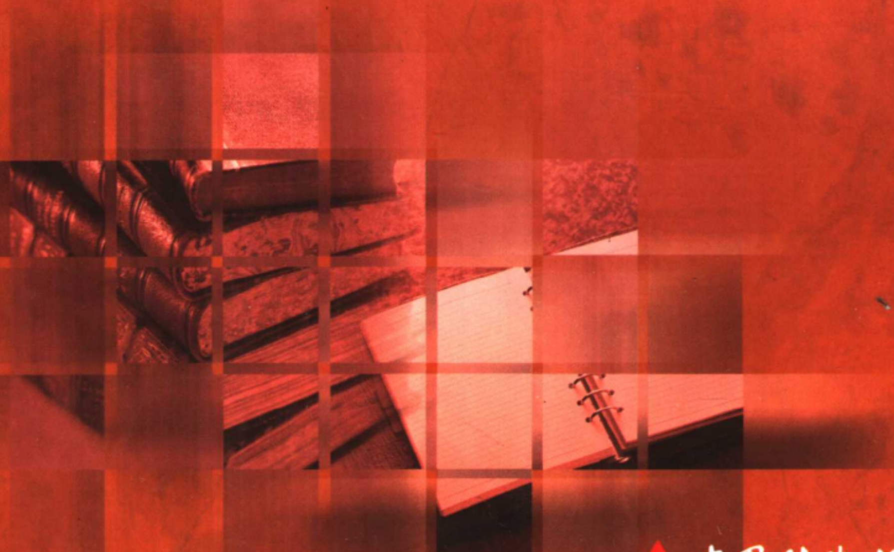
普通高等教育“十五”国家级规划教材
教育部高职高专规划教材

高等数学

微积分

主编　刘学生

GAODENGSHUXUE–WEIJIFEN



中国财政经济出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

教育部高职高专规划教材

高　等　数　学

微　积　分

刘学生　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·微积分/刘学生主编.—北京:中国财政经济出版社,2005.6
普通高等教育"十五"国家级规划教材.教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5005-8211-0
Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教材
②微积分-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 047992 号

中国财政经济出版社出版
URL:http://www.cfeph.cn
E-mail:cfeph @ cfeph.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码:100036
发行电话:88190616 88190655(传真)
北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销
787×960 毫米 16 开 19.5 印张 316 000 字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月北京第 1 次印刷
定价:23.00 元
ISBN 7-5005-8211-0/O·0037
(图书出现印装问题,本社负责调换)

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作的重要组成部分．改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材．但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要．为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”．

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种，用 5 年左右时间完成．出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和专业主干课程．计划先用 2～3 年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用 2～3 年的时间，

在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适合高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

前言

《高等数学·微积分》是针对经济类高职高专学生编写的一本高等数学教材．它依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合经济类院校的实际，编写而成．

本书特色表现在：（1）突出实用性．本书结合经济类专业实际，列举了大量的经济数学模型和数学在经济方面的应用．（2）淡化理论．本书在理论上以学生容易理解和不影响教学体系为尺度，多以几何直观启发学生，许多定理略去了繁琐的推演．（3）注重数学概念与实际问题的联系，重要的概念都给出实际问题的背景和应用时的说明．（4）以学生和教学为主．为便于自学，各章给出小结，方便学生复习和总结．（5）考虑各专业和学习需求的不同，选编了一些内容，并在相关章节前标有＊号，供读者选用．

全书包括一元函数微积分和多元函数微积分的部分内容，还有级数和微分方程．

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校经济类各专业高等数学教材，也适用于各类成人高等学历教育及相关专业的高等数学教学用书．

参加本书编写的有中央财经大学数学部黄惠青、四川师范大学数学学院刘祥高和大连大学信息工程学院刘学生. 本书在编写过程中也得到了三院校领导的大力支持.

编　者

2005 年 5 月

目录

第一章

函数与极限

内容提要

高等数学与初等数学的一个显著的区别，便是它们研究对象的不同．初等数学研究的对象是常量，而高等数学研究的主题是变量．通过变量间的依赖关系研究变量，这就产生了高等数学的研究对象——函数．

高等数学研究函数的最基本方法是极限方法．

本章主要讲述了高等数学的研究对象——函数和基本研究方法——极限这两个基本概念，并介绍了初等函数的内容．在此基础上用极限方法研究函数，从而引入了函数连续的概念和相关内容．

第一节

函数及其性质

一、函数的定义

在我们的日常生活中，变化无处不在，反映它们的量也在不断变化，并且在变化过程中有多个变量是互相联系着的，我们就从它们的互相联系中着手去研究变量．

例 1 在汽车销售过程中，如果某种汽车在一定时期的价格不变，我们要研究销售收入，那么在这个过程中，有销售收入 R 和销售量 x 这两个变

量，它们之间的关系由公式给出

$$R = px$$

其中 p 表示价格，$p>0$ 且 p 是常数.

这里我们注意到，为了掌握销售收入变量 R，只要我们通过已知关系 $R=px$,对给定的销售量 $x\in V$，V 为一个确定的数集，就得到收入 R. 也就是说，当 x 在 V 内任意取定一个数值时，由上式 $R=px$ 就可以确定收入 R 的相应数值. 函数的概念正是在这一背景下产生的.

例 2　考虑圆的面积问题，面积变量 A 与半径变量 r 之间的关系可由大家熟知的公式给出

$$A = \pi r^2$$

当半径 r 在区间（0，$+\infty$）内任意取定一个数值时，由上式就可以确定面积 A 的相应数值.

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 以某种给定的方式总有惟一的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

其中,变量 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量).数集 D 称为函数的定义域.

设有函数　　$y=f(x)\qquad x\in D$

若对于确定的 $x_0\in D$,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在 x_0 点处的函数值,记作 $y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$.

函数值的集合称为函数的值域,记作 W.即

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

我们可以从函数定义中总结出它的三个要素:(1)对应法则;(2)自变量的取值范围,即函数的定义域 D;(3)函数的值域.

例如,给定 $y=f(x)=2x^2-x+2\quad x\in(-\infty,+\infty)$

这里 f 表示确定的对应法则为:

$$f(\quad)=2(\quad)^2-(\quad)+2$$

对应于 h_0+1 的函数值为:

$$f(h_0+1)=2(h_0+1)^2-(h_0+1)+2=2h_0^2+3h_0+3$$

而函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数的值域为$\left(\frac{15}{8},+\infty\right)$.

关于函数定义域的确定，在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义来确定的. 在数学研究中，当不考虑实际问题时，它的定义域可由函数表达式本身自变量允许的取值范围来确定，也称自然定义域.

例 3　求函数 $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解：　$\because\ 4-x^2\neq 0\quad \therefore\ x\neq \pm 2.$

又 $\because\ x+2\geqslant 0\quad \therefore\ x\geqslant -2.$

综合得

$$D=(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

例 4　研究 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同函数.

$y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，即它们的定义域相同，但是其对应法则不完全相同. 函数 $y=x$，在 $x<0$ 时，$y<0$，而 $y=\sqrt{x^2}$，当 $x<0$ 时，$y>0$，因此它们是两个不同的函数.

例 5　研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

$y=x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数. 因为 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域不同，所以它们是不同的函数.

上例中，虽然 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的对应关系相同，但它们仍是不相同的函数.

二、函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示，即表格法、图像法、公式法.

例 6　某汽车销售公司某年各月份汽车销售量表（如表 1－1）：

表 1－1　　　　单位（辆）

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销量 x	810	804	450	490	900	200	310	610	780	980	320	670

表 1－1 确切表达了销售量 x 是时间 t（月份）的函数. 给定某年的一个月份，就对应一个销售量 x. t 的取值范围为某年的各个月份，这就是用表格表示函数的例子. 再如，中学时使用的"三角函数表"及"对数表"等都是用表格表示函数的例子.

例 7 图1-1是金融市场某日 8~12时,股票指数随时间变化的图像.

图 1-1 表达了股票指数和时间的关系.对于给定的时间范围$t\in[8,12]$,即定义域为$[8,12]$,任取一个时刻 $t\in[8,12]$,就有一个股票指数与之对应.也就是在所示图中,任给一个横坐标 t 时刻,就有一个纵坐标 y 的股票指数与之对应.所以图像也可以表示函数.再如,物理及化学实验中的实验曲线也是用图像表示函数的例子.

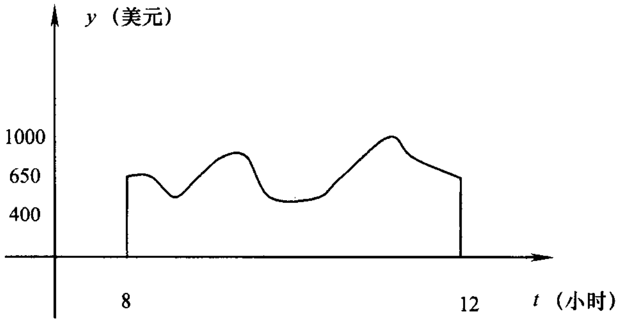


图 1-1

前面例 1 和例 2 均为用公式表示函数的例子:

$$R=px,x\in D;A=\pi r^2,r\in(0,+\infty).$$

公式、表格和图像三种表示法各有特点,在使用时可以综合利用.下面我们举几个公式法表示函数的特殊例子.

例 8 某城市每月水费按下式计算收取,每月用水不超过 4.5 吨时,水费按 0.64 元/吨计算,超过部分每吨以 5 倍价格计算收费.试建立每月水费与用水量之间的函数模型,并计算用水量为 3.5 吨、5.5 吨、9 吨时的水费.

解:设 y 是水费,x 表示用水量.

$$y=f(x)=\begin{cases}0.64x & 0\leqslant x\leqslant 4.5;\\ 5(x-4.5)\cdot 0.64+2.88 & x>4.5.\end{cases}$$

用水量为 3.5 吨、5.5 吨、9 吨时的水费分别为

$$f(3.5)=2.24(元);$$
$$f(5.5)=6.08(元);$$
$$f(9)=17.28(元).$$

这种用几个公式来表示一个函数的情况,我们时常会遇到,我们称这种由几个公式来表示的函数为分段函数.

例 9 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0,\\ -x & x<0.\end{cases}$$

函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1－2 所示，这个函数称为绝对值函数.

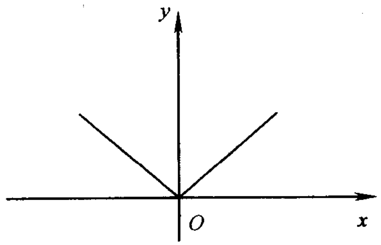


图 1－2

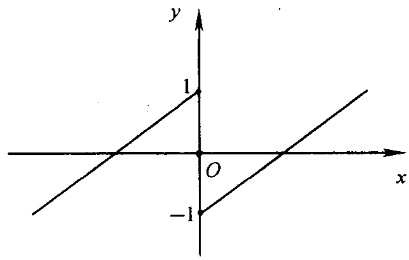


图 1－3

例 10　函数

$$y=\begin{cases}x+1 & x<0,\\ 0 & x=0,\\ x-1 & x>0.\end{cases}$$

函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$，它的图像如图 1－3所示.

注意，分段函数是用几个公式合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数.

三、反函数

先举例来说明这一概念，设给定圆面积函数：

$$A=\pi r^2\qquad r\in[0,+\infty)$$

其中，A 为圆的面积，r 为圆的半径，π 为圆周率(是常数). 如果圆半径 r 为自变量，A 就是因变量，即 A 是 r 的函数，给定 r 就可以得到对应的 A 的值.

有时，我们根据需要，通过圆的面积来确定这时圆的半径，在这个问题的研究中，我们应把圆的面积定为自变量，而半径就是因变量，也即 r 是 A 的函数.

这样由原来的函数 $A=\pi r^2$，$r\in[0,+\infty)$ 值域 $W=\{A\mid A=\pi r^2, r\in[0,+\infty)\}=[0,+\infty)$，交换 r 和 A 的自变量与因变量的位置，即 A 是自变量，r 为因变量，从而得到新的函数 $r=r(A)$. 即为

$$r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}\qquad A\in[0,+\infty)$$

这个新函数就称为原来给出函数 $A=\pi r^2$ 的反函数.

定义 1.1.2 设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

注意,习惯上总是用 x 表示自变量,而用 y 表示函数.所以往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$.另一个习惯表示是,把 φ 这个函数符号用 f^{-1} 表示,这样就有 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$,进一步就写成 $y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$.

例如,函数 $y=3x+1$,则 $x=\frac{1}{3}(y-1)$,x、y 互换得 $y=\frac{1}{3}(x-1)$,$y=\frac{1}{3}(x-1)$ 就是 $y=3x+1$ 这个函数的反函数.

把 $y=3x+1$ 与 $y=\frac{1}{3}(x-1)$ 的图像画于图 1-4 中.由图知,函数与它的反函数的图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

一般地,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

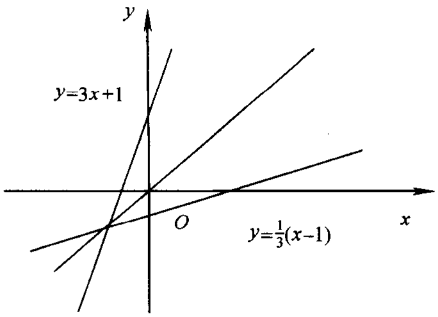


图 1-4

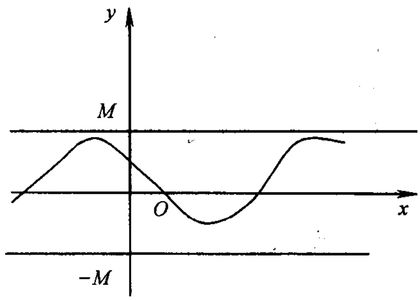


图 1-5

四、函数的性质

(一) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,若存在正数 M,使得在区间 I 上有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

这种性质表明函数的值域包含于有限区间 $[-M,M]$ 内,几何上表现为,函数表示的图像位于 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间的区域内,见图 1-5.

注意,函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界的等价定义为,若存在常数 A 与 B,

使得 $A \leqslant f(x) \leqslant B, x \in I$ 成立通常称 A 为函数的下界，而 B 称为函数的上界．

例如，$y=\sin x$，在定义域$(-\infty,+\infty)$内函数是有界的，因为

$$|\sin x| \leqslant 1 \qquad x \in(-\infty,+\infty)$$

而 $y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的．函数的有界性与所考虑的区间密切相关．例如，$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，而在$(\alpha,1)$上（α 是一个满足 $0<\alpha<1$ 的常数）是有界的．

（二）函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间为 I，如果对于区间 I 上任意 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的（图 1－6）；如果对于区间 I 上任意 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的（图 1－7）．

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．

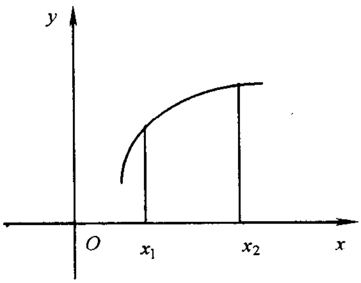


图 1－6

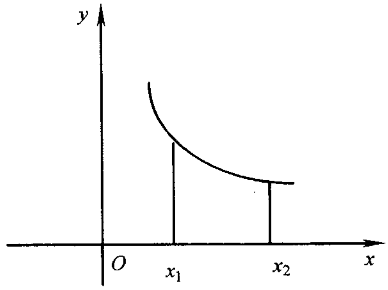


图 1－7

例如，函数 $f(x)=x^2$，在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的；而在区间$(-\infty,+\infty)$上 $f(x)=x^2$ 不是单调的（图 1－8）．

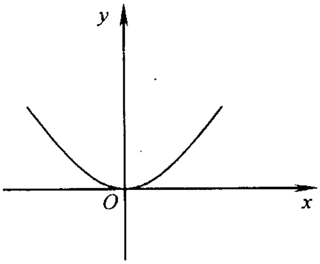


图 1－8

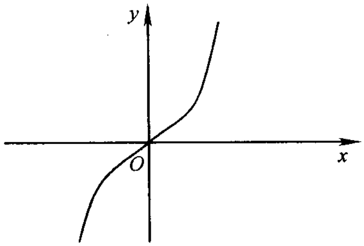


图 1－9