时间仓促，全书难免有错误和不妥之处，敬请读者不吝指正。

作　者

2007 年 4 月

高等学校“十一五”精品规划教材

工程力学（高职高专适用）
大学数学（一）
大学数学（二）
水资源规划及利用
水力学
环境水利学
灌溉排水工程学
水利工程施工
水利水电工程概预算
工程制图
工程制图习题集
水利工程监理
水利水电工程测量
理论力学
材料力学
土力学
工程水文学
地下水利用
结构力学
水文地质与工程地质
水利科技写作与实例
电路理论
计算机网络
高电压技术
单片机原理及接口技术
电子与电气技术
Visual FoxPro 6 数据库与程序设计
大学计算机基础
可编程控制器原理与应用
电力系统微机继电保护
电力系统继电保护原理
信号与系统
数字信号处理
数字电子技术基础
模拟电子技术
水电厂计算机监控系统
电机与拖动
控制电机
电磁场与电磁波
自动控制原理
电路分析基础
电工电子技术简明教程

目　录

第一章　函数、极限与连续

微积分学的主要研究对象是函数，所使用的基本方法是极限，所涉及的主要函数为连续函数. 因此本章首先对中学已学过的函数知识作必要的复习与补充，然后着重讨论函数的极限与连续性.

第一节　函　　数

一、区间与邻域

1. 区间

所谓区间就是实数轴上一些实数的集合. 一般情况下，区间分为有限区间和无限区间.

设 $a<b$ 且 a、$b\in \mathrm{R}$，则数集 $\{x|\ a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|\ a\leqslant x\leqslant b\}$，$a$ 和 b 分别称为闭区间 $[a,b]$ 的左、右端点，其中 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

数集 $\{x|\ a<x<b\}$ 称为开区间 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|\ a<x<b\}$，a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左、右端点，其中 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. 如图 1-1(a)、(b)所示.

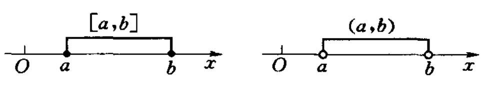
类似地有半开半闭区间，其中 $(a,b]=\{x|\ a<x\leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，$[a,b)=\{x|\ a\leqslant x<b\}$ 称为左闭右开区间.

以上四个区间称为有限区间.

无穷区间有：$[a,+\infty)=\{x|\ a\leqslant x<+\infty\}$，如图 1-2($a$)所示，$(a,+\infty)=\{x|\ a<x<+\infty\}$，$(-\infty,b)=\{x|\ -\infty<x<b\}$，如图 1-2($b$)所示，$(-\infty,b]=\{x|\ -\infty<x\leqslant b\}$.

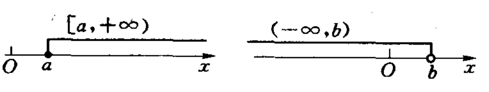
另外，全体实数集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无穷区间.

以后凡是不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，我们就简单地称它是"区间"，且常用 I 表示.



(a)　(b)

图 1-1



(a)　(b)

图 1-2

2. 邻域

在数轴上，以 x_0 为中心，以 $2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域. 如图 1-3(a)所示，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x|\ |x-x_0|<\delta\}$$

在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0，所得集合记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1-3(b)所示，即

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x|\ 0<|x-x_0|<\delta\}$$

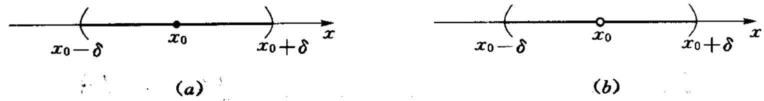


图 1－3

二、函数概念

定义 1.1 设 D 是一个给定的数集，x 和 y 是两个变量，如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

习惯上，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时，函数 y 的对应值 y_0 称为函数在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 当自变量 x 取遍 D 中的所有值时，对应的函数值的全体组成的数集称为函数的值域，记作 W，即 $W=\{y|\ y=f(x),x\in D\}$.

为了表明 y 是 x 的函数，一般用记号 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 或 $y=F(x)$ 等来表示，有时可以用一个字母 y 表示 $y=y(x)$.

在函数定义中，函数的"定义域 D"与"函数的对应法则 f"是至关重要的两个要素，如果两个函数，它们的"定义域"与"对应法则"都相同，则这两个函数就是相同的，否则就是不相同的. 至于自变量和因变量用什么字母表示无关紧要.

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都有唯一确定的值与之对应，这种函数称作单值函数，否则称作多值函数. 本课程所讨论的函数大都是单值函数，下面举一例多值函数：圆的方程 $x^2+y^2=9$ 确定了一个以 x 为自变量，$[-3,3]$ 为定义域的函数，当 x 取 -3 或 3 时，对应的函数值只有一个，但当 x 在开区间 $(-3,3)$ 内取任意一个值时，对应的函数值就有两个，所以该函数是多值函数.

三、函数的表示法

一般地，函数有三种表示法，即解析法、表格法、图示法.

1. 解析法

以数学表达式表示一个函数的方法称作函数的解析法. 例如 $y=\sin x+2$，$y=7$ 等都是用解析法表示的函数. 用解析法表示函数的优点是便于理论推导和计算.

需特别指出的是，用解析法表示函数，不一定总是用一个数学式子表示，也可以用几个式子来表示一个函数，这样的函数称为分段函数. 例如

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是确定在区间 $[0,+\infty)$ 上的一个分段函数，当自变量 x 取闭区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值由公式 $y=2\sqrt{x}$ 确定；当 x 取区间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，函数值由公式 $y=1+x$ 确定，如图 1－4 所示.

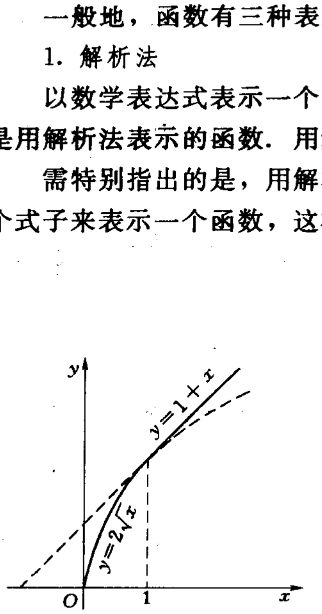


图 1－4

应注意：分段函数是一个函数而不是多个函数，对分段函数求函数值时，一定要注意自变量所在的区间对应的函数关系.

【**例 1**】 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品，

超过 20kg 不超过 50kg 的部分每千克交费 0.20 元，超过 50kg 部分每千克交费 0.30 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品的重量为 $x$kg，应交运费为 y 元，由题意知：

当重量不超过 20kg 时，$y=0$，$x\in[0,20]$

当重量超过 20kg 但不超过 50kg 时，$y=(x-20)\times0.2$，$x\in(20,50]$

当重量超过 50kg 时，$y=(50-20)\times0.2+(x-50)\times0.3$，$x>50$

综上所述，得
$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0.2x-4, & 20<x\leqslant 50\\ 0.3x-9, & x>50\end{cases}$$

【例 2】 已知符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求其定义域、值域以及 $f(3)$，$f(0)$，$f(-2)$.

解 由题意得此函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，$f(3)=1$，$f(0)=0$，$f(-2)=-1$. 它的图形如图 1-5 所示.

对于任何的 $x\in R$，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$. 如 $-5=\operatorname{sgn}(-5)\cdot|-5|$，$|-5|=-5\cdot\operatorname{sgn}(-5)$

2. 表格法(或列表法)

用表格表示函数的方法称作函数的表格表示法. 它是将自变量与其对应的因变量的值通过表格表示出来. 如三角函数表、对数表等. 表格法的优点在于所求的函数值容易查得.

3. 图示法

以图形来表示函数的方法称作函数的图示法. 图示法的优点是直观形象，但不便于理论分析.

例如，某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化(如图 1-6 所示)，由图可以看到一昼夜内每一时刻 t，都有惟一确定的温度 T 与之对应，因此图中曲线在闭区间$[0,24]$上确定了一个函数，此即用图示法表示的函数.

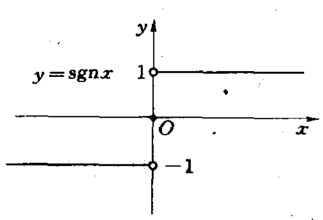


图 1-5

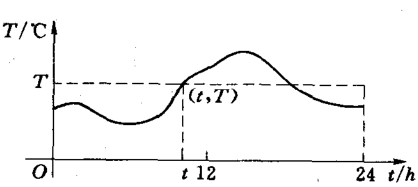


图 1-6

四、反函数

定义 1.2 设有函数 $y=f(x)(x\in D,y\in W)$，如果对于 W 中的每一个值 y 都有 D 中惟一确定的值 x 与之对应，此时满足 $f(x)=y$，这时把 y 看作自变量，x 看为因变量，则确定了一个新的函数 $x=f^{-1}(y)$，称作函数 $f(x)$的反函数，而 $y=f(x)$称作直接函数.

习惯上，把函数 $y=f(x)$的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$. 反函数的定义域等于其直接函数

的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域.

互为相反的函数，其图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－7 所示.

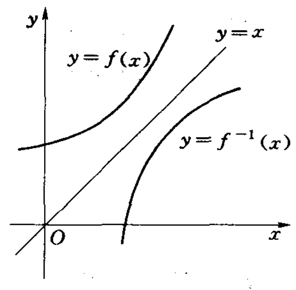


图 1－7

五、初等函数

1. 基本初等函数

(1)幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为任意实数）．幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域随 μ 而异．例如 $y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为$[0,+\infty)$；$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为$(0,+\infty)$；$y=x^{-1}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；但不论 μ 取何值，幂函数 $y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$内一定有意义，且其图形都经过点$(1,1)$.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 中，$\mu=1$，2，3，$\dfrac{1}{2}$，-1 等都是常见的幂函数，其图形如图 1－8(a)、(b)、(c)所示.

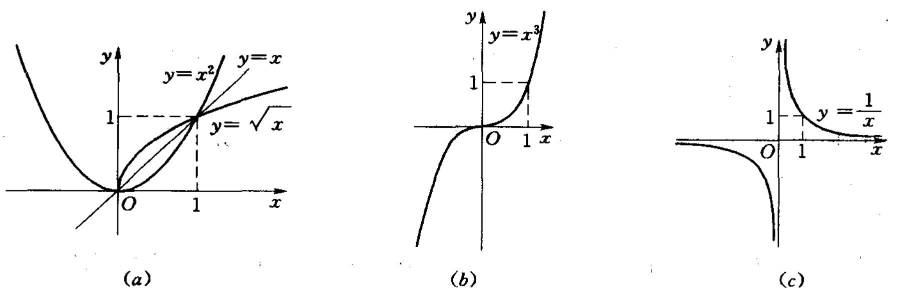


图 1－8

(2)指数函数　$y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$．指数函数$y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，其图形都过点$(0,1)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 函数单调减少，如图 1－9 所示.

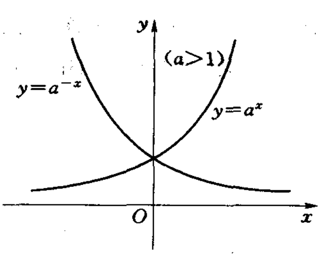


图 1－9

$y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$的图形关于 y 轴对称.

以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，是工程中常用的指数函数.

(3)对数函数　$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$.

对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右侧，且通过$(1,0)$点.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调增加的，且在区间$(0,1)$内，函数值为负，在区间$(1,+\infty)$内，函数值为正，如图 1－10(a)所示；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调减少的，且在区间$(0,1)$内，函数值为正，在区间$(1,+\infty)$内，函数值为负，如图 1－10(b)所示.

以 e 为底的对数函数，称为自然对数函数，记作 $y=\ln x$.

(4)三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，即$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，其图形位于直线 $y=-1$ 与直线 $y=1$ 之间，因为 $\sin(-x)=-\sin x$，所以 $y=\sin x$ 是奇函数，图

形关于原点对称；又因为 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，所以 $y=\sin x$ 是周期函数，$T=2\pi$，图形沿 x 轴每相隔 2π 重复一次，如图 1－11 所示.

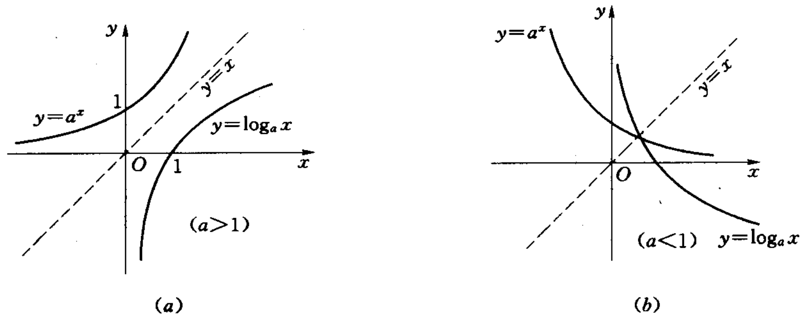


图 1－10

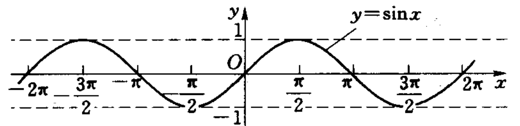


图 1－11

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，即 $|\cos x|\leqslant 1$，$y=\cos x$ 是偶函数，图形关于 y 轴对称；$y=\cos x$ 也是周期函数，$T=2\pi$，图形沿 x 轴每相隔 2π 重复一次，如图 1－12 所示.

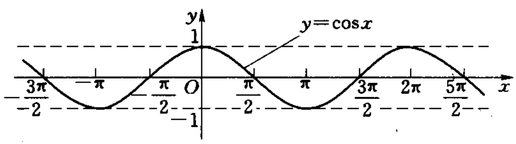


图 1－12

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的全体实数，值域为全体实数，余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为除去 $x=k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的全体实数，值域也为全体实数；因为 $\tan(-x)=-\tan x$，$\cot(-x)=-\cot x$，所以 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是奇函数；又因为 $\tan(x+\pi)=\tan x$，$\cot(x+\pi)=\cot x$，所以 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是周期函数，$T=\pi$；在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内 $y=\tan x$ 是单调增加的，在$(0,\pi)$内 $y=\cot x$ 是单调减少的；如图 1－13 和图 1－14 所示.

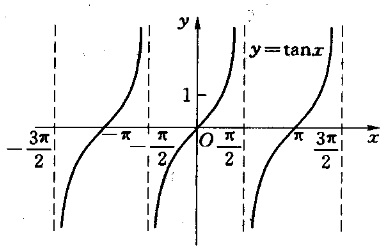


图 1－13

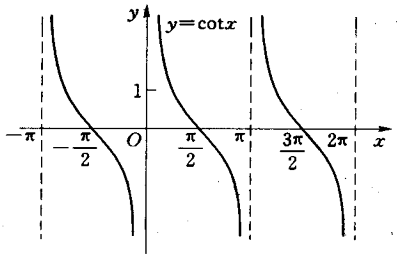


图 1－14

正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$ 都是以 2π 为周期的函数，且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$y=\sec x$ 与 $y=\csc x$ 都无界．如图 1－15 和图 1－16 所示．

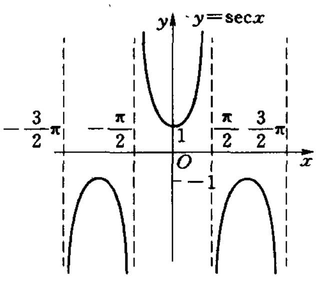


图 1－15

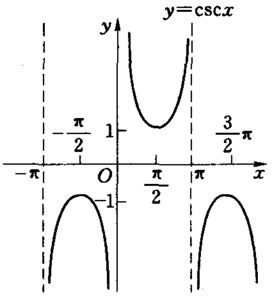


图 1－16

(5)反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，所以其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，因为 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，所以 $y=\arcsin x$ 是奇函数，并且 $y=\arcsin x$ 是单调增加的函数，如图 1－17 所示．

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，$y=\arccos x$ 是区间$[-1,1]$上有界的、单调减少的、非奇非偶函数，如图1－18所示．

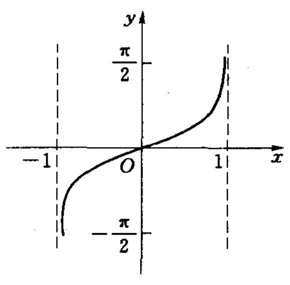


图 1－17

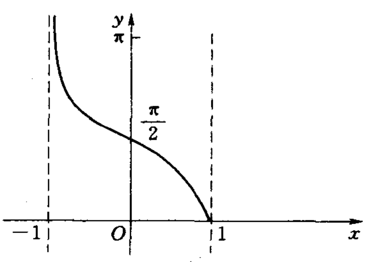


图 1－18

反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数．其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的、单调增加的、奇函数，如图 1－19 所示．

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，$y=\operatorname{arccot} x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的、单调减少的、非奇非偶函数，如图 1－20 所示．

2. 复合函数

定义 1.3　给定函数 $y=f(u)$以及函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$的值域是 $y=f(u)$的定义域的子集，则称 $y=f[\varphi(x)]$为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，其中 u 称作中间变量．

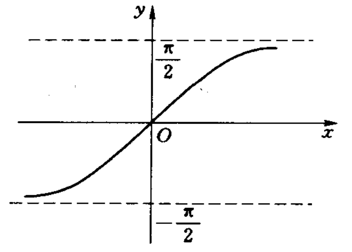


图 1-19

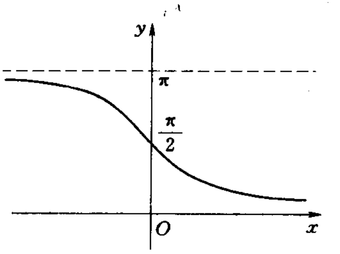


图 1-20

由复合函数的概念可知：只有函数 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域内，才能构成复合函数，否则不能构成复合函数.

例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+1$，由于 $u=x^2+1$ 的值域 $[1,+\infty)$ 是 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 的子集，所以可得复合函数 $y=\sqrt{x^2+1}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

再如，设 $y=\arcsin u$，$u=2x+1$，由于 $u=2x+1$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 不完全包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内，所以这两个函数复合成复合函数 $y=\arcsin(2x+1)$ 时应限制 $u=2x+1$ 的定义域，使其值域不超过 $[-1,1]$，比如可使 $u=2x+1$ 的定义域为 $[-1,0]$.

两个函数复合时，一定要注意复合的条件，不是任意两个函数都可以复合成一个函数的，例如，$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$u\geqslant 2$，全部落在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之外，使得 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.

【例 3】 试求由函数 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数 $y=\sin^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

【例 4】 试求由函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得 $y=\sqrt{1-x^2}$ 即为所求复合函数，其定义域为 $[-1,1]$.

【例 5】 指出 $y=(2x+1)^4$，$y=\sqrt{\lg x}$ 及 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的？

解 $y=(2x+1)^4$ 是由 $y=u^4$ 和 $u=2x+1$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\lg x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\lg x$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=\ln v$，$v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 1.4 由基本初等函数和常数经过有限次的加、减、乘、除和复合运算构成的，并且只能用一个数学式子表示的函数，称作初等函数.

例如，$y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$，$y=\dfrac{x^2+x+1}{e^x+e^{-x}}$ 等都是初等函数.

而 $y=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 与 $y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 都不是初等函数.

六、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界，否则称 $f(x)$在 I 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，但在区间$(1,2)$内有界. 可见，函数是否有界，不仅与函数有关，而且还与区间有关.

2. 函数的单调性

定义 1.6 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，x_1 与 x_2 为区间 I 上的任意两个数，若当 $x_1<x_2$ 时，函数 $y=f(x)$满足

$$f(x_1)<f(x_2)\text{（或 }f(x_1)>f(x_2)\text{）}$$

则称 $y=f(x)$为 I 上的单调增加(或减少)函数.

例如，$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加函数，在$(-\infty,0]$是单调减少函数，在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

如图 1 - 21(a)，表示单调增加函数的曲线总是上升的；图 1 - 21(b)表示单调减少函数的曲线总是下降的.

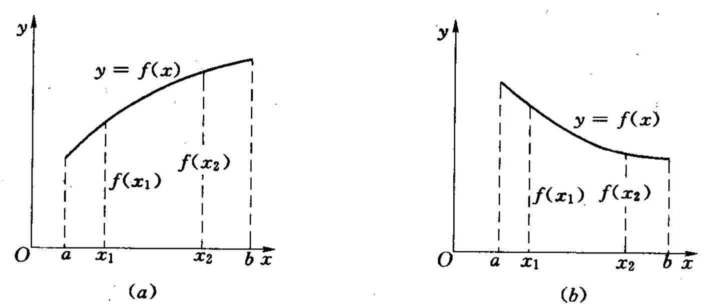


图 1 - 21

3. 函数的奇偶性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有

$$f(x)=f(-x)$$

则称 $y=f(x)$为偶函数.

如果满足
$$f(x)=-f(-x)$$

则称 $y=f(x)$为奇函数.

不是偶函数，也不是奇函数的函数，称为非偶非奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1 - 22(a)、(b)所示.

例如 $y=\sin x$ 是奇函数；$y=\cos x$ 是偶函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非偶非奇函数.