

课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊辉



高中数学 必修3

配人教B版

丛书主编：王后雄

本册主编：曾祥红



中国青年出版社

物流编码



78-02-403203-117



丛书系列

教材完全解读·高中课标本 丛书目录

高中 (课标本·必修1)

- | | | | |
|------|-------------------------|------|----------------|
| 《语文》 | 人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 | 《生物》 | 人教版 苏教版 |
| 《数学》 | 人教版A版 人教版B版 苏教版
北师大版 | 《政治》 | 人教版 |
| 《英语》 | 人教版 外研版 译林牛津版
北师大版 | 《历史》 | 人教版 人民版
岳麓版 |
| 《物理》 | 人教版 粤教版 鲁科版 | 《地理》 | 人教版 鲁教版
湘教版 |
| 《化学》 | 人教版 苏教版 鲁科版 | | |

高中 (课标本·必修2)

- | | | | |
|------|-------------------------|------|----------------|
| 《语文》 | 人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 | 《生物》 | 人教版 苏教版 |
| 《数学》 | 人教版A版 人教版B版 苏教版
北师大版 | 《政治》 | 人教版 |
| 《英语》 | 人教版 外研版 译林牛津版
北师大版 | 《历史》 | 人教版 人民版
岳麓版 |
| 《物理》 | 人教版 粤教版 鲁科版 | 《地理》 | 人教版 鲁教版
湘教版 |
| 《化学》 | 人教版 苏教版 鲁科版 | | |

高中 (课标本·必修3)

- | | | | |
|------|-------------------------|------|----------------|
| 《语文》 | 人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 | 《政治》 | 人教版 |
| 《数学》 | 人教版A版 人教版B版 苏教版
北师大版 | 《历史》 | 人教版 人民版
岳麓版 |
| 《英语》 | 人教版 外研版 译林牛津版 北师大版 | 《地理》 | 人教版 鲁教版
湘教版 |
| 《生物》 | 人教版 苏教版 | | |

高中 (课标本·必修4)

- | | | | |
|------|-------------------------|------|-----------------------|
| 《语文》 | 人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 | 《英语》 | 人教版 译林牛津版
外研版 北师大版 |
| 《数学》 | 人教版A版 人教版B版 苏教版
北师大版 | 《政治》 | 人教版 |

高中 (课标本·必修5)

- | | | | |
|------|-------------------------|------|-----------------------|
| 《语文》 | 人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 | 《英语》 | 人教版 译林牛津版
外研版 北师大版 |
| 《数学》 | 人教版A版 人教版B版 苏教版
北师大版 | | |

ISBN 978-7-5006-7435-1

定价:16.70元

ISBN 978-7-5006-7435-1



9 787500 674351 >

新课标全案材料

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修3
配人教B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红
编委：王强芳 黄河清
丁仁贵 杜建国
王志明 王涛
杜苏 陈锐
王春勇 胡建平
徐志平 邵爱先
朱少华 周锋



中国青年出版社

导航系列丛书

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修3
配人教B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红
编委：王强芳 黄河清
丁仁贵 杜建国
王志明 王涛
杜苏 陈锐
王春勇 胡建平
徐志平 邵爱先
朱少华 周锋



中国青年出版社

教材完全解读

本书特点

基础教育新课改改革已如火如荼地展开,新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求,我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准,让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨,助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点:一是双栏对照,对教材全解全析,在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色;另一个就是注重典型案例学习,突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点,挑战学习的极限,请您在选购和使用本书时,先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点,帮您形成答题要点、解题思维,理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

第1章 解三角形

课标要求

本章主要包括正弦定理、余弦定理、正弦定理和余弦定理的应用三个部分的内容,教材通过正弦定理和余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律。

高考要求

正弦定理、余弦定理常是解三角形的工具,在每年的高考中都有出现,一般考分在4到12分之间。前几年主要考查方式为三角形形状的判断;利用正弦定理、余弦定理解决三角形的边角关系;利用正弦定理、余弦定理解决实际问题。

1.1 正弦定理

名师诠释

【考题1】 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A > B$,求证: $\sin A > \sin B$ 。
【解析】 在 $\triangle ABC$ 中,由 $A > B \Rightarrow a > b$,又因为 $a = 2R \sin A$,
 $b = 2R \sin B$,所以有 $2R \sin A > 2R \sin B$ 。
即 $\sin A > \sin B$ 。

【点评】 在 $\triangle ABC$ 中,若已知 $\sin A > \sin B$,那么 $A > B$ 成立吗?读者不难得到 $A > B$ 是成立的。因为 $\sin A > \sin B \Rightarrow 2R \sin A > 2R \sin B \Rightarrow a > b \Rightarrow A > B$ 。

【考题2】 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $2B = A + C$,且最大边为最小边的2倍,求 $\triangle ABC$ 的三个内角。

【解析】 因为 $2B = A + C$,而且 $A + B + C = \pi$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$ 。

不妨设 $A = \frac{\pi}{3} - \alpha$, $C = \frac{\pi}{3} + \alpha$ ($\alpha > 0$),再设最小边为 a 。

【考题9】 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c - b \cos A}{b - c \cos A}$ 。

【解析】 根据正弦定理
 $c = b \cos A + 2R \sin C - 2R \sin B \cos A$
 $b = c \cos A + 2R \sin B - 2R \sin C \cos A$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(A+B) - \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}{\sin(A+C) - \frac{1}{2}[\sin(A+C) + \sin(C-A)]} &= \frac{\sin(A+B) - \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}{\sin(A+C) - \frac{1}{2}[\sin(A+C) + \sin(C-A)]} \\ &= \frac{\sin(A+B) - \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}{\sin(A+C) - \frac{1}{2}[\sin(A+C) + \sin(C-A)]} \\ &= \frac{\sin(A+B) - \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}{\sin(A+C) - \frac{1}{2}[\sin(A+C) + \sin(C-A)]} \end{aligned}$$

【考题10】 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,求证: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 。

【解析】 本题是证明平面几何中的三角形内角平分线定理,利用正弦定理证明边长之比通过角的正弦值引入,转化为角的正弦之比,即把边长相等转化为角相等。

1.知识·能力聚焦

1. 正弦定理及其证明

正弦定理 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径,则有

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2. 正弦定理及其证明

所以 $\sin B = b \sin A$,即 $\frac{b}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

同理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,即 $\frac{b}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形(如图1-1-1(2))成为直角三角形时,利用同样的方法也可以证明结论,请同学们自己证明。

2.方法·技巧平台

4. 如何判断三角形的形状

(1) 判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形,如锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、等边三角形、等腰三角形、等腰直角三角形等。

(2) 对于给出的条件是边角关系混合在一起的问题,一般地,应选择用正弦定理,要把它统一为边的关系;要在统一为边的关系,再利用三角形的有关知识,三角形等变形方法和代数等变形方法进行转化,从而得出结论。

3.创新·思维拓展

5. 三角形中有关正弦定理的综合问题

在利用正弦定理解决三角形的综合问题时,要注意以下关系的运用: $A + B + C = \pi \Rightarrow \sin(A+B) = \sin C; \cos(A+B) = -\cos C; \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}; \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

题记

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。对每道题目目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮您养成良好规范的答题习惯。

教材完全解读·苏教高中数学(必修5)

能力·题型设计

【1】在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=8, B=60^\circ, C=75^\circ$ ，则 $b=(\quad)$ 。
A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $\frac{32}{3}$

【2】在 $\triangle ABC$ 中，一定成立的等式是 (\quad) 。
A. $a\sin A = b\sin B$ B. $a\cos A = b\cos B$
C. $a\sin B = b\sin A$ D. $a\cos B = b\cos A$

教材课后习题解答

课本第9页练习
1. B
2. (1) $a=3+\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}$ (2) $a=c=4\sqrt{3}$
3. (1) $B=57.7^\circ, A=97.3^\circ, a=46.9$
(2) $A=90^\circ, C=60^\circ, c=22.52$

课本第10页练习
1. 54.95
2. (1) 直角三角形 (2) 等腰或直角三角形
3. A

最新5年高考名题诠解

1. (2006年山东, 4) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $A=\frac{\pi}{3}, a=\sqrt{3}, b=1$ ，则 $c=(\quad)$ 。
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}-1$ D. $\sqrt{3}$
【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，得 $\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{1}{2}$ ，而
 $A=\frac{\pi}{3}, a>b$ ，则 $A>B$ ， $\therefore B=\frac{\pi}{6}$ ，从而 $C=\frac{\pi}{2}, c^2=a^2+b^2$ ，故 $c=2$ 。
【答案】 B

单元知识梳理与能力整合

1. 解三角形常见题型及解法
在三角形的6个元素中要加三个(除三边外)才能求解，常见类型及其解法见下表：

第1章 知识与能力同步测控题

(测试满分:150分 测试时间:90分钟)

一、选择题(12×5分=60分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A : \sin B = 2 : 3$ ，则边 $b : a$ 等于 (\quad) 。
A. 3 : 2 或 9 : 4 B. 2 : 3 C. 9 : 4 D. 3 : 2

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 B = \sin A \cdot \sin B$ ，则角 C 为 (\quad) 。
A. 60° B. 45° C. 120° D. 30°

答案与提示

第1章 解三角形

1.1 正弦定理

1. C. 由 $B=60^\circ, C=75^\circ$ 可知 $A=45^\circ$ ， $\therefore \frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$ ， $\therefore b=4\sqrt{6}$ 。

2. C. 选项A可变为 $a^2=b^2$ ；选项B可变为 $\sin 2A = \sin 2B$ ；选项C可变为 $a^2b = ab^2$ ；选项D可变为 $\sin A \cos B = \sin B \cos A$ ，即 $\sin(A-B)=0$ ，故只有选项C一定成立。

3. D. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ， $\therefore \frac{5\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin C}$ ， $\therefore \sin C = \frac{1}{2}$ 。

X导航丛书系列最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧抱中考的脉搏

练 《中考总复习课时40练》 难点突破—挑战思维的极限



讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考总复习·1轮集训》 阶段测试—进入实战的演练

专 《高考完全解读·2轮专题》 专项复习—攻克难点的冲刺

讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《三基知识手册》 透析题型—掌握知识的法宝

练 《创新作业本》 夯实基础—奠定能力的基石



伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

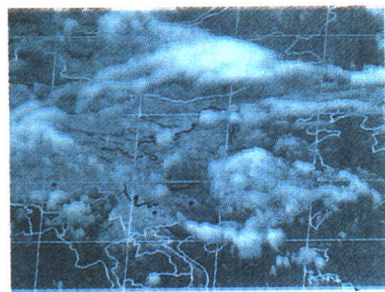
学法指津	1
------	---

第一章 算法初步

1.1 算法与程序框图	3
1.1.1 算法的概念	3
1.1.2 程序框图	8
1.1.3 算法的三种基本逻辑结构和框图表示	12
1.2 基本算法语句	20
1.2.1 赋值、输入和输出语句	20
1.2.2 条件语句	25
1.2.3 循环语句	30
1.3 中国古代数学中的算法案例	34
单元知识梳理与能力整合	40
知识与能力同步测控题	46



第二章 统计



2.1 随机抽样	49
2.1.1 简单随机抽样	49
2.1.2 系统抽样	53
2.1.3 分层抽样	56
2.1.4 数据的收集	62
2.2 用样本估计总体	66
2.2.1 用样本的频率分布估计总体的分布	66
2.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征	75

目

录

2.3 变量的相关性·····	81
2.3.1 变量间的相关关系·····	81
2.3.2 两个变量的线性相关·····	81
单元知识梳理与能力整合·····	89
知识与能力同步测控题·····	93

第三章 概率

3.1 事件与概率·····	96
3.1.1 随机现象·····	96
3.1.2 事件与基本事件空间·····	98
3.1.3 频率与概率·····	102
3.1.4 概率的加法公式·····	106
3.2 古典概型·····	111
3.2.1 古典概型·····	111
3.2.2 概率的一般加法公式(选学)·····	111
3.3 随机数的含义与应用·····	116
3.3.1 几何概型·····	116
3.3.2 随机数的含义与应用·····	120
3.4 概率的应用·····	124
单元知识梳理与能力整合·····	128
知识与能力同步测控题·····	133



期末测试卷·····	135
------------	-----

答案与提示·····	137
------------	-----

知识与方法

阅读索引

第一章 算法初步

1.1 算法与程序框图

1.1.1 算法的概念

- 1. 算法的含义 3
- 2. 算法的特点 3
- 3. 高斯消去法和解二元一次方程组的公式算法 3
- 4. 算法的描述 5
- 5. 设计算法的要求 5
- 6. 算法的应用 6

1.1.2 程序框图

- 1. 程序框图 8
- 2. 如何画程序框图 9
- 3. 根据程序框图判断算法 9

1.1.3 算法的三种基本逻辑结构和框图表示

- 1. 顺序结构 12
- 2. 条件结构 12
- 3. 循环结构 13
- 4. 三种基本逻辑结构的共同特点 14
- 5. 怎样选择逻辑结构和框图表示算法 14
- 6. 三种循环结构在生活中的应用 15

1.2 基本算法语句

1.2.1 赋值、输入和输出语句

- 1. 赋值语句 20
- 2. 输入、输出语句 21
- 3. Scilab 程序语言中常用的符号 21
- 4. 如何使用三种基本的语句 21
- 5. 三种语句的综合运用及编程 22

1.2.2 条件语句

- 1. 条件语句 25
- 2. 条件语句的嵌套 25
- 3. 如何使用条件语句 26
- 4. 条件语句的应用 26

1.2.3 循环语句

- 1. 循环语句 30
- 2. 如何使用循环语句 31

- 3. 循环结构在生活中的应用 31

1.3 中国古代数学中的算法案例

- 1. 求两个正整数最大公约数的算法 34
- 2. 割圆术 35
- 3. 秦九韶算法 36
- 4. 如何使用等值算法和秦九韶算法 37
- 5. 最小公倍数的求法 37

第二章 统计

2.1 随机抽样

2.1.1 简单随机抽样

- 1. 总体、个体、样本、样本容量的概念以及统计的基本思想方法 49
- 2. 简单随机抽样 49
- 3. 常用的简单随机抽样方法 49
- 4. 简单随机抽样的应用 50

2.1.2 系统抽样

- 1. 系统抽样 53
- 2. 系统抽样与简单随机抽样的比较 54
- 3. 系统抽样和简单随机抽样的综合应用 54

2.1.3 分层抽样

- 1. 分层抽样 56
- 2. 三种抽样方法的比较 56
- 3. 三种抽样中数据之间的关系 57
- 4. 对抽样进一步理解 58
- 5. 三种抽样方法在实际中的应用 58

2.1.4 数据的收集

- 1. 数据收集的几种常用方式 62
- 2. 如何得到敏感问题的诚实反应 63
- 3. 数据收集的地位与作用 63

2.2 用样本估计总体

2.2.1 用样本的频率分布估计总体的分布

- 1. 频率分布表和频率分布直方图 66
- 2. 频率分布折线图 67
- 3. 茎叶图 68
- 4. 怎样作频率分布直方图 68

5. 如何计算频数、频率、组距、样本容量	69
6. 频率分布表和频率分布直方图的应用	69
2.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征	
1. 众数、中位数、平均数	75
2. 样本方差和样本标准差	75
3. 标准差和方差的关系及计算	76
4. 样本标准差和频率分布直方图间的关系	77
5. 样本平均数、标准差对总体平均数、标准差的估计	77
2.3 变量的相关性	
2.3.1 变量间的相关关系	
2.3.2 两个变量的线性相关	
1. 变量与变量之间存在着的两种关系	81
2. 两个变量的线性关系	81
3. 回归直线方程	82
4. 回归直线方程的求法	84
5. 散点图的制作方法	84
6. 相关关系的应用	84
7. 回归直线方程的另外两种求法	84

第三章 概率

3.1 事件与概率	
3.1.1 随机现象	
1. 必然现象与随机现象	96
2. 试验及试验的结果	96
3. 如何判断必然现象和随机现象	96
4. 随机现象在实际中的处理策略	97
3.1.2 事件与基本事件空间	
1. 不可能事件、必然事件、随机事件的概念	98
2. 基本事件、基本事件空间	98
3. 利用基本概念判断事件问题	99
4. 几个概念的异同	99
5. 对随机事件的进一步理解	99
3.1.3 频率与概率	
1. 概率的定义及其理解	102

2. 随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的范围	102
3. 随机事件概率的求法	103
4. 利用概率知识解决生活实际中的问题	103
3.1.4 概率的加法公式	
1. 互斥事件的基本概念	106
2. 事件 A 与 B 的并(或和)及互斥事件的概率加法公式	106
3. 互斥事件、对立事件的判定方法	108
4. 互斥事件的概率加法公式的应用	108
5. 利用对立事件概率公式解题	108
6. 较复杂事件概率的求法	108
7. 实验问题——分析能力和计算能力	109
3.2 古典概型	
3.2.1 古典概型	
*3.2.2 概率的一般加法公式(选学)	
1. 基本事件	111
2. 古典概型	111
*3. 概率的一般加法公式(选学)	111
4. 用集合的观点去看待概率	112
5. 古典概型的概率的求法	112
6. 概率问题的图解法	113
3.3 随机数的含义与应用	
3.3.1 几何概型	
1. 几何概型	116
2. 如何求几何概型的概率	116
3. 几何概型应用举例	116
3.3.2 随机数的含义与应用	
1. 随机数	120
2. 随机数的产生方法	120
3. 随机数的应用	120
3.4 概率的应用	
1. 程序与密码	124
2. 社会调查与估计整体	124
3. 如何用概率知识解释生活中的现象	125
4. 概率的创新应用	125

学 法 指 津

——如何学好人教 B 版高中数学(必修 3)

同学们:

数学必修 1 和必修 2 在我们的努力下,已顺利学完.即将进入必修 3 的学习,对于必修 3 又该如何学习呢?这里谈几点,供同学们参考.

1. 加强算法的学习与实践

必修 3 的第一章是算法初步,算法是数学及其应用的重要组成部分,特别是随着信息技术的发展,算法已越来越多地融入人们的现实生活中去,算法思想已成为数学素养的一部分.中学数学中的算法内容可以说是比较基本的算法初步.我们数学中的计算离不开算法,我们必须加强算法的研究与学习.同时算法又是计算机科学的基础,计算机完成的所有任务都必须由算法编制合理的步骤,再转化为计算机语言,因此,我们在学习算法时,可以与计算机等信息技术课程很好地联系在一起.同时通过计算机实现算法,解决数学问题还可以使我们看到算法的可行性、应用性,激发我们学习算法的积极性.但我们也应当注意到使用信息技术的适应性,适当使用信息技术,不能将数学中的算法学习变为计算机中的程序语言的学习或程序设计,不能为了应用本末倒置.

2. 掌握基本的概念和计算方法

第二章和第三章分别是统计和概率.统计是研究随机现象的数学方法.在“课标”中占有较大比重,是“课标”进行教材改革的重要组成部分.在这章的学习中,我们应掌握基本的概念,如简单随机抽样、系统抽样、分层抽样的概念以及它们的联系和区别.同时,本章内容与初中的“统计初步”的联系非常密切,在学习过程中,要注意沟通前后知识的联系,使统计这部分知识成为一个整体,统计是与数据打交道的,处理问题计算量大且比较复杂,对于这一点在线性回归中表现得更加突出.同学们在本章的学习中应重视用科学计算器处理统计数据的技能训练.在第三章的学习中,应注意掌握一些基本的概念,深刻理解概念的含义,如对古典概型的定义的学习,应抓住两点:一是基本事件的有限性,二是事件出现的等可能性.(详见 3.2.1 古典概型)对于易混淆的知识,如概念、公式、随机数的产生方法等,应着眼于弄清它们之间的区别和联系;公式的运用,要注意它们的前提条件,它是哪种概率类型,要准确、熟练地应用各个公式解题.另外,本章内容概念性强,抽象性强,思维方法独特,因此要立足基础知识、基本方法、基本问题的学习,要认真弄清课本每个例题和习题,适当拓展思路是本章学习应遵循的方法.

3. 重视数学思想方法的学习

数学思想和方法是数学的灵魂.必修 3 中涉及的数学方法有:设未知数列方程、待定系数法、坐标法、算法思想以及用集合语言理解相关的数学内容等.如:写出在有 20 个数的数字序列中,搜索出数“18”的一个算法.解决它就要设计算法,这就涉及算法思想的运用.又如人人皆知的“田忌赛马”的故事,其中就蕴含着算法的思想(详见 1.1.1 算法的概念考题 9).这些方法和思想在必修 3 中都得到了很好的应用.我们在学习中应重视这些基本数学思想方法的学习.

第一章 算法初步

课标单元知识

(1) 本章的课标要求包括算法的含义、程序框图、基本算法语句, 通过阅读中国古代数学中的算法案例, 体会中国古代数学对世界数学发展的贡献.

(2) 算法就是解决问题的步骤, 算法也是数学及其应用的重要组成部分, 是计算机科学的基础. 利用计算机解决问题需要算法, 在日常生活中做任何事情也都有算法. 当然我们更关心的是计算机的算法, 计算机可以解决多类信息处理问题, 但人们必须事先用计算机熟悉的语言, 也就是计算机能够理解的语言(即程序设计语言)来详细描述解决问题的步骤, 即首先设计程序. 对稍复杂一些的问题, 直接写出解决该问题的程序是困难的, 因此, 我们要首先研究解决问题的算法, 再把算法转化为程序, 所以算法设计是使用计算机解决具体问题的一个极为重要的环节.

(3) 通过对解决具体问题的过程与步骤的分析(如二元一次方程组的求解等问题), 体会算法的思想, 了解算法的含义. 理解程序框图的三种基本逻辑结构: 顺序结构、条件结构、循环结构. 理解并掌握几种基本的算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句, 进一步体会算法的基本思想.

(4) 本章的重点是体会算法的思想, 了解算法的含义, 通过模仿、操作、探索, 经历通过设计程序框图解决问题的过程. 难点是在具体问题的解决过程中, 理解三种基本逻辑结构, 经历将具体问题的程序框图转化为程序语句的过程, 理解几种基本的算法语句.

课程标准要求参考: 算法初步

(1) 算法的含义、程序框图

① 通过对解决具体问题过程与步骤的分析(如二元一次方程组求解等问题), 体会算法的思想, 了解算法的含义.

② 通过模仿、操作、探索, 经历通过设计程序框图表达解决问题的过程. 在具体问题的解决过程中(如三元一次方程组求解等问题), 理解程序框图的三种基本逻辑结构: 顺序、条件分支、循环.

(2) 基本算法语句

经历将具体问题的程序框图转化为程序语句的过程, 理解几种基本算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句, 进一步体会算法的基本思想.

(3) 通过阅读中国古代数学中的算法案例, 体会中国古代数学对世界数学发展的贡献.

高考命题趋向

本章内容是高中数学的新内容, 在高考中一定会涉及, 从考试大纲的要求来看, 本章在高考中主要从以下几个方面进行考查.

(1) 算法的概念以及算法的思想.

(2) 算法的三种基本逻辑结构: 顺序、条件和循环.

(3) 程序框图的含义及各种程序框图的符号及含义, 根据算法步骤, 画出正确的程序框图.

(4) 几种基本算法的语句, 应用这些语句结合程序框图编写程序.

考试大纲要求: 算法初步

(1) 算法的含义、程序框图

① 了解算法的含义, 了解算法的思想.

② 理解程序框图的三种基本逻辑结构: 顺序、条件分支、循环.

(2) 基本算法语句

理解几种基本算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句的含义.

1.1 算法与程序框图

1.1.1 算法的概念

知识·能力聚焦

1. 算法的含义

算法可以理解为由基本运算及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤,或看成按要求设计好的有限的确切的计算序列,并且这样的步骤或序列能够解决一类问题.

学习算法的概念应注意以下几点:

(1) 在数学中,现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来求解的某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是明确和有效的,而且能够在有限步之内完成;

(2) 通俗点说,算法就是计算机解题的过程.在这个过程中,无论是形成解题思路还是编写程序,都是在实施某种算法,前者是推理实现的算法,后者是操作实现的算法;

(3) 描述算法可以有不同的方式.例如,可以用自然语言和数学语言加以叙述;也可以用算法语言给出精确的说明;或者用框图直观地显示算法的全貌;

(4) 求解某个问题的算法不唯一.

2. 算法的特点

对于某一问题,找到解决它的某种算法是指使用一系列运算规则能在有限步骤内求解某类问题,其中的每条规则必须是明确定义的、可行的、不能含糊其辞、模棱两可,同时应对所有的初始数据(而不仅是指对某些特殊数值)有效.

算法从初始步骤开始,第一个步骤只能有一个确定的后继步骤,从而组成一个步骤序列,这个序列必须是有限的,序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有解答.

我们过去学过的许多数学公式都是算法,加、减、乘、除运算法则以及多项式的运算法则也是算法.

算法可以概括为以下几个特点:

(1) **概括性**: 写出的算法必须能解决这一类问题,并且能重复使用.例如课本例1关于二元一次方程组的求解问题,也适应于其他二元一次方程组的求解.

(2) **逻辑性**: 也就是算法应具有正确性与顺序性.算法从初始步骤开始,分为若干明确的步骤,前一步是后一步的基础,只有执行完前一步才能进行下一步,并且每一步都具有确切的含义,从而组成了一个具有很强逻辑性的序列.

(3) **有限性**: 一个算法必须保证执行有限步之后结束.

(4) **不唯一性**: 求解某个问题的算法不一定是唯一的,对于一个问题可以有不同的算法,如课本P4解二元一次方程组的算法.

(5) **普遍性**: 很多具体的问题,都可以设计合理的算法去解决,例如用心算、手算、计算器计算都要经过有限的、事先设计好的步骤去加以解决,同样一个工作计划、教学计划、生产流程都可称为“算法”.

3. 高斯消去法和解二元一次方程组的公式算法

(1) 高斯消去法

名师诠释

◆ [考题1] 我们学习的算法不同于求解一个具体问题的方法,下列要求中正确的是().

- A. 写出的算法,必须能解决一类问题,并且能重复使用
- B. 求解某个问题的算法是唯一的
- C. 算法过程要一步一步执行,每一步执行的操作,必须确切,不能含混不清,而且经过有限步或无限步后能得出结果
- D. 算法要求按部就班地做,每一步可以有不同的结果

[解析] 由算法的概念可知,我们写出的算法能解决一类问题,经过有限步后能得出结果,且每一步有唯一的结论,但求解某个问题的算法并不是唯一的. 故选 A.

[答案] A

◆ [考题2] 算法的有穷性是指().

- A. 算法的最后包含输出
- B. 算法中每个操作步骤都是可执行的
- C. 算法的步骤必须有限
- D. 以上说法都不正确

[解析] 算法必须可有效执行,步骤有限.

[答案] C

◆ [考题3] 写出解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 14, \\ x + y = -2 \end{cases}$ 的两种算法.

[解析]
$$\begin{cases} 3x - 2y = 14, & \text{①} \\ x + y = -2. & \text{②} \end{cases}$$

算法1:

$$S1 \quad \text{①} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \text{②}, \text{得到} \left(\frac{2}{3} + 1\right)y = -2 - \frac{14}{3},$$

$$\text{即方程组可化为} \begin{cases} 3x - 2y = 14, & \text{①} \\ \frac{5}{3}y = -\frac{20}{3}; & \text{③} \end{cases}$$

$$S2 \quad \text{解方程③可得} y = -4; \quad \text{④}$$

$$S3 \quad \text{将④代入②,可得} x - 4 = -2, x = 2;$$

$$S4 \quad \text{输出} 2, -4.$$

算法2:

$$S1 \quad \text{计算} D = 3 \times 1 - 1 \times (-2) = 5;$$

$$S2 \quad x = \frac{14 \times 1 - (-2) \times (-2)}{5},$$

$$y = \frac{(-2) \times 3 - 14 \times 1}{5};$$

$$S3 \quad \text{输出} 2, -4.$$

[点评] 本题的算法1是由加减消元法求解的,这个算法也适合一般的二元一次方程组的解法. 算法2则是直接代入公式法求解.

下面写出求方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \text{①} \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \text{②} \end{cases}$ ($A_1B_2 -$

$A_2B_1 \neq 0$) 的解的算法:

例如:解方程组 $\begin{cases} x+y=17, \\ 2x+4y=48, \end{cases}$

$$\text{记(I)} \begin{cases} x+y=17, \\ 2x+4y=48. \end{cases}$$

将方程组(I)中的第一个方程的两边同乘以-2加到第二个方程中去,得到:

$$\text{(II)} \begin{cases} x+y=17, \\ (4-2)y=48-17 \times 2, \end{cases}$$

解方程组(II)中的第二个方程,得 $y = \frac{48-17 \times 2}{4-2} = 7$,

利用方程组(I)中的第一个方程来消去第二个方程中的未知数 x ,从而使该方程组(I)化为与其等价的方程组(II),进而通过(II)的第二个方程确定 y ,再通过第一个方程确定 x ,这种求解方程组的方法称为高斯消去法.

(2)用高斯消去法解一般的二元一次方程组的算法用高斯消去法解一般的二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & \text{①} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{②} \end{cases} \text{的算法描述如下:}$$

因为是二元一次方程组,所以方程组中 a_{11}, a_{21} 不能同时为0.

第一步:假定 $a_{11} \neq 0$ (如果 $a_{11} = 0$,可将第一个方程与第二个方程互换), $\text{①} \times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) + \text{②}$,得到:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}},$$

即方程组可化为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & \text{③} \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}. & \text{④} \end{cases}$$

第二步:如果 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$,解方程④得到

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad \text{⑤}$$

第三步:将⑤代入③,整理得到:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad \text{⑥}$$

第四步:输出结果 x_1, x_2 .

如果 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$,则从④可以看出,方程组无解或有无穷多组解.

以后,我们在描述算法时,用英文 Step1, Step2, ..., 来表示第一步,第二步,……,也可以简写为: S1, S2, ….

(3)解二元一次方程组的公式算法

算法步骤如下:

S1 计算 $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$;

S2 如果 $D = 0$,则原方程组无解或者有无穷多组解;否则($D \neq 0$),

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{D};$$

S3 输出计算的结果 x_1, x_2 或无法求解信息.

第一步, $\text{②} \times A_1 - \text{①} \times A_2$,得

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + A_1C_2 - A_2C_1 = 0; \quad \text{③}$$

第二步,解③,得 $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$;

第三步,将 $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$ 代入①,

$$\text{得 } x = \frac{-B_2C_1 + B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

◆ [考题4] 用公式算法求二元一次方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x - y = 4 \end{cases}$ 的解.

[解析] 根据二元一次方程组的公式算法可得:

S1 计算 $D = 3 \times (-1) - 1 \times (-2) = -1$;

S2 $D = -1 \neq 0$, $x = \frac{6 \times (-1) - 4 \times (-2)}{-1}$, $y =$

$$\frac{4 \times 3 - 6 \times 1}{-1};$$

S3 输出 $-2, -6$.

◆ [考题5] 用高斯消去法解下列二元一次方程组:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x - 7y = 8. \end{cases}$$

[解析] S1 计算 $D = 3 \times (-7) - 2 \times 4 = -29$.

S2 $D = -29 \neq 0$,

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D} = \frac{7 \times (-7) - 8 \times 4}{-29} = \frac{-81}{-29} = \frac{81}{29},$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{D} = \frac{8 \times 3 - 7 \times 2}{-29} = -\frac{10}{29};$$

S3 输出计算的结果 x_1, x_2 .

[点评] 用高斯消去法解二元一次方程组时,关键是弄清其算法步骤.

◆ [考题6] 试描述解下面方程组的算法.

$$\begin{cases} x + y + z = 12, & \text{①} \\ 3x - 3y - z = 16, & \text{②} \\ x - y - z = -2. & \text{③} \end{cases}$$

[解析] S1 ①+②得 $2x - y = 14$; ④

S2 ②-③得 $x - y = 9$; ⑤

S3 ④-⑤得 $x = 5$;

S4 将 $x = 5$ 代入⑤得 $y = -4$;

S5 将 x, y 代入①得 $z = 11$;

S6 输出 x, y, z 的值.

◆ [考题7] (1)写出一个求解任意二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的最值的算法.

(2)设计一个算法,对任意3个数 a, b, c , 求出其中的最小数.

[解析] (1)由二次函数的性质知,当 $a > 0$ 时,函数有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$; 当 $a < 0$ 时,函数有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

2 方法·技巧平台

4. 算法的描述

描述算法可以有不同的方式,常用的有自然语言、框图、程序设计语言、伪代码等.

(1) 自然语言

自然语言就是人们日常使用的语言,可以是汉语、英语或数学语言等,用自然语言描述算法的优点是通俗易懂,当算法中的操作步骤都是顺序执行时比较容易理解.缺点是如果算法中包含判断和转向,并且操作步骤较多时,就不那么直观清晰了.

(2) 框图(流程图)

所谓框图,就是指用规定的图形符号来描述算法(这在下一节中将学习).用框图描述算法,具有直观、结构清晰、条理分明、通俗易懂、便于检查修改及交流等优点.

(3) 程序设计语言

算法最终可以通过程序的形式编写出来,并在计算机上执行.程序设计语言可分为低级语言和高级语言.低级语言包括机器语言和汇编语言.

机器语言是计算机唯一能够识别的语言.机器语言的程序是用一串二进制代码组成的指令序列.这种程序难写、难读、难理解,且通用性差,不同类型的计算机有不同的机器语言.

汇编语言是一种符号语言,它将难以记忆和辨认的机器语言操作码用有意义的英文单词作为“助记符”来代替0、1进行编程.用汇编语言编制的程序必须经过编译转换为机器语言,计算机才能执行.

机器语言和汇编语言均是面向机器的,用它们编制程序都受到限制.为了从根本上解决问题,1954年出现了Fortran语言及其程序设计语言,这些语言不依赖于所使用的机器,表达方式接近于人类的自然语言,容易被人掌握和书写.我们称这些语言为高级语言或算法语言.常见的高级语言有BASIC、Pascal、C语言等.每一种高级语言都有相应的语言处理系统来完成翻译的过程,即将高级语言编制的程序(源程序)翻译成机器语言程序(目标程序).翻译的方式有解释方式和编译方式两种.

5. 设计算法的要求

(1) 写出的算法,必须能解决一类问题(如判断一个任意整数 n 是否为质数,求任意一个函数式的近似解),并且能够重复使用;

(2) 要使算法尽量简单,步骤尽量少,算法从初始步骤开始,每一个步骤只能有一个后继步骤,从而组成一个步骤序列,序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有解答.

(3) 算法过程要能一步一步执行,每一步执行的操作,必须确切,不能含糊不清,而且在有限步后能得出结果.

[注意] 一般说来,求解某一个问题的算法不一定只有唯一的一个,可以有不同的算法,当然这些算法有繁简之分,优劣之分,我们应本着简单方便的原则去设计算法.

算法步骤用自然语言叙述如下:

$$S1 \quad \text{计算 } m = \frac{4ac - b^2}{4a};$$

S2 若 $a > 0$, 则函数最小值是 m ; 否则, 执行 S3;

S3 函数最大值是 m .

(2) 算法步骤如下:

$$S1 \quad \min = a;$$

S2 如果 $b < \min$, 则 $\min = b$;

S3 如果 $c < \min$, 则 $\min = c$;

S4 \min 就是 a, b, c 中的最小数.

[点评] ①第(1)题用的是自然语言,第(2)题用的是数学语言,至于用哪种语言结合具体的问题而定.

②任给有限个数,求其中的最大数、最小数的算法,在数不是很多的情况下,就可以采用这种逐一比较的办法.



◆ [考题 8] 一位商人有 9 枚银元,其中有一枚略轻的是假银元,你能用天平(不用砝码)将假银元找出来吗?设计一个算法,解决这一问题.

[解析] 算法 1: 算法步骤如下:

S1 任取 2 枚银元分别放在天平的两边,如果天平左右不平衡,则轻的一边就是假银元;如果天平平衡,则执行 S2;

S2 取下右边的银元,放在一边,然后把剩余的 7 枚银元依次放在右边进行称量,直到天平不平衡,偏轻的那一枚就是假银元.

算法 2: 算法步骤如下:

S1 把银元分成 3 组,每组 3 枚;

S2 先将两组分别放在天平的两边,如果天平不平衡,那么假银元就在偏轻的那一组;如果天平左右平衡,则假银元就在未称的第 3 组里;

S3 取出含假银元的那一组,从中任取两枚银元放在天平的两边,如果左右不平衡,则轻的那一边就是假银元;如果天平平衡,则未称的那一枚就是假银元.

[点评] 上述算法中算法 1 最少要称量 1 次,最多需称量 7 次,而算法 2 只需 2 次称量,可见算法 2 是对算法 1 的改进,比算法 1 优越.

◆ [考题 9] 田忌赛马的故事人人皆知:齐国大将田忌与齐威王约定赛马,他们把各自的马分成上、中、下三等.比赛的时候,上等马对上等马,中等马对中等马,下等马对下等马.由于齐威王每个等级的马都比田忌的强,三场比赛下来,田忌都失败了.田忌垂头丧气正准备离开马场时,他的好朋友孙臆招呼他过来,拍着他的肩膀说:“从刚才的情形看,齐威王的马比你的马快不了多少呀……,你再同他赛一次,我有办法让你取胜.”请你设计出孙臆用同样的马使田忌获胜的算法.

3 创新·思维拓展

6. 算法的应用

(1) 数值性问题算法的描述

对于数值计算问题,如解方程、求方程组的解、解不等式、不等式组、套用公式判断性的问题、累和累乘等这一类算法的描述,一般可以通过数学模型借助数学计算方法,分解成清晰的步骤,使之条理化就可以了.

(2) 非数值性问题算法的描述

对于非数值性计算问题(例如:排序查找、变量的替换、文字处理等)需要建立过程模型解决问题.

[解析] 在齐威王的马比田忌的马快不了多少的情况下,孙臆采用的算法是:

第一步,让田忌用下等马对齐威王的上等马,第一场输了;
第二步,让田忌拿上等马对齐威王的中等马,胜了第二场;
第三步,让田忌拿中等马对齐威王的下等马,又胜了一场.

[点评] 孙臆帮助田忌反败为胜的根本原因是什么呢?从严格的意义上讲,孙臆反败为胜的关键不是因为改变了方法而是因为采取了正确的算法.因为算法是更为具体的操作性很强的方式、手段,就赛马来说,就是如何“策马扬鞭”的具体骑术,算法是更高层次上的总体上的程序性、步骤性的东西,是怎样从整体出发安排好赛马的对阵顺序的根本性问题.

4 能力·题型设计

[1A] 对于一般的二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ 在写此方程组的算法时,需要注意的是().

- A. $a_1 \neq 0$ B. $a_2 \neq 0$
C. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ D. $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$

[2A] 下面四种叙述能称为算法的是().

- A. 在家里一般是妈妈做饭
B. 做米饭需要刷锅、淘米、添水、加热这些步骤
C. 在野外做饭叫野炊
D. 做饭必须有米

[3B] 指出下列哪个不是算法?().

- A. 解方程 $2x - 6 = 0$ 的过程是移项和系数化为 1
B. 从济南到温哥华要先乘火车到北京,再转乘飞机
C. 解方程 $2x^2 + x - 1 = 0$
D. 利用公式 $S = \pi r^2$ 计算半径为 3 的圆的面积

[4A] 在解二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 (I) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 (II) \end{cases}$ 时,利用方程组(I)中的第一个方程来消去第二个

方程中的未知数 x ,从而使该方程组(I)化为与其等价的方程组(II),进而通过(II)的第二个方程确定 y ,再通过第一个方程确定 x ,这种求解方程组的方法称为_____.

[5A] 用高斯消去法解下列二元一次方程组.

$$(1) \begin{cases} 5x - 4y = -1, \\ 6x - y = 6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 8x + y = 9, \\ 4x + 12y = 1; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 3m + 2n = 5, \\ 7m - 8n = 9. \end{cases}$$

[6B] (1) 试写出解方程 $2x - 9 = 0$ 的两个算法;

(2) 试写出我们进行期末考试时监考老师监考的算法.

[7B] 电视娱乐节目中,有一种有趣的“猜数”游戏:竞猜者如在规定的时间内猜出某种商品的价格(或重量),就可获得该件商品.现有一商品,价格在 $0 \sim 8000$ 之间,采取怎样的策略才能在较短的时间内说出正确的答案呢?试设计一种算法.

[8C] 某人带着一只狼和一只羊及一捆青菜过河,只有一条船,船仅可载重此人和狼、羊及青菜中的一种,没有人在的时候,狼会吃羊,羊会吃青菜,设计安全过河的算法.

点击考点

测试要点 3

2007 年山东省青岛市部分重点中学联考

测试要点 1, 2

2007 年山东省济南市部分中学测试题

测试要点 1

测试要点 3

测试要点 3

测试要点 5

2007 年辽宁省沈阳市部分重点中学测试题

测试要点 5

测试要点 6