CHUZHONG PINGMIAN JIHE

ZHENG (JIE)TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

# 初中平面几何

## 证(解)题思路的培养与训练

# 四边形部分

SIBIANXING BUFEN

迎中考迎奥赛的金钥匙

规律发现总结与应用

举一反三触类而旁通

吕全善/编著

学会和掌握一套证解题方法
胜过做万题

大连出版社
DALIAN PUBLISHING HOUSE

责任编辑：王天华　刘晓媛
封面设计：张　金

ZHENG(JIE)TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

ISBN 978-7-80684-519-6
9 787806 845196 >

定价：15.00元

初中平面几何
证(解)题思路的培养与训练

# 四边形部分

吕全善　编著

大连出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中平面几何证(解)题思路的培养与训练. 四边形部分/吕全善编著. —大连:大连出版社,2007.5
ISBN 978-7-80684-519-6

Ⅰ.初… Ⅱ.吕… Ⅲ.几何课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048861 号

责任编辑:王天华 刘晓媛
封面设计:张 金
版式设计:金东秀
责任校对:王恒田

出版发行者:大连出版社
地址:大连市西岗区长白街 10 号
邮编:116011
电话:(0411)83627430/83620941
传真:(0411)83610391
网址:http://www.dl-press.com
电子信箱:cbs@dl.gov.cn
印 刷 者:大连天正华延彩色印刷有限公司
经 销 者:各地新华书店

幅面尺寸:140mm×203mm
印 张:8.25
字 数:204 千字
印 数:1-5000

出版时间:2007 年 7 月第 1 版
印刷时间:2007 年 7 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-80684-519-6
定 价:15.00 元

如有印装质量问题,请与我社营销部联系
购书热线电话:(0411)83627430/83620941

# 前言

为了帮助广大中学生学好平面几何和教师进一步教好几何，以适应培养建设人材的需要，作者根据多年苦心钻研的教研成果与教学经验编写了本书。对本书的主要内容，作者曾先后在沈阳、抚顺、本溪、铁岭、盘锦、大连、北京等市做过多次学术讲演，特别是曾受天津市教育局的邀请为该市的几何骨干教师举办了为期近一周的培训班。作者在上述各地讲学时，均受到了广大中学教师和学生的热烈欢迎和高度评价。

本书基于内容较多和为学生学习方便起见，分三册出版：《三角形部分》，《图形的全等变换》，《四边形部分》。

本书的重点是各章的例题思路探索与规律总结。在探索证（解）题途径方面创立了分析法图解、综合法图解和分析综合法图解，使学生易于接受和教师便于搞启发式教学。在应用三种图解的同时，发现和总结了很多规律，从而创立了一系列的探索证（解）题的规则。如，“等代转化规则”、“只具部分全等条件须引辅助线构造全等三角形规则”、“条件集中法”、“相似三角形成形规则”以及“分和”、“分差”、“截长”、“补短”等方法，使学者有章可循。

应用三种图解并根据所创立的一系列规则去探索证（解）题途径（被誉为吕氏图解教学法），证（解）题就自然水到渠成，迎刃而解。因而几何题中辅助线的引出，就再也不是某些“天才”头脑中固有的或从天上掉下来的不可思议的东西了。所以作者编著本书的目的，是送给读者一支猎枪，而不只是一堆猎物。为了帮助读者进一步掌握规律和牢记规律，以提高证（解）题能力，还在大部分范例后面做了规律总结。

本书还收集了近几年来的相关中考题,有的作为例题加以分解剖析,有的作为习题,还有的作为中考题浏览编进相应章节中。

在本书各部分内容的最后部分都相应选取了历届各省市乃至全国以及世界各国和国际数学奥林匹克竞赛题及其思路分解与解答。如果根据本书提供的解题规则与方法去解这些题,那么这些"世界级"的难题就再也不那么神奇奥妙和高不可攀了。

通过教学实践充分证明,本书对培养学生的分析能力、逻辑思维能力,证(解)题能力和归纳梳理以及探究精神,具有非常重要的作用。如果学生基本掌握了本书提供的证(解)题思路的方法,那么可以说对平面几何的学习,将会产生一个极大的飞跃。更重要的是对以后各科的学习将会产生深远的影响。

本书既适于在校学生配合教材自学提高,以迎接中考与数学竞赛之用,又适于做教师的教学参考书。为了便于自学,书中附有习题解答或提示。无论解答或提示都着重于解题思路的探索与培养。

编　者

2007 年 4 月

# 本册说明

在探索证(解)题途径方面,在三角形部分里我们已经系统地介绍了"分析法、综合法以及分析—综合法及其图解"的应用,同时我们又介绍和列举了如何应用"等量代换转化规则"、"只具部分全等条件需构造全等形规则"与"取近弃远规则"等与分析法、综合法以及分析—综合法及其图解联合运用来探索证(解)题思路的大量实例。在大部分实例的后面我们又做了总结,在四边形中我们将继续巩固和加深这方面的工作,因为只有这样才不仅仅是单纯学会知识,而更重要的是学会了数学的思想方法,真正提高了证(解)题的能力,也加强了探究的精神。

四边形同三角形一样,也是人们最常见的和应用较广泛的图形。本单元内容是平行线和三角形知识的深化和发展,学好本单元知识可以使同学们的逻辑思维能力与推理论证能力以及探究能力得到进一步的发展与提高。通过对四边形的学习与研究,知道把四边形通过引辅助线(分割或填补)转化为三角形,把梯形通过引辅助线转化为平行四边形和三角形来处理,从而领会到解决和处理复杂问题的普遍规则:就是把复杂问题转化为简单的问题,将陌生的问题转化为熟习的问题,把未知的问题转化为已知的问题来解决。

本单元主要内容:一、四边形;二、平行四边形;三、梯形;四、面积问题;五、反证法与同一法。

本单元的重点是:平行四边形的性质与判定;等腰梯形的性质与判定;平行线等分线段定理及推论;三角形中位线与梯形中位线

定理。

本单元难点与关键是如何树立好转化的思想,并应用它灵活地处理好一些较复杂的命题的解题思路和处理好各种特殊平行四边形之间的区别与联系。

# 目 录

# 第一章　关于探索证(解)题思路方法方面所建立的一些规则的回顾

## 一、分析法、综合法以及分析—综合法及其图解的应用

1. 分析法：从命题的结论出发，找出结论成立所需要的条件，如果所找到的条件不是题中所给的已知条件，再把所找到的条件作为结论，再找新结论成立所需要的条件，这样继续下去，一直推到题中所给的已知条件为止.

简单地说：分析法就是从求证推到已知的逻辑思维方法. 证明时的顺序与分析法的推理顺序是相反的.

2. 综合法：从命题的已知条件出发，根据已学过的知识(定义、公理、定理等)进行逻辑推理与判断得出新结论，如果新结论不是题中要证的结论，再用已知条件与新结论进行逻辑推理与判断，再得新结论，这样继续下去，一直到得出的新结论就是所要证的结论为止.

简单地说：综合法就是从已知条件推到求证的逻辑思维方法. 证明时的顺序与综合法的推理顺序是相同的.

3. 分析—综合法：就是分析与综合同时并用的思维方法，也可以说是“两头凑”的思维方法.

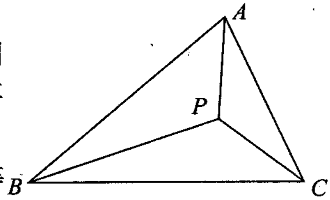


图 1－1

需要说明的是：在使用分析法图解时要加“？”，因为结论的成立是尚要证明的，因此它的成立还是个问号. 当最后推到已知条件或公理、定理等时，因为它是成立的，所以“？”才可以终止. 而使用综合法图解时，就不加

“?”了,因为它是从已知条件出发,推出的结论都是成立的.

【例1-1】如图1-1,$P$为$\triangle ABC$内任一点,求证:$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

现将用分析—综合法探索证题思路的过程用图解表示如下:

分析————————综合法

$$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC) \qquad PA+PB>AB \quad PB+PC>BC \quad PC+PA>AC$$

$$\Big\uparrow ? \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$2PA+2PB+2PC\overset{?}{>}AB+BC+AC \qquad 2PA+2PB+2PC>AB+BC+AC$$

请根据以上分析—综合法图解,先从综合部分开始,自上往下写,然后再从分析部分自下往上写,并适当加注理由,证明便可完成.

## 二、等量代换转化规则

在探索证(解)题途径的过程中,有些元素(如线段、角或以后的线段积、比等)之间关系,有时彼此好像是孤立的或分散的,使审题处于停滞不前的状态,但是在题中一旦找到了一个量去替换另一个与它相等的量时,则使题中孤立的或分散的元素之间的关系就彼此联系起来了,从而使探索证(解)题途径的工作打开了一个新的局面,这样证(解)题的途径便很容易地找到了. 这种在审题中找一个量去替换另一个与它相等的量而达到证(解)题目的方法,可称为“等量代换转化规则”,简称“等代规则”.

“等代规则”是具有普遍性的规则,它是探索较复杂命题的证(解)题途径的一个非常重要的不可缺少的有力工具和手段,希望同学们要特别注意掌握和自觉应用. 为了显示“等代规则”的作用,今后在分析综合法图解中,凡应用等代转化之处,均划以波浪线,以引起注意和重视.

【例 1－2】 如图 1－2,$AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线．求证:$AD+BD>\frac{1}{2}(AB+AC)$.

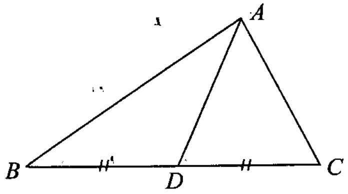


图 1－2

现将用分析法并注意运用"等代转化规则"探索本题的证题途径的过程用图解表示如下:

$AD+BD>\frac{1}{2}(AB+AC)$

?↓

$2AD+2BD>AB+AC$　　$\underline{BD=DC}$　(注意此处的"等代转化"的作用)

?↘　↙

$2AD+BD+DC>AB+AC$

↙　?　↘

$AD+BD>AB$　　　$AD+DC>AC$

请根据此分析法图解,自下而上并适当加注理由写出证明.

【例 1－3】 如图1－3,已知五角星 $ABCDE$. 求证:$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$

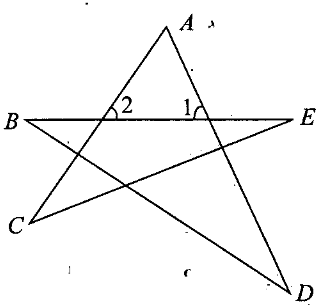


图 1－3

**思路一**:现将用分析法并注意运用"等代转化规则"探索本题的证题途径的过程用图解表示如下:

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E \overset{?}{=} 180^\circ$　$180^\circ = \angle A+\angle 1+\angle 2$（注意此处的“等代转化”作用）

$\angle B+\angle C+\angle D+\angle E \overset{?}{=} \angle 1+\angle 2$

$\angle B+\angle D=\angle 1$　　$\angle C+\angle E=\angle 2$

请根据此分析法图解自下而上的并适当加注理由写出证明．

**思路二**：现将用综合法并注意运用“等代转化规则”探索本题的证题途径的过程用图解表示如下：

$\angle A+\angle 1+\angle 2=180^\circ$　　$\angle 1=\angle B+\angle D$　　$\angle 2=\angle C+\angle E$

$\angle A+\angle B+\angle D+\angle C+\angle E=180^\circ$

请根据此综合法图解，自上而下的并适当加注理由写出证明．

【例 1－4】 如图 1－4，$\triangle ABC$ 的三条角平分线 $AD$、$BE$、$CF$ 相交于 $I$，$IH\perp BC$ 于 $H$．求证：$\angle BID=\angle CIH$．

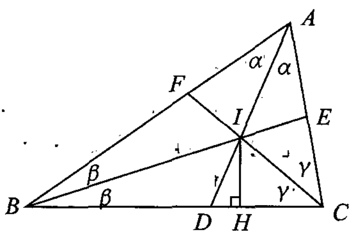


图 1－4

设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 分别为 $2\alpha$、$2\beta$、$2\gamma$（对证（解）角平分线一些题目，这种二倍角的设法往往可简化证明或计算过程）．

现将用“分析—综合法”并注意运用“等代转化规则”探索证题途径的过程用图解表示如下：

分析————————————综合法

$\angle BID \overset{?}{=} \angle CIH$　$\angle BID=\alpha+\beta$　$\angle CIH=90^\circ-\gamma$　$90^\circ=\alpha+\beta+\gamma$

$\angle CIH \overset{?}{=} \alpha+\beta$　　　　　　$\angle CIH=\alpha+\beta$

请根据以上图解写出证明．

## 三、只具部分全等条件须引辅助线构造全等三角形规则

为直接证明某些命题的结论的成立或搞“等代转化”的需要，如果题中存在只具部分全等条件(包括求证结论及其转化)，可据此引辅助线构造全等三角形以增加更多的新的有用条件，而这些新条件往往是不可缺少的关键性的和转折性的条件，从而为进一步证(解)题开创了一个崭新的局面，这就是所谓的“只具部分全等条件须造全等形规则”.

这一规则与“等代转化规则”是相辅相成的，它同样是解决较复杂命题的证(解)途径的一个非常重要的不可缺少的有力工具和手段.

那么在证(解)题中究竟有哪些是属于“只具部分全等条件，可引辅助线构造全等三角形呢?”现将常用的几个列举如下：

(1)有角平分线，利用角平分线作公共边，在角的两边上截取对应相等线段构造全等三角形；

(2)在三角形中有中线时，常常如倍中线(称为倍长中线法)，并利用对顶角构造全等三角形；

(3)有对顶角及其一边，可截另一边构造全等三角形；

(4)有垂线(或高)常构造全等直角三角形；

(5)有以线段中点为端点的线段时，常延长线段中点为端点的线段，并借助对顶角构造全等三角形.

## 四、取近弃远规则(也叫条件集中法)

在等代转化(或构造全等三角形)过程中，若同时遇有数个量需要选择代换时，为了将分散的条件集中以构成相依关系，所以要选留那些与已知条件或求证结论相近的条件，而舍弃那些相远的条件. 这也是从诸多证(解)题中总结出来的普遍的规律. 希望掌握与自觉地加以运用.