主编 黄健生

（一年级）

最新
高中数学 方法·思维·训练

光明日报出版社

方法·思维·训练丛书

最新高中数学

方法·思维·训练

(京)新登字 101 号

最新高中数学

方法·思维·训练

(一年级)

主编 黄健生

编著 冯士腾 李方烈

方立风 张中慧

光明日报出版社出版发行

(北京永安路 106 号)

邮政编码：100050

电话：3017733-225

新华书店北京发行所经销

北京计量印刷厂印刷

787×1092 1/32 印张 10.625 字数 230 千字

1992年4月 第1版 1992年4月 第1次印刷

印数：1—20 000册

ISBN 7-80091-243-4/G·507

定 价：4.75 元

学习方法·思维·训练丛书

主　编　余辛里

副主编　高　川

程　迟

张世鸿

前　　言

《学习方法·思维·训练丛书》为中学各年级学生课外系列读物，旨在帮助学生理解教材重点、难点，掌握优良学习方法，提高思维、解题、分析、表达能力，开扩思路，将所学知识灵活运用于实际。

《丛书》各分册基本内容包括：重点难点解析、学习方法提示、典型例题精解、知识反馈和思维训练，并配有基础与疑难兼顾、典型与实用兼顾、一般与提高兼顾的适量的课外思考练习。各分册结合本学科特点和学生程度还会有独特的设计。

《丛书》的编者均系具有丰富教学经验和著述的特级或高级教师。他们遵循严格的科学性，严密的逻辑性，鲜明的典型性、启发性和实用性原则，在广泛参阅和认真钻研有关资料的基础上，集思广益，密切配合，协力编出了这套丛书。这里融进了撰稿人自己多年教学教改的心得，也汲取了本单位、本地区以及外省市中学教学研究的成果。

如何拓宽中学生的知识视野，帮助他们掌握正确的学习方法，有效地提高各种能力，是广大教育工作者和家长们十分关心的问题。本丛书的编撰同仁有志于在这方面作些探索。现在奉献给中学青少年朋友的这套丛书，是一个初步的尝试，疏漏不妥之处还望老师和同学们提出宝贵意见。

编　者

1991 年 9 月

目　　录

代　数　部　分

几　何　部　分

代 数 部 分

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

§1　集　合

一、重点难点分析

（一）重点： 有关集合的一些基本概念，如集合和元素的一般概念，集合的表示法，集合与集合之间的包含关系、相等关系，空集、子集、交集、并集和补集等概念。

（二）难点： 上述这些概念的正确涵义，以及相互之间的区别和联系。

（三）重点难点知识分析：

1．在中学数学里，我们所学习的有关集合、对应以及映射的知识，是《集合论》里最基本、最初步的一些内容。十九世纪70年代，德国数学家康托尔（G. Cantor 1845—1918）首先创立了集合的一般理论，使《集合论》成为数学的一个独立的分支。由于它研究的对象、方法、内容的特点，集合的思想很快就渗透到几乎所有的数学部门，对数学严密基础的建立和数学科学的进一步发展产生了巨大的影响。于今集合论已成了整个现代数学的基础。因此，在中学

数学中引入集合的思想，学习集合论的初步知识，不仅有利于加深对传统教材的理解，而且也将为大家进一步学习现代数学以至其他现代科学知识打下良好的基础。

2. “集合”是数学里不定义的原始概念之一。通常被描述为“一些数，一些点，一些图形，一些物体的全体所形成的集体”，或描述为“把一些确定的对象看作一个整体便形成一个集合”。

集合具有两个特性：一是整体性，一是确定性。其中“看作一个整体”一语，就意味着集合是指某一些事物的整体而不是指其中的个别事物，这就是集合的整体性。而对于一个给定的集合，认为其中所包含的事物是确定的，或者说，集合是由所有属于它的元素所完全确定的，这就是集合的确定性。由此可见，只要对象是确定的，看作一个整体，便形成一个集合。至于它的元素是否“具有某种共同属性”，这无关紧要。当然，在通常情况下，我们研究的集合，其元素是“具有某种共同属性”的。

集合里的各个对象叫做这个集合的元素。集合中的元素应具有如下的特性：

(1) **确定性** 集合中的元素，必须是确定的，不是含糊不清的，任何一个对象，都能明确判断它是或者不是某个集合的元素，二者必居其一且只居其一。

(2) **互异性** 集合中任何两个元素都是不相同的。换句话说，同一个元素在一个集合里不能重复出现。

(3) **无序性** 集合与它的元素的组成方式是无关的。如用列举法表示一个集合，写出它的各个元素时，与排列先后的顺序没有关系。

综上所述，在通常情况下，所谓构成一个集合，必须有

三个要素：

（1）范围

（2）特征（某种属性）

（3）确定的对象（元素）

这三条缺一不可。这就是说，在集合概念中，对象（元素）必须是确定的；范围必须是可以衡量（或计数）的，一定的；特征（属性）必须是能够准确判断的。

例如：

（1）“全体3的倍数”能构成一个集合。这里的范围是“全体”；特征是“3的倍数”；元素是“数”。

（2）“一些四边形”不能构成集合。因为，到底是哪些四边形不知道，范围不能衡量。

（3）“一切很大的数”也不能构成集合。因为，什么是很大的数？其特征（属性）不能准确判断。

（4）“平面内的全体”也不能构成集合。因为，元素无法确定。

3．关于集合的表示法

大家知道，表示集合的两种主要方法是列举法和描述法。在数学里常用如下形式表示集合：

$$\{x|p\}.$$

这是描述法的一般形式，其中竖线前面的x叫做此集合的代表元素，竖线后面的P指出元素x所具有的公共属性。$A=\{x|P\}$表示集合A是由所有具有性质P的那些元素x组成的。即：若x具有性质P，则$x\in A$；若$x\in A$，则x具有性质P。例如，$\{x|x=2n-1$，且$n\in N\}$，就是表示正奇数的集合。

4. 关于空集ϕ

由于我们根据某种方法给定一个集合的时候，往往事先并不能肯定它是否含有元素，如果这个集合不含有任何元素，那么就规定这个特殊的集合叫做空集，记为ϕ。例如，教师说："没有听懂的同学下午到办公室来补课。"这实际上，教师给定了一个补课学生的集合。但很可能下午没有任何一个学生到办公室去，因为大家都听懂了。又如，方程$x^2+1=0$在实数域内的解集，显然这个解集没有任何元素。因此，一方面说明空集是客观存在的，另方面引进空集的概念以后，将给我们带来研究上和表达上的很大方便，它将在集合中扮演着重要的角色。例如，有了空集，任何一个有限集的子集的个数计算就显得简单易记，即n个元素的子集共有2^n个。如集合$\{a, b, c\}$的子集的个数就是$2^3=8$个。

5. 关于子集

"A是B的子集"的涵义是：A的任何一个元素都是B的元素，即由任一$x\in A$，能推出$x\in B$。记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）。由此可知，子集概念涉及两个集合之间的关系，即包含关系。值得注意的是，不要把子集说成是由原来集合的部分元素组成的集合。这种说法既和"空集是任何集合的子集"的规定相抵触，也和"A是A的子集"相矛盾，因为空集不含任何元素，而A含有A的全部元素，所以都不是原来集合的部分元素所组成的集合。

此外，还要注意一个集合的子集甚至是一个集合的真子集，其元素的个数不一定少于原来集合的元素个数。例如，

设集合$A=\{$全体自然数$\}=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots\}$；

集合$B=\{$全体正偶数$\}=\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\cdots\}$。

易知，B是A的真子集（$B\subset A$）。可是把A与B中的

元素逐一对应，如 $1\to2$； $2\to4$； $3\to6$； $4\to8$； $5\to10$； ……，$n\to2n$； ……，而且不论 A 中的元素取到多么大的数，B 中都有元素和它对应，这样，我们可以认为 A 与 B 所含的元素是一样多的。

总之，我们不要把集合之间的包含关系与集合元素的多少，或者所谓集合的“大”、“小”混为一谈。

二、典型例题选解

例1 设集合 $A=\{|a+1|,3,5\}$，集合 $B=\{2a+1,a^2+2a,a^2+2a-1\}$，当 $A\cap B=\{2,3\}$ 时，求 $A\cup B$。

分析 欲求 $A\cup B$，关键在于求出 a，这由条件 $A\cap B=\{2,3\}$，根据交集的意义，$|a+1|=2$ 而求出。

解 $\because$ $|a+1|=2$，$\therefore$ $a=1$ 或 $a=-3$。

当 $a=1$ 时，集合 B 的元素 $a^2+2a=3$，$2a+1=3$，由集合的元素应具有互异性的要求，因此 $a\neq1$。

当 $a=-3$ 时，集合 $B=\{-5,3,2\}$。

$$\therefore\quad A\cup B=\{-5,2,3,5\}.$$

说明 深刻理解概念，是解题的钥匙。

例2 （1984年全国高考试题）数集 $x=\{(2n+1)\pi,n$ 是整数$\}$与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi,k$ 是整数$\}$之间的关系是

(A) $X\subset Y$　　(B) $X\supset Y$

(C) $X=Y$　　(D) $X\neq Y$

分析 本题要从集合的包含、相等、不等的概念出发，考察集合与集合之间其元素的所属关系。

解 $\because$ $\{2n+1,n\in z\}=\{$奇数$\}$，

而 $4k\pm1$ $(k\in z)$ 必为奇数，

$\therefore \qquad X \supseteq Y$。

反之，当 $x \in X$ 时，$x=(2n+1)\pi$，若 n 为奇数，即 $n=2k-1$ $(k \in z)$，则 $x=(4k-1)\pi$，$x \in Y$；当 n 为偶数，即 $n=2k$ $(k \in z)$，则 $x=(4k+1)\pi$，$x \in Y$，故 $X \subseteq Y$。

由 $X \supseteq Y$，且 $X \subseteq Y$ 可知：$X=Y$。

说明：判定集合间的关系，其基本方法是归结为判定元素与集合的关系。

此外，由本例的解答过程不难发现：两个集合 A、B 相等，之所以不以“A、B 所含元素完全相同”来定义，而是利用子集来定义，显然比较科学，用起来也是比较方便的。

例3 如果 $I=\{a, b, c, d, e\}$，$M=\{a, c, d\}$，$N=$ $b, d, e\}$，其中 I 是全集，那么 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于

(A) ϕ (B) $\{d\}$

(C) $\{a, c\}$ (D) $\{b, e\}$

分析 首先要求出 $\overline{M}$、$\overline{N}$，然后根据交集的意义确定 $\overline{M} \cap \overline{N}$。

解：$\because \quad M=\{a, c, d\}$，$N=\{b, d, e\}$，

$I=\{a, b, c, d, e\}$

$\therefore \quad \overline{M}=\{b, e\}$，$\overline{N}=\{a, c\}$。

$\therefore \quad \overline{M} \cap \overline{N}=\phi$。故应选(A)。

说明 本题也可以用下述方法作出判断：

$\because \quad M=\{a, c, d\}$，$N=\{b, d, e\}$。

$\therefore \quad M \cup N=\{a, b, c, d, e\}=I$。

$\therefore \quad \overline{M} \cap \overline{N}=\overline{M \cup N}=\phi$。 故应选(A)。

例4 证明：对于任意两个集合 A、B，必有 $\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$（德·摩根律）。

分析 根据补集、交集以及集合相等的定义加以证明。

证明 设 $x\in\overline{A\cap B}$，则 $x\notin A\cap B$。

$\therefore$ $x\notin A$ 或 $x\notin B$，

即 $x\in\bar{A}$，或 $x\in\bar{B}$。

$\therefore$ $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$。 $\therefore$ $\overline{A\cap B}\subseteq(\bar{A}\cup\bar{B})$。

另一方面，设 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$，则 $x\in\bar{A}$ 或 $x\in\bar{B}$，

$\therefore$ $x\notin A$，或 $x\notin B$。 $\therefore$ $x\notin A\cap B$。

$\therefore$ $x\in\overline{A\cap B}$。 $\therefore$ $\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}$。

$\therefore$ $$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

说明 要注意元素与集合的关系。

例5 设 S、T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于

(A) X (B) T (C) ϕ (D) S。

解 $\because$ $X=S\cap T\subset S$，

且 $S\not\subseteq U$，$T\not\subseteq S$，

$\therefore$ $S\cup X=S$。

说明 1. 两个非空集合 S、T，一般有五种关系：①S 是 T 的真子集；②T 是 S 的真子集；③$S=T$；④S 与 T 有公共元素，$S\cap T\subset S$ 且 $S\cap T\subset T$；⑤S 与 T 无公共元素，即 $S\cap T=\phi$。

这五种关系可以用韦恩图表示如下：

根据题意，本题中的 S 与 T 只能是④和⑤。对于④，x 非空，且 $X\subset S$，故 $S\cup X=S$；对于⑤，$X=\phi$，$S\cup X=S$ 仍然成立。由此可见，不论④或⑤，都有 $S\cup X=S$，故应选 (D)。

2. 关于韦恩图：人们为了便于理解，常应用圆或椭圆或其他封闭图形表示一个集合。这种图原来是瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）及英国数学家韦恩（Venn，1834

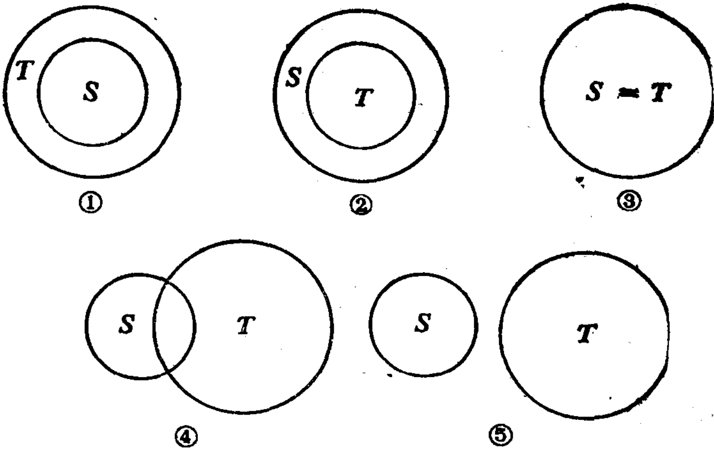

图 1

—1923）先后提出，用来直观地表示概念的外延之间关系的一种图解。因此，称为韦恩图，也叫欧拉图。

例6 设 $A=\{x\,|\,x^2-px+15=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-5x+q=0\}$，又 $A\cup B=\{2,3,5\}$ 且 $A\cap B=\{3\}$，求 p 和 q；

分析 此小题涉及到一元二次方程中根与系数的关系定理(韦达定理)，同时涉及到两个集合的交集及并集的概念。

解 由 $x^2-px+15=0$ 可知

$$\begin{cases}x_1+x_2=p\\ x_1\cdot x_2=15\end{cases}$$

由 $x^2-5x+q=0$ 可知

$$\begin{cases}x_3+x_4=5\\ x_3\cdot x_4=q\end{cases}$$

又∵ $A\cup B=\{2,3,5\}$ 且 $A\cap B=\{3\}$，

∴ 上述两个方程有一个公共根 3。

不妨令 $x_1 = x_3 = 3$，

则 $\qquad x_2 = \dfrac{15}{3} = 5$，$x_4 = 5 - 3 = 2$。

$\therefore \qquad p = 3 + 5 = 8$，$q = 3 \times 2 = 6$

例7　已知集合 $M = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$，$N = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$，$P = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$，且 $M \cap N \supset \phi$，$M \cap P = \phi$，求 a 的值。

分析　由所给条件，集合 N、P 是确定的，即 $N = \{2, 3\}$，$P = \{2, -3\}$，关键的问题在于理解 $M \cap N \supset \phi$ 和 $M \cap P = \phi$ 的含义。

解　由条件可得：$N = \{2, 3\}$，$P = \{2, -3\}$。

$\because \quad M \cap N \supset \phi$，

$\therefore \quad 2$，3 中至少有一个属于 M，

但 $\quad M \cap P = \phi$，$\quad \therefore \quad 2 \notin M$。

$\therefore \quad$ 只有 $3 \in M$

将 $x = 3$ 代入 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 中得

$$a = 5 \quad \text{或} \quad a = -2.$$

当 $a = 5$ 时，$M = \{2, 3\}$，这与 $M \cap P = \phi$ 矛盾。故 $a = -2$。

说明　根据对数的基本性质，"底的对数等于1"，得：$x^2 - 5x + 8 = 2$，即 $x^2 - 5x + 6 = 0$，所以有 $N = \{2, 3\}$。

例8　设 $A = \{x \mid a \leqslant x \leqslant a + 3\}$

$$B = \{x \mid (x + 1)(x - 5) > 0\}$$

a 为何值时，(1) $A \cap B = \phi$；(2) $A \cap B \neq \phi$；(3) $A \cap B = A$；(4) $A \cup \bar{B} = \bar{B}$。

分析　(1) $A \cap B = \phi$ 是指集合 A 与 B 没有公共的元素，