高等学校教材

数学分析讲义

上册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

上册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

本书第一版是吉林师大数学系数学分析教研室编《数学分析讲义》，是为高等函授院校数学系开设数学分析课编写的．此次修订，编者署名改为刘玉琏、傅沛仁；并参照1980年5月经理科数学、力学教材编委会审订的高等师范院校《数学分析教学大纲》，对第一版内容作了小量增删；在体例、格式、叙述等方面变动较大；重新编写了函数、极限两章；在每节后增配了练习题，较难题目作了提示，书末附有计算题的答案．

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学．可作高等师范本科与专科的教材（上册本科与专科共用，下册分本科用本与专科用本两种），也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书．

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书习题配备题解公开出版．

第二版修订稿经四川大学秦卫平副教授审查．

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

数学分析讲义

上　册

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 13.375　字数 310,000

1960年8月第1版　1981年11月第2版　1986年3月第8次印刷

印数 248,531—282,530

书号 13010·0674　定价 2.25元

前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的. 在修改时, 吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见.

本《讲义》的内容选取, 考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础, 注意了数学分析课程本身的系统性, 照顾了其它后继课的需要. 文字叙述力求通顺, 定理证明力求详明. 使其通俗易懂, 便于自学.

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析; 对一些定理的证明, 除了给出分析的严格证明外, 注意用几何图形帮助读者理解定理内容, 掌握定理的证法.

本《讲义》有些部分用小字排印, 它们有的是对某些问题作进一步的说明; 有的是教学上的难点; 有的是进一步提高不可缺少的内容. 初学的读者, 可先不阅读小字部分, 待逐步掌握数学分析的方法之后, 再阅读这部分内容.

由于我们水平有限, 错误和不妥之处一定很多, 敬希广大读者批评指正.

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写, 傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作.

吉林师范大学数学系

数学分析教研室

1965.11.于长春

再版前言

自从本《讲义》上册 1960 年出版、下册 1966 年出版以来，收到了许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出了很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表．这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件．借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意．

此次修订，根据 1980 年 5 月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删．在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改．力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服．其中函数与极限两章是重新编写的．函数的讲法适应了新大纲的要求．极限的讲法注意了与现行高中《数学》的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学．

此次修订，每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案．为了满足读者学习《数学分析》的不同要求，在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“* * * *”之前)与乙类题(在符号“* * * *”之后)．我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为《数学分析》代用教材，只做部分或全部甲类题就够了．一般来说，教师不要引导学生做乙类题．高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为《数学分析》的试用教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题．如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题课上的示范题或

习作题.

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字. 师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减.

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议. 对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢.

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正.

编　　者

1981 年 7 月于东北师大

目 录

第一章 函数……………………………………………………(1)

§1.1. 函数……………………………………………………(1)

一、变量与区间(1) 二、函数概念(3) 三、函数的四则运算(8) 四、函数的图象(9) 五、数列(11) 练习题1.1(12)

§1.2. 几种特殊的函数……………………………………(14)

一、有界函数(14) 二、单调函数(18) 三、奇函数与偶函数(19) 四、周期函数(20) 练习题1.2(21)

§1.3. 复合函数与反函数…………………………………(23)

一、复合函数(23) 二、反函数(25) 三、初等函数(29) 练习题1.3(33)

第二章 极限……………………………………………………(35)

§2.1. 数列极限……………………………………………(35)

一、极限思想(35) 二、数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限(37) 三、数列极限概念(40) 四、例(42) 练习题2.1(47)

§2.2. 收敛数列……………………………………………(49)

一、收敛数列的性质(49) 二、收敛数列的四则运算(51) 三、数列的收敛判别法(56) 练习题2.2(64)

§2.3. 函数极限……………………………………………(67)

一、当$x\to\infty$时,函数$f(x)$的极限(67) 二、例(I)(70) 三、当$x\to a$时,函数$f(x)$的极限(71) 四、例(II)(75) 练习题2.3(79)

§2.4. 函数极限定理………………………………………(79)

一、函数极限的性质(79) 二、函数极限与数列极限的关系(82) 三、函数极限存在判别法(85) 四、例(89) 练习题2.4(91)

§2.5. 无穷小与无穷大……………………………………(94)

一、无穷小(94) 二、无穷大(94) 三、无穷小的比较(97) 练习题2.5(99)

第三章 连续函数………………………………………………(101)

§3.1. 连续函数……………………………………………(101)

一、连续函数概念(101) 二、例(103) 三、不连续点及其分类(105) 四、闭区间上连续函数的性质(108) 练习题3.1(111)
§3.2. 初等函数的连续性……………………………………………(113)
一、连续函数的性质和四则运算(113) 二、初等函数的连续性(115) 练习题3.2(117)
第四章 实数的连续性……………………………………………(119)
§4.1. 实数连续性定理……………………………………………(119)
一、闭区间套定理(119) 二、确界定理(121) 三、有限覆盖定理(125) 四、柯西收敛准则(127) 练习题4.1(129)
§4.2. 闭区间上连续函数性质的证明……………………………(130)
一、性质的证明(130) 二、一致连续性(133) 练习题4.2(138)
第五章 导数与微分……………………………………………(140)
§5.1. 导数……………………………………………(140)
一、实例(140) 二、导数概念(143) 三、例(145) 练习题5.1(150)
§5.2. 求导法则及导数公式……………………………………………(152)
一、导数的四则运算(152) 二、反函数求导法则(157) 三、复合函数求导法则(159) 四、初等函数的导数(164) 练习题5.2(169)
§5.3. 隐函数与参数方程求导法则……………………………(172)
一、隐函数求导法则(172) 二、参数方程求导法则(176) 练习题5.3(179)
§5.4. 微分……………………………………………(181)
一、微分概念(181) 二、微分的运算法则和公式(185) 三、微分在近似计算上的应用(186) 练习题5.4(188)
§5.5. 高阶导数与高阶微分……………………………………………(189)
一、高阶导数(189) 二、莱布尼兹公式(192) 三、高阶微分(196) 练习题5.5(198)
第六章 微分学基本定理及其应用……………………………(201)
§6.1. 中值定理……………………………………………(201)
一、洛尔定理(201) 二、拉格朗日定理(204) 三、柯西定理(206) 四、例(207) 练习题6.1(212)
§6.2. 洛比达法则……………………………………………(214)
一、$\frac{0}{0}$型(214) 二、$\frac{\infty}{\infty}$型(219) 三、其它待定型(221) 练习题6.2(225)

§6.3. 泰勒公式……………………………………………………(226)

一、泰勒公式(226) 二、泰勒公式的余项(230) 三、常用的几个展开式(233) 练习题6.3(236)

§6.4. 导数在研究函数上的应用……………………………………(238)

一、函数的单调性(238) 二、不等式定理(242) 三、极值(243) 四、曲线的凹凸性(254) 五、曲线的渐近线(258) 六、描绘函数图象(262) 练习题6.4(266)

第七章 不定积分……………………………………………(270)

§7.1. 不定积分……………………………………………………(270)

一、原函数与不定积分的概念(270) 二、不定积分的运算法则与公式表(272) 练习题7.1(276)

§7.2. 分部积分法与变量替换法…………………………………(277)

一、分部积分法(278) 二、变量替换法(282) 练习题7.2(290)

§7.3. 有理函数的不定积分………………………………………(292)

一、代数的预备知识(292) 二、有理函数的不定积分(295) 练习题7.3(301)

§7.4. 简单无理函数与三角函数的不定积分……………………(301)

一、简单无理函数的不定积分(301) 二、三角函数的不定积分(308) 练习题7.4(314)

第八章 定积分……………………………………………(316)

§8.1. 定积分………………………………………………………(316)

一、实例(316) 二、定积分概念(320)

§8.2. 可积准则……………………………………………………(322)

一、小和与大和(322) 二、可积准则 (326) 三、三类可积函数(328) 练习题8.2(332)

§8.3. 定积分的性质………………………………………………(334)

一、定积分的性质(334) 二、积分中值定理(340) 练习题8.3(342)

§8.4. 定积分的计算………………………………………………(344)

一、按照定义计算定积分(344) 二、积分上限函数(346) 三、定积分的基本公式(348) 四、定积分的分部积分法(350) 五、定积分的变量替换法(353) 练习题8.4(358)

§8.5. 定积分的应用………………………………………………(362)

一、微元法(362) 二、平面区域的面积(364) 三、平面曲线的弧长(369)

四、利用截面面积计算体积（375） 五、旋转体的侧面积（379） 六、变力作功（381） 练习题8.5（383）
§8.6. 定积分的近似计算……………………………………………………（386）
一、说明（386） 二、梯形法（387） 三、抛物线法（390） 练习题8.6（394）
附录 希腊字母表……………………………………………………（395）
练习题答案……………………………………………………（397）

第一章 函 数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围. 在数学中函数处于基础的核心地位. 函数不仅是构成中学数学的主体，函数也是数学分析这门课程研究的对象. 广义地讲，几乎现代数学的每个分支，函数都是研究的对象之一.

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了一些简单函数的性质. 本章除对中学数学已讲过的函数及其性质重点复习外，根据本课与后继课的需要，对函数作必要的补充.

§1.1. 函 数

一、变量与区间

唯物辩证法指出，宇宙中的一切事物，从自然界中很小的单位，如电子，到很大的物体，比如太阳，都是处于不间断的运动变化之中，事物的运动是绝对的，事物的静止是相对的. 这是物质世界的一个普遍规律. 在事物的运动过程中，必然表现为某些量的变化. 在某个运动过程中，有的量时时或处处变化着，称为**变量**；有的量时时或处处保持相对静止状态，称为**常量**. 例如，客机在两站之间的飞行过程中，飞机距地面的高度、距两站之间的距离以及汽油的储存量等都是变量. 乘客的人数、行李包裹的重量等都是常量. 再例如，在圆的半径增加的过程中，圆的周长、圆的面积都是变量，而圆的周长与其直径之比却是常数(即圆周率 π). 常量也可以看作是一种特殊的变量，即在某个运动过程中，量皆取相同的数值.

我们知道，纯数学研究的对象是抽象的数与形．数与量是有区别的．数是抽象的，量是具体的．于是，变数是变量的抽象，常数是常量的抽象．在基础课程中，常常要将数与数之间的某些规律应用到实际问题中去，从而给数赋予量的具体意义，因此在数学分析这个基础课程中，数与量不加区别，常常将“变数”说成“变量”，将“常数”说成“常量”．

数学分析是建立在实数的基础上，本书所说的数都是实数，除特殊声明外，超出了实数范围认为是没有意义的．我们经常用字母

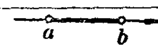
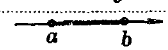
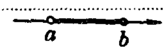
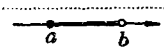
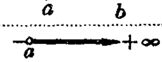
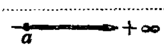
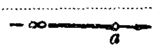
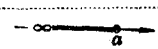
$$x, y, z, t, \cdots \text{ 与 } a, b, c, d, \cdots$$

分别表示变量（变数）与常量（常数）．

关于集合的初步知识读者在中学数学（十年制学校高中数学第一册）已经学习了，本书不再重述．

实数全体组成的集合称为**实数集**，表为R．为了叙述简便，本书所说的“数集”都是指实数集R的子集．

区间是特殊的实数集R的子集．现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如下（a 与 b 是二数，且 $a<b$）：

定义	名称	符号	图象[①]
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x \mid a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x \mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	
$\{x \mid x<a\}$	无限区间	$(-\infty,a)$	
$\{x \mid x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty,a]$	

① 各种区间的图象都是在数轴上，这里的图象没有画原点．

我们常常说，"区间……"，它是什么样的区间，由跟随区间后面的符号确定. 例如，区间$[a, b]$，这是闭区间；区间$(-\infty, a)$，这是无限区间，等等. 还有几个特殊情况：

区间$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$，即实数集.

开区间$(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，其中$\delta$是某个正数，称为$a$的**邻域**(或$a$的$\delta$邻域).

在a的邻域$(a-\delta, a+\delta)$内去掉a，即$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$，称为$a$的**去心邻域**.

我们已知，数的图象是数轴上的点. 反之，数轴上点的坐标又是数. 因为实数集$\mathbf{R}$与数轴上的所有点是一一对应的，所以数与点不加区别. 我们常常将"数a"说成"点a"，反之亦然.

二、函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着. 这是物质世界的一个普遍规律. 下面列举几个两个变量互相联系着的例子：

例 1. 真空中自由落体，物体下落的时间t与下落的距离s互相联系着. 如果物体距地面的高度为h，对任意时间

$$t \in\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{①}$$

都对应一个距离s. 已知t与s之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2} g t^{2},$$

其中g是重力加速度，是常数.

例 2. 球的半径r与该球的体积V互相联系着. 对任意半径

① 当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$时，由$s=\frac{1}{2}gt^2$，有$s=h$，即物体下落到地面.

$r\in[0,+\infty)$都对应一个球的体积．已知 r 与 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率，是常数．

例 3. 某地某日时间 t 与温度 T 互相联系着（如图 1.1）．对 13 时至 23 时内的任意时间 t 都对应着一个温度 T．已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的温度曲线表示．横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T．曲线上任意点 $P(t,T)$ 表示在时间 t 对应着的温度是 T．

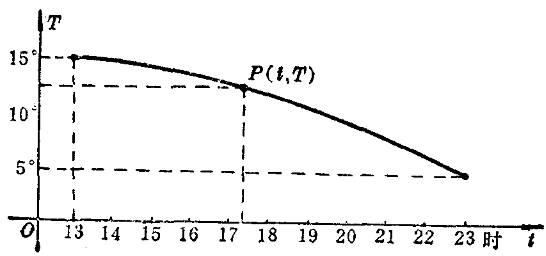


图 1.1

例 4. 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着．实测如下表：

温 度（百度表）	0	2	4	6	8	10	12	14
体 积 (cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

对$\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$中每个温度 T 都对应一个体积 V．已知 T 与 V 的对应关系用上面表格表示．

例 5. 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都对应一个数 $y=x^2$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=x^2.$$

例 6. 对任意 $x\in[-1,1]$都对应一个数 $y=\sqrt{1-x^2}$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

例 7. 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都对应一个数 $y=\sin x$, 即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\sin x.$$

例 8. 对任意 $x\in(-5,\pi]$都对应一个数 $y=3x^2+x-1$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=3x^2+x-1.$$

上述前四个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同. 但是,从数学角度看，它们与后四个例子却有共同的特征:都有两个数集和一个对应关系,对其中一个数集的任意数,按照对应关系都对应实数集$\mathbf{R}$中的唯一一个数. 于是,有如下的函数概念:

定义 有非空数集 A 与实数集 $\mathbf{R}$，如果对数集 A 中的任意数 x,按照对应关系 f 都对应实数集$\mathbf{R}$中唯一一个数 y,称对应关系 f 是定义在数集 A 上的**函数**,表为

$$f:A\to\mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**，函数值的集合称为函数 f 的**值域**,表为 $f(A)$,即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}\subset\mathbf{R}.$$

根据函数定义,不难看到,上述八例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

1. 用符号“$f: A\to\mathbf{R}$”表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确. 特别是在抽象的数学学科中使用这个函数符号更显得方便. 但是，在数学分析中，一方面要讨论抽象的函数 f;另一

方面又要讨论大量具体的函数. 在具体函数中需要将对应关系 f 具体化,使用这个函数符号就有些不便. 为此在本书中我们约定,将"f 是定义在数集 A 上的函数"用符号"$y=f(x), x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为"$y=f(x)$", 有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)". 严格地讲, 这样的符号和叙述混淆了函数与函数值. 但是,这仅是为了方便而作的约定.

2. 在函数概念中,对应关系 f 是抽象的,只有在具体函数中,对应关系 f 才是具体的. 例如,在上述几个例子中:

例 1, f 是一组运算: t 的平方乘以$\frac{1}{2}g$ $\left(s=\frac{1}{2}gt^2\right)$.

例 2, f 是一组运算: r 的立方乘以$\frac{4}{3}\pi\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3\right)$.

例 3, f 是图 1. 1 所示的曲线.

例 4, f 是第 4 页上的表格.

例 6, f 也是一组运算: x 的平方,乘以-1,再加 1, 最后开平方(取算术根).

为了对函数 f 有个直观形象的认识 可将它比喻为一部"数值变换器". 我们将任意 $x\in A$ 输入到数值变换器之中, 通过 f 的"作用", 输出来的就是 y. 不同的函数就是不同的数值变换器(如图 1. 2).

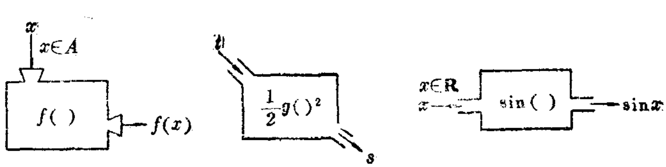


图 1.2

3. 根据函数定义, 给定一个函数一定要指出函数的定义域. 但是,有时为了方便并不指出函数 $y=f(x)$的定义域, 这时认为函

数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x|f(x)\in\mathbf{R}\}$. 例如，给定的函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间 $[-1,1]=\{x|\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$. 但是，在某些特殊的情况，必须明确指出函数的定义域. 如上述的例8，函数 $f(x)=3x^2+x-1$, $x\in(-5,\ \pi]$. 尽管对任意 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=3x^2+x-1$ 都有意义. 但是，我们讨论的这个函数仅限制在区间 $(-5,\pi]$ 上.

在实际问题中，函数的定义域还要受实际意义的约束. 例如，上述的例 2，半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 从抽象的函数来说，r 可取任意实数. 但是，从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数. 因此，它的定义域是区间 $[0,+\infty)$.

4. 函数定义指出，任意 $x\in A$ 对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，这种对应称为由 A 到 $\mathbf{R}$ 中的**单值对应**. 但是，反之，一个 $y\in f(A)$ 就不一定只对应唯一一个 $x\in A$（如图 1.3）. 这是因为，在函数定义中只是说，一个 $x\in A$ 对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，并没有说不同的 x 对应不同的 y，即不同的 x 可能对应相同的 y. 如图 1.3，不同的 x_1 与 x_2 对应同一个 $y=y_0$. 反之，一个 $y=y_0$ 就对应两个不同的 x_1 与 x_2，即

$$f(x_1)=f(x_2)=y_0,\quad x_1\neq x_2.$$

例如，函数 $f(x)=x^2$. 对任意 $y=a^2>0$，都对应两个不同的 x 值 $-a$ 与 a，即

$$f(-a)=f(a)=a^2.$$

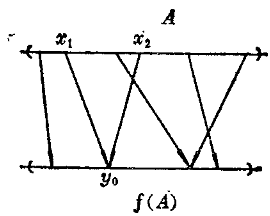


图 1.3

再例如，函数 $f(x)=\sin x$. 对 $y=1$ 对应无限多个不同的 x 值