Http://www.nwpup.com

FUDAO JIANGAN

精品课程·名师讲堂

●本讲内容聚焦 ●典型例题分类解析 ●课后作业及答案

线性代数

辅导讲案

主编 徐仲 张凯院

西北工業大學出版社

O JIANGAN

Http://www.nwpup.com

线性代数
辅导讲案

主编　徐　仲　张凯院

西北工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲案/徐仲,张凯院主编.—西安:西北工业大学出版社,2007.8

(精品课程·名师讲堂丛书)

ISBN 978-7-5612-2251-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①徐…②张… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第096631号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号　　**邮编**:710072

电　　话:(029)88493844　88491757

网　　址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西天元印务有限责任公司

开　　本:850 mm×1 168 mm　　1/32

印　　张:9.4375

字　　数:308千字

版　　次:2007年8月第1版　　2007年8月第1次印刷

定　　价:12.00元

前　　言

线性代数是高等院校理工科及经济学科各专业均开设的一门重要基础课，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的主要课程之一．这门课程不仅是学习后续课程的基础，而且对培养学生抽象思维和逻辑推理能力、综合分析和解决问题的能力以及运算能力都起着重要的作用．

本书是根据作者多年的线性代数课程复习和考研辅导教案编写而成的，目的是帮助广大读者、考生在较短时间内系统复习好这门课程的内容，在课程考试或研究生入学考试中取得优异成绩．

全书按照行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型共 6 讲编写，每一讲均包含以下内容：

1. 本讲内容聚焦

一、内容要点精讲　将本讲的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，以利于加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用．

二、知识结构图解　借助框图直观地说明了本讲的主要知识点之间的联系．

三、重点与难点解读　对本讲的重点和常考点进行了分析．

四、考试内容与要求 使考生明确本讲的重点、常考点以及应掌握的程度，正确把握教学、学习和考试的要求．

2. 典型例题分类解析

本部分将相应章节的内容分门别类，按知识点归纳出一些小专题，分别介绍计算过程、解题方法和技巧，并通过对典型例题的分析和评注剖析解题思路，总结解题经验．这一部分是本书的精华所在，读者可以通过学习提高基本运算、推理及应试能力．为了让考生了解硕士研究生入学考试数学试题中线性代数所占的比例及试题类型、深度及广度，本部分编入了许多工学类和经济学类的考研试题，这些试题采用“年份-题类-分数”标识，如 98－3－08 表示 1998 年研究生入学数学（三）的考题，且该题在卷面上所占分数为 8 分．

3. 课后作业及答案

按每讲内容布置了课后作业题并提供了答案或提示．

为了帮助读者了解并适应考试，书末附录中提供了 2006 年和 2007 年全国硕士研究生入学统一考试中的线性代数试题，两套西北工业大学线性代数课程的考试试题，并给出了全部解答．建议读者在动手做完题后，再参阅答案，以检验对所学知识的掌握程度．

本书由徐仲和张凯院任主编．书中的疏漏或不妥之处，敬请读者指正．

编　者

2007 年 5 月于西北工业大学

目　　录

第1讲 行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具，而且在求逆矩阵、求矩阵的秩、求矩阵的特征值、判断向量组的线性相关性、判断二次型的正定与负定等方面都要用到.

1.1 本讲内容聚焦

一、内容要点精讲

1. 2,3 阶行列式

对于 2 阶行列式与 3 阶行列式，可以采用对角线法则来记它们代表的数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

即实线上 2 个(3 个) 元素的乘积取正号，虚线上 2 个(3 个) 元素的乘积取负号，再求其代数和.

注 计算 3 阶以上的行列式时不能采用对角线法则.

2. 排列及其性质

(1) 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 **n 阶**(或级、或元) **排列**. 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 逆序数为奇(偶) 数的排

列称为**奇(偶)排列**. 如果只交换排列中某两个数的位置而其余的数不动,就得到一个新的排列,这一变换称为**对换**.

(2) n 阶排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列的个数各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

(3) 对换改变排列的奇偶性,即偶(奇) 排列经过一次对换变成奇(偶) 排列.

(4) 任一 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 都可以经过一系列对换互变,且所做对换次数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

3. 行列式的定义

n 阶行列式用符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad ①$$

表示,它代表 $n!$ 项的代数和,这些项是一切可能的取自 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶(奇) 排列时该项的符号为正(负),也就是说

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

注 1 式 ① 的 n 阶行列式也简写为 $D=|a_{ij}|$.

注 2 行列式的定义对初学者来说是一个难点,但考试大纲要求并不高,只要"了解"即可. 对于用逆序数给出的行列式的定义,应抓住如下四条:

(1) n 阶排列的总数是 $n!$ 个,故 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

(2) 每项是取自不同行,不同列的 n 个元素的乘积.

(3) 在行下标按自然顺序排列的前提下,每项前面的正负号取决于列下标组成的排列的逆序数的奇偶性,其中一半取正号另一半取负号.

(4) 行列式的值是一个数.

4. 行列式的性质

性质 1 行与列互换,行列式的值不变.

性质 2 某行(列) 的公因子可以提到行列式符号外.

性质 3 如果某行(列) 的所有元素都可以写成两项的和,则该行列式可以

写成两个行列式的和;这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)元素与原行列式相同.

性质 4 两行(列)对应元素相同,行列式的值为零.

性质 5 两行(列)对应元素成比例,行列式的值为零.

性质 6 某行(列)的倍数加到另一行(列),行列式的值不变.

性质 7 交换两行(列)的位置,行列式的值变号.

注 做题时为描述方便,引入下列记号:

① $r_i \div k$(或 $c_i \div k$)表示第 i 行(列)提出公因子 k;

② $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$)表示将第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列);

③ $r_i \longleftrightarrow r_j$(或 $c_i \longleftrightarrow c_j$)表示交换第 i 行(列)与第 j 行(列)的位置.

5. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 次三角行列式的值等于添加适当正、负号的次对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 分块三角行列式可化为低阶行列式的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

6. 行列式按一行(列)展开

(1) 在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩下的元素按照原位置次序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

注 元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式与 a_{ij} 的大小无关，只与该元素的位置有关.

(2) 行列式的值等于它的某一行(列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

(3) n 阶行列式中某一行(列) 的每个元素与另一行(列) 相应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

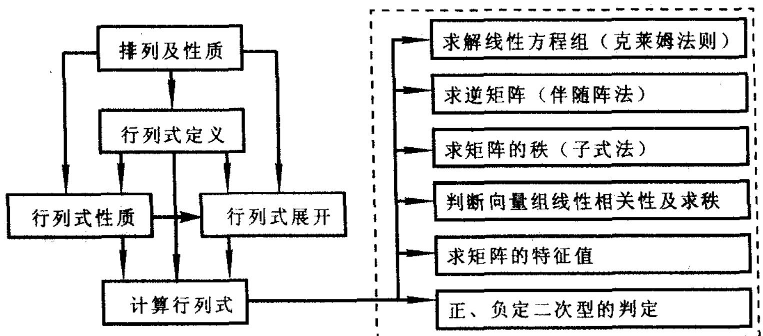
7. **范德蒙(Vandermonde)行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i-a_j) =$$

$$\begin{aligned} &(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot \\ &(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdot \\ &\cdots\cdots\cdot \\ &(a_n-a_{n-1}) \end{aligned}$$

即等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 $a_i-a_j(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的乘积.

二、知识结构图解



三、重点与难点解读

会应用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式是本讲的重点. 要求熟练正确地计算低阶行列式,也要会计算一些特殊形式的 n 阶行列式.

掌握行列式的计算方法和技巧是本讲的难点. 除了利用行列式的性质化为三角行列式和按行(列)展开公式使行列式降阶这些常用的手法外,要根据行列式不同的特点采用特殊的方法,如递推法、数学归纳法、加边法(升阶法),以及利用范德蒙德行列式的结论,等等.

四、考试内容与要求

考试内容	行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理
考试要求	1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质 2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式

1.2　典型例题分类解析

一、逆序数与行列式定义

【例 1】 求 $2n$ 阶排列 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 的逆序数.

分析 在求排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数时,可以从第 2 个数开始,依次统计 j_i $(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数)τ_i,则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$.

【解】 可看出,该排列的前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 不构成逆序,后 n 个数 $2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 之间也不构成逆序,只有前后 n 个数之间才构成逆序,因此排列的逆序数为

$$\tau=\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n+\tau_{n+1}+\tau_{n+2}+\cdots+\tau_{2n}=$$
$$0+0+\cdots+0+0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

【例 2】 如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 I,求排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数.

分析 如果设原排列中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 τ_1,则比 j_1 小的数的个数为 $(n-1)-\tau_1$,于是新排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 $(n-1)-\tau_1$;同理,设原排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 τ_2,则比 j_2 小的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$,于是新排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$;依次类推,设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k,则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k)-\tau_k(k=1,2,\cdots,n)$.

【解】 设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k,则新排列中 j_k 前比 j_k 大

的数的个数为$(n-k)-\tau_k(k=1,2,\cdots,n)$.因为$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=I$,所以排列$j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$的逆序数为

$$\tau=\sum_{k=1}^{n}[(n-k)-\tau_k]=$$
$$[(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0]-(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)=$$
$$\frac{n(n-1)}{2}-I$$

【例3】 写出5阶行列式中含有因子$a_{13}a_{32}$并带正号的所有项.

分析 应写出5阶行列式中含有因子$a_{13}a_{32}$的不同行列的5个元素乘积项,再根据逆序数的正负确定所求的项.

【解】 5阶行列式中含有因子$a_{13}a_{32}$的项为

$$(-1)^{\tau(3j_22j_4j_5)}a_{13}a_{2j_2}a_{32}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

其中$j_2j_4j_5$是1,4,5这三个数构成的全排列,相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(31245)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}=a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}$$
$$(-1)^{\tau(31254)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}=-a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}$$
$$(-1)^{\tau(34215)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}=-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$$
$$(-1)^{\tau(34251)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}=a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$$
$$(-1)^{\tau(35241)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$$
$$(-1)^{\tau(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$$

故5阶行列式中含有因子$a_{13}a_{32}$并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55},\quad a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$$

【例4】 试求$f(x)$中x^4与x^3的系数,其中

$$f(x)=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & x & 3\\ x & x & 2 & 3\\ x & 2 & 1 & -3x\end{vmatrix}$$

分析 根据行列式的定义,在4阶行列式的展开式的24项中,找出含x^4与x^3的项,即可确定$f(x)$中x^4与x^3的系数.

【解】 在表示$f(x)$的4阶行列式中,位于不同行不同列的4个元素乘积含x^4的项只有1项

$$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^15x\cdot x\cdot x\cdot(-3x)=15x^4$$

而含x^3的项有2项