大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解（下册）

同济·四、五版

主编　陶伟

- 全解同济·四、五版习题
- 涵盖同济·二、三版习题
- 精选历年考研试题
- 遴选国内外竞赛试题

国家行政学院出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解（下册）

同济·四、五版

主编　陶　伟

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解/陶伟主编. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-335-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陶…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-解题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046616 号

高等数学习题全解（下册）
陶　伟　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615，68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×960　1/16 开本　57.5 印张　1430 千字
2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-335-5/O·33　　定价（上、下册）：48.00 元

前　言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航天航空大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（同济·四、五版）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章节习题题解按以下三项进行编写：

一、教材《高等数学》（同济五版）的试题及题解。

二、教材《高等数学》（同济二、三、四版）的习题及题解。注：该项为教材第二、三、四版中未被列入第五版的习题及其他高等院校比较典型的高等数学习题。

三、考研试题精选。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排

在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和规律。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了**同济大学**高等数学（**四、五版**）中所有习题，而且也参考了**北京大学、清华大学、北京航天航空大学、北京交通大学、四川大学、浙江大学、华中科技大学、西安交通大学**等院校的高等数学习题。另外，还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题和国内外高等数学竞赛题。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的应试者和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

2004年6月

目　录

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+2xy^2-y^3}{(x+y)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2y-xy^2}{(x+y)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

由定义式可求出$f(x,y)$在$(0,0)$处的两个二阶混合偏导数为

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$$

所以 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

三、考研试题精选

16 二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$存在是$f(x,y)$在该点连续的

(A) 充分条件而非必要条件.　　(B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.　　【　】

【分析】 $f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$连续不能保证$f(x,y)$在M_0存在偏导数$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. 反之，$f(x,y)$在$M_0$存在这两个偏导数也不能保证$f(x,y)$在$M_0$连续. 因此应选(D).

17 二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处

(A) 连续，偏导数存在.　　(B) 连续，偏导数不存在.

(C) 不连续，偏导数存在.　　(D) 不连续，偏导数不存在.　　【　】

【分析】 这是讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点是否连续，是否存在偏导数的问题.

按定义，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\Big|_{x=0},\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\Big|_{y=0}.$$

由于 $f(x,0)=0\ (\forall x)$，$f(0,y)=0\ (\forall y)$，

$\Rightarrow\exists$ 偏导数且 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$.

再看$f(x,y)$在$(0,0)$是否连续?由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac12\neq f(0,0),$$

因此$f(x,y)$在$(0,0)$不连续. 应选(C).

【评注】 ①证明$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$不连续的方法之一是：证明点(x,y)沿某曲线趋于M_0时$f(x,y)$的极限不存在或不为$f(x_0,y_0)$.

②证明$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$不存在的重要方法是证明点$(x,y)$沿两条不同曲线趋于$M_0(x_0,y_0)$

时 $f(x,y)$ 的极限不相等或沿某条曲线趋于 M_0 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

对于该题中的 $f(x,y)$,若再考察

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y),$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

18 考虑二元函数的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q,则有

(A)②⇒③⇒①. (B)③⇒②⇒①.

(C)③⇒④⇒①. (D)③⇒①⇒④. 【 】

【分析】 这是讨论函数 $f(x,y)$ 的连续性,可偏导性,可微性及偏导数的连续性之间的关系.

我们知道,$f(x,y)$ 的两个偏导数的连续性是可微的充分条件,若 $f(x,y)$ 可微则必连续,因此(A)成立.应选(A).

【评注】

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & ① \\ ② \arrow[r, Rightarrow] & ③ \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\ & ④ \end{tikzcd}.$$

19 设 $u = e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为________.

【分析】 这是求二元初等函数在某点的二阶混合偏导数.由于混合偏导数的连续性,它与求导次序无关.为简化计算,先求

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{-x}\cos\frac{x}{y},$$

再求

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)\right|_{x=2}$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x}(-\pi^2 x e^{-x}\cos\pi x)\right|_{x=2}$$

$$= \left.(-\pi^2 e^{-x}(1-x)\cos\pi x)\right|_{x=2} + 0 = \frac{\pi^2}{e^2}$$

【评注】 ① 求多元函数的偏导数实质上是求一元函数的导数.若只求在某点的偏导数,如求 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$,先代入 $x=x_0$,再求 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \left.\dfrac{d}{dy}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$,往往比先求 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 再代入 $x=x_0,y=y_0$ 会更简单些,但求 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 时,第一步需先求 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$,第二步可先代入 $x=x_0$,再求

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d}{dy}\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\right|_{y=y_0}.$$

② 注意利用混合偏导数连续时与求导次序无关的性质,交换求导次序可能简化二阶混合偏

导数的计算.

20 已知$f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$,求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

【解】 首先求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$. 由题设可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\arctan\frac{y}{x}+\frac{x^2}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})-\frac{y^2}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{1}{y}$$

$$=2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^3}{x^2+y^2}=2x\arctan\frac{y}{x}-y.$$

再对y求偏导数即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}-1=\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

21 设$z=e^{-x}-f(x-2y)$,且当$y=0$时$z=x^2$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

【分析】 首先确定函数$f(x)$,在$z=e^{-x}-f(x-2y)$中令$y=0$,由题设得

$$z(x,0)=e^{-x}-f(x)=x^2.\quad\Rightarrow\quad f(x)=e^{-x}-x^2.$$

从而二元函数 $z(x,y)=e^{-x}-f(x-2y)=e^{-x}-e^{-(x-2y)}+(x-2y)^2$,对$x$求偏导数即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-2y)-e^{-x}+e^{2y-x}.$$

22 函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y]=x+g(y)$确定,其中函数$g(y)$可微,且$g(y)\neq 0$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ________.

【分析】 求出$f(u,v)$的表达式是解决本题的关键. 设$u=xg(y),v=y$,不难得出$x=\dfrac{u}{g(v)},y=v$,代入即得

$$f(u,v)=\frac{u}{g(v)}+v.$$

于是 $$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{g(v)},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}.$$ 故应填: $-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$.

§3 全微分

1 求下列函数的全微分:

(1)$z=xy+\dfrac{x}{y}$,求 dz;

(2)$z=e^{\frac{y}{x}}$,求 dz;

(3)$z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,求 dz;

(4)$u=x^{yz}$,求 du.

【解】 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$,所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy).$$

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

所以 $dz=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$.

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}\ln x\cdot z=zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以 $dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{dz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$.

❷ 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

【解】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$,

所以 $dz=\frac{2(xdx+ydy)}{1+x^2+y^2}$, $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2(dx+2dy)}{6}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.

❸ 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

【解】 $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}$, $dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$.

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,

全增量 $\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119$,

全微分 $dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125$.

❹ 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

【解】 $dz=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y=e^{xy}(y\Delta x+x\Delta y)$,将 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 代入 dz,得 $dz=e(1\times0.15+1\times0.1)=0.25e$.

❺ 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

【解】 设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$,则

$f_x(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $f_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$,

所以　$df(x,y)=\dfrac{3}{2\sqrt{x^3+y^3}}(x^2dx+y^2dy)$，

取 $x=1,y=2,dx=1.02-1=0.02,dy=1.97-2=-0.03$，则

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}=f(1.02,1.97)\approx f(1,2)+df(1,2)\Big|_{\substack{dx=0.02\\dy=-0.03}}$$

$$=\sqrt{1^3+2^3}+\frac{3}{2\sqrt{1^3+2^3}}[1\times 0.02+4\times(-0.03)]=2.95.$$

❻ 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

【解】　设$z=x^y$，则 $dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$，

当 $x=2,y=1$ 时，$z=2$，

因为 $dx=1.97-2=-0.03,dy=1.05-1=0.05$，当 $x=2,y=1$ 时，所以

$$dz=1\times 1\times(-0.03)+2\ln 2\times 0.05=-0.03+0.1\times 0.693=0.0393,$$

于是　$1.97^{1.05}\approx 2+0.0393=2.0393$.

❼ 已知边长为 $x=6\text{m}$ 与 $y=8\text{m}$ 的矩形，如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm，问这个矩形的对角线的近似变化怎样？

【解】　设矩形的对角形长为 l，则 $l=\sqrt{x^2+y^2}$，$dl=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

当 $x=6,y=8,dx=0.05,dy=-0.1$ 时，

$$dl=\frac{6\times 0.05+8\times(-0.1)}{\sqrt{6^2+8^2}}=-0.05.$$

所以矩形的对角线约减少 5 cm.

❽ 设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1cm，内高为 20cm，内半径为 4cm. 求容器外壳体积的近似值.

【解】　设容器的内半径为 r，内高为 h，则容器容积为 $V=\pi r^2h$，

所以　$dV=2\pi rhdr+\pi r^2dh=\pi r(2hdr+rdh)$.

当 $r=4,h=20,dr=0.1,dh=0.1$ 时，

$$dV=4\pi(2\times 20\times 0.1+4\times 0.1)=17.6\pi\approx 55.3.$$

因此容器外壳体积约为 55.3cm^3.

❾ 设有直角三角形，测得其两直角边的长分别为 7 ± 0.1cm 和 24 ± 0.1cm. 试求用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

【解】　设三角形两直角边长为 x,y，其斜边长为 $l=\sqrt{x^2+y^2}$.

因为　$\dfrac{\partial l}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\partial l}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

所以计算 l 的绝对误差为

$$\delta_l=\left|\frac{\partial l}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial l}{\partial y}\right|\delta_y=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

当 $x=7,y=24,\delta_x=\delta_y=0.1$ 时，

$$\delta_e=\frac{7\times0.1+24\times0.1}{\sqrt{7^2+24^2}}=\frac{3.1}{25}=0.124(\mathrm{cm}).$$

10 测得一块三角形土地的两边长分别为63 ± 0.1m 和78 ± 0.1m，这两边的夹角为60° ± 1°. 试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差.

【解】 设三角形两边边长为x,y，它们的夹角为θ，则三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$.

因 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}y\sin\theta\cdot\mathrm{d}x+\frac{1}{2}x\sin\theta\cdot\mathrm{d}y+\frac{1}{2}xy\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta$，所以$S$的绝对误差

$$\delta_S=\frac{y}{2}\sin\theta\cdot\delta_x+\frac{x}{2}\sin\theta\cdot\delta_y+\frac{xy}{2}\cos\theta\cdot\delta_\theta.$$

当$x=63,y=78,\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3},\delta_x=0.1,\delta_y=0.1,\delta_\theta=1^\circ=\frac{\pi}{180}$时，

$$S=\frac{1}{2}\times63\times78\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{63\times78}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2127.82,$$

$$\delta_S=\frac{78}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times0.1+\frac{63}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times0.1+\frac{63\times78}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}=27.55,$$

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.55}{2127.82}=1.29\%.$$

所以三角形的面积约为2127.82cm²，其绝对误差为27.55cm²，相对误差为1.29%.

11 利用全微分证明：

(1) 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和；

(2) 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；

(3) 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

【证】 (1) 设两数x,y之和为$u=x+y$.

因为 $\Delta u\approx\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\quad|\mathrm{d}x|\leqslant\delta_x,|\mathrm{d}y|\leqslant\delta_y,$

所以 $|\Delta u|\approx\mathrm{d}u=|\mathrm{d}x+\mathrm{d}y|\leqslant|\mathrm{d}x|+|\mathrm{d}y|\leqslant\delta_x+\delta_y,$

即 $$\delta_u=\delta_x+\delta_y.$$

(2) 设$v=xy$，则$\Delta v\approx\mathrm{d}v=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，于是

$$\left|\frac{\Delta v}{v}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|=\left|\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right|+\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\delta_x}{x}\right|+\left|\frac{\delta_y}{y}\right|$$

即 $$\left|\frac{\delta_v}{v}\right|=\left|\frac{\delta_x}{x}\right|=\left|\frac{\delta_y}{y}\right|.$$

(3) 设$w=\frac{x}{y}$，则

$$\Delta w\approx\mathrm{d}w=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2},$$

所以 $$\left|\frac{\Delta w}{w}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}w}{w}\right|=\left|\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2\cdot\frac{x}{y}}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right|+\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\delta_x}{x}\right|+\left|\frac{\delta_y}{y}\right|,$$

即 $$\left|\frac{\delta_w}{w}\right|=\left|\frac{\delta_x}{x}\right|+\left|\frac{\delta_y}{y}\right|.$$

12 设$f(x+y,xy)=x^2+y^2+xy$,则$\mathrm{d}f(x,y)=$

(A) $(2x+y)\mathrm{d}x+(x+2y)\mathrm{d}y$.　　(B) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$.

(C) $2x\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.　　(D) $2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$.　　【C】

【分析】 因为 $f(x+y,xy)=(x+y)^2-xy\Rightarrow f(x,y)=x^2-y$.

13 求下列全微分:

(1) $z=\arccos\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},y>x>0$;　　(2) $z=\cos\dfrac{x^2}{y}+(xy)^{y/x}$;

(3) $u=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x(y-x)}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}$,

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\sqrt{y-x}}=(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\mathrm{d}y-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x)$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin\dfrac{x^2}{y}\cdot\dfrac{2x}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}\left[\dfrac{y}{x}\ln xy\right]_x'=-\dfrac{2x}{y}\sin\dfrac{x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}\left[-\dfrac{y}{x^2}\cdot\ln(xy)+\dfrac{y}{x^2}\right]$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{x}\ln(xy)+\frac{1}{x}\right],$$

故 $\mathrm{d}z=\left\{-\dfrac{2x}{y}\sin\dfrac{x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}\left[-\dfrac{y}{x^2}\ln(xy)+\dfrac{y}{x^2}\right]\right\}\mathrm{d}x$

$$+\left\{\frac{1}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{x}\ln(xy)+\frac{1}{x}\right]\right\}\mathrm{d}y.$$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\dfrac{|y|}{x^2+y^2}$,

同理 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xy}{|y|(x^2+y^2)}$,

故 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{|y|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\mathrm{d}y$.

14 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处可微,但在该点偏导数不连续.

【证】 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=0$,