内部教材
注意保存

中国人民解放军陆军学院

应用数学教材

总参谋部军训部

国防科技大学出版社

内部教材
注意保存

中国人民解放军陆军学院

应 用 数 学

总参谋部军训部

国防科技大学出版社

一九九五年六月

中国人民解放军陆军学院
应用数学教材
著　者：总参谋部军训部
责任编辑　邹向曙
*
国防科技大学出版社出版
（内部发行）
邮编：410073　电话：（0731）4436564
石家庄陆军学院印刷厂印装
*
开本：787×1092　1/32　印张：12.25　字数：265千字
1995年8月第1版第一次印刷　印数：6600

ISBN　7-81024-348-9
O·46

通　知

现将《中国人民解放军陆军学院应用数学教材》印发院校试行，从一九九五年级开始，作为该课程教学的基本依据。使用中如发现问题，由教务部门汇总报我部，以便再版时修改完善。

总参谋部军训部

一九九五年六月

目　　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率论

第三部分 数理统计

第一章　n 阶行列式

在中学数学中，我们已经学过用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组. 我们将看到，n 个未知量的线性方程组也能用同样的方法求解. n 阶行列式就是根据这个需要产生的. 本章将建立 n 阶行列式的概念，讨论行列式的性质和计算方法，最后给出利用行列式解线性方程组的克拉默(Cramer，G) 法则.

§1.1　行列式的定义

一　排列及其逆序数

由 $1,2,\cdots,n$ 排成的一个有序数组称为一个 n **级排列**，简称为**排列**.

例如，1、2、4、3 是一个 4 级排列，5、3、1、2、4 是一个 5 级排列.

中学已学过，n 个元素的全排列的种数为 $n!$. 显然，n 级排列的种数也为

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

对于 n 个不同的自然数，规定由小到大为标准次序，并称排列 $1、2、\cdots、n$ 为**标准排列**. 在一个排列中，如有一个大数排在一个小数的前面，就说这两个数形成一个**逆序**；一个排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**. 排列 $p_1、p_2、\cdots、p_n$ 的逆

序数记为 $\tau(p_1、p_2、\cdots、p_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

因为 $\tau(1、2、\cdots、n) = 0$，所以标准排列是偶排列.

例 1 求排列 2、3、1、5、4 的逆序数.

解 在排列 2、3、1、5、4 中，一共有 2、1；3、1；5、4 这三个逆序，所以 $\tau(2、3、1、5、4) = 3$.

例 2 求排列 $n、(n-1)、\cdots、3、2、1$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中，1 前面比它大的数有 $n-1$ 个，2 前面比它大的数有 $n-2$ 个，…，$n-2$ 前面比它大的数有 2 个，$n-1$ 前面比它大的数有 1 个，所以

$$\begin{aligned}&\tau(n、(n-1)、\cdots、3、2、1)\\&\quad=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&\quad=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

例 3 判断下列排列的奇偶性：

1、2、3；1、3、2；2、1、3；2、3、1；3、1、2；3、2、1.

解 由于 $\tau(1、2、3)=0$，$\tau(2、3、1)=2$，$\tau(3、1、2)=2$，所以排列 1、2、3；2、3、1；3、1、2 是偶排列；而 $\tau(1、3、2)=1$，$\tau(2、1、3)=1$，$\tau(3、2、1)=3$，所以排列 1、3、2；2、1、3；3、2、1 是奇排列.

二 对换

在一个排列中，仅将它的两个数码对调，而得到另一个排列，这种对调变换，称为一个**对换**.

性质 1° 任意一个排列，经过一次对换后，改变它的奇偶性.

证明　先证明相邻两个数码对换的情况.

设排列为

$$A、i、j、B,$$

其中A、B表示除i、j两个数码其余的数码，对换i与j，原排列变为

$$A、j、i、B,$$

显然，A、B中数码的次序没有改变，并且i、j与A、B中数码的次序也没有改变，仅仅改变了i与j的次序. 因此，新排列仅比原排列增加($i < j$时) 或减少($i > j$时) 一个逆序，所以它们的奇偶性相反.

再证一般对换的情形.

设排列为

$$A、i、k_1、k_2、\cdots、k_s、j、B,$$

将数码i依次与数码k_1、k_2、$\cdots$、k_s、j作$s+1$次相邻对换，变为

$$A、k_1、k_2、\cdots、k_s、j、i、B,$$

再将j依次与k_s、$\cdots$、k_2、k_1，作s次相邻对换，共经过$2s+1$次相邻对换即得到排列

$$A、j、k_1、k_2、\cdots、k_s、i、B,$$

所以这两个排列的奇偶性相反.

性质 2°　奇排列调成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

证明　由性质 1° 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，考虑到标准排列是偶排列，结论必然成立.

三　n 阶行列式的定义

有了上面的预备知识，就可以定义n阶行列式了. 首先观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

的结构，可以看到：

(1) 式中右边的每一项都是三个元素的乘积，而这三个元素取自行列式中不同的行和不同的列. 于是，其每一项除正负号外可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里第一个下标(称行标) 排成标准排列 1、2、3. 而第二个下标(称列标) 排成 p_1、p_2、p_3，它是 1,2,3 三个数的一个排列.

(2) 式中各项都带有符号，当 p_1、p_2、p_3 是偶排列时取正号，是奇排列时取负号，因此各项符号可表示为$(-1)^t$，其中 $t = \tau(p_1、p_2、p_3)$.

(3) 式中右边是 $3! = 6$ 项的代数和. 于是，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $t = \tau(p_1、p_2、p_3)$，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 p_1、p_2、p_3 求和.

上述规律对二阶行列式显然成立.

现在就来据这些规律来定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \tag{1}$$

其中 $\sum$ 表示左式不同行、不同列的 n 个元素之乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 求和，$t = \tau(p_1、p_2、\cdots、p_n)$，则称左式为 **$n$ 阶行列式**，通常用大写字母 D 表示. $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项，右式计算结果称为行列式之值.

n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和，每项都是行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积，每项的符号这样确定：当该项各因子行标按标准次序排列后，列标排列若为偶排列则该项取正号，若为奇排列则取负号.

当 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则定义的是一致的.

当 $n = 1$ 时，$|a| = a$. 注意不要与绝对值记号相混淆.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t = \tau(p_1、p_2、\cdots、p_n)$. 若将其元素对换，使其列标为标准排列，则其行标变为 q_1、q_2、$\cdots$、q_n. 如果不考虑符号，仅从数值上看，应有

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

如果 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 是奇排列，将其变为标准排列 1、2、$\cdots$、n，则需对换奇数次. 此时作为标准排列的行标经奇数次对换，则变为奇排列，即 q_1、q_2、$\cdots$、q_n 为奇排列；如果 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 是

偶排列，则q_1、q_2、…、q_n亦为偶排列，记$\tau(q_1,q_2,\cdots,q_n)=s$，应有

$$(-1)^t=(-1)^s,$$

即p_1、p_2、…、p_n与q_1、q_2、…、q_n奇偶性相同，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

由此可得出n阶行列式的另一个定义.

定义 1.1.2 n阶行列式(1)也可以表示为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中$t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$. 此时列标排列为标准次序.

对角线以上(下)的元素都为0的行列式称为下(上)三角行列式.

例 4 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D中一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n},\quad t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n),$$

先看D的第n行，除a_{nn}外，其它各元素都是0，所以只能取$p_n=n$，再看第$n-1$行，除$a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$外，其它各元素都是0，而前面已取$p_n=n$，所以这里只能取$p_{n-1}=n-1$. 这样逐步推上去，不难看出，在D中除$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项外，其余的项均为0，而这项的符号为正，于是

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式的值等于它的主对角线上元素的乘积.

例 5 计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

(未写出的元素都是 0). 如上面形式的行列式称为**对角行列式**.

解 由例 4 知 D_1 显然等于对角线上元素之积即

$$D_1 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

要计算 D_2, 只要确定 D_2 中非零项 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 的符号, 由于 $p_1 = n, p_2 = n-1, \cdots, p_n = 1$, 而

$$\tau(n、(n-1)、\cdots、3、2、1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

故
$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

习题 1.1

1 求下列各排列的逆序数, 并确定其奇偶性.

(1) 4、2、3、1、5;

(2) 3、7、6、4、2、5、1;

(3) 6、5、8、7、2、1、3、4;

(4) 1、3、5、7、…、$(2n-1)$、2、4、6、8、…、$(2n)$.

2 决定 i、j 的值, 使

(1) 1、2、4、5、i、6、j、9、7 为奇排列;

(2) 3、9、7、2、i、1、5、j、4 为偶排列.

3 决定以下各项在相应阶行列式中的符号.

(1) $a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$；

(2) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$；

(3) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$；

(4) $a_{21}a_{52}a_{13}a_{44}a_{65}a_{36}$.

4 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

5 用行列式的定义计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式的性质

从 n 阶行列式的定义看到，直接按定义计算行列式是相当麻烦的. 为此，需要进一步讨论行列式的性质，以便简化行列式的计算.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1°　行列式与它的转置行列式相等.

证明　记 D 的转置行列式

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$. 按定义 1.1.1

$$D' = \sum(-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

由定义 1.1.2，有

$$D = \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

故
$$D' = D.$$

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也成立，反之亦然.

性质 2° 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，交换 i、j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

证明 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 交换 i, j 两行得到的，即当 $k \neq i$、j 时，$b_{kp} = a_{kp}$；当 $k = i$、j 时，$b_{ip} = a_{jp}$，$b_{jp} = a_{ip}$，于是

$$D_1 = \sum(-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n}.$$