高等职业教育课程改革示范教材

王书营◎主编
陈　仲◎主审

工程应用数学基础

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

工程应用数学基础

主　　编　王书营
主　　审　陈　仲
副主编　朱建国　冯桂珍

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程应用数学基础 / 王书营主编. —南京:南京大学出版社,
2007.9

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-05097-8

Ⅰ.工… Ⅱ.王… Ⅲ.工程数学—高等学校:技术学校—
教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 131024 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
网　　址 http://press.nju.edu.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 工程应用数学基础
主　　编 王书营
责任编辑 吴　华　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 20.5 字数 504 千
版　　次 2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　数 1～3000
ISBN 978-7-305-05097-8
定　　价 31.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

高等职业教育课程改革示范教材
《工程应用数学基础》指导委员会

内容提要

本书是根据全国高职理工类专业对数学的需要而编写的，其中涵盖了函数、矩阵代数与线性方程、空间向量与空间解析几何、极限与连续、导数与微分、积分、导数与微分的应用(含多元微分)、积分的应用(含微分方程和二重积分)、工程应用(含傅里叶级数和拉普拉斯变换)、数值计算方法、数学软件和数学建模等内容.

全书含预备知识共十一章：第一部分：预备知识和第一至五章是基础内容，目的是提高数理素质.其中，预备知识是为接续中等教育及强化对象研究而准备的；第一、二章的矩阵与空间几何部分的内容是为了帮助学生掌握多数据处理的方法和扩展空间概念；第三、四、五章是一元微积分，是高等数学的精髓，也是应用的基础.第二部分：第六至八章是应用，把数学与专业需要结合起来.第三部分：第九、十章是综合运用，通过建立数学模型及计算机编程，增强学生解决实际问题的能力.

全书结构紧凑，逻辑清晰，自成体系.内容的处理详略得当，既保留了本学科自身的系统性，又达到了"以应用为目的，以必需、够用为度"的要求，解决了高等职业教育中数学课时少、内容多的矛盾.在每个知识模块前，介绍数学史和数学文化方面的知识，在后续课程中将常见的案例作为切入点，导出数学概念和数学思想方法.全书还将数学方法和实际应用融为一体，易于掌握和运用.本书在理论与实践的结合上，增加了部分数学实验，以更好地帮助学生掌握重、难点内容；介绍了部分数学软件及计算机操作方法，扩展知识领域，以加快新知识转化和新技术应用的速度；简要介绍了数学建模的思想和方法，以实例给出建模的过程；为了提高学生的数学抽象能力和可持续发展的需要，在部分知识模块后介绍了较为严格的数学概念和应用数学模型，用"*"号标注.

本书内容的阐述由浅入深，各知识点间做到合理过渡，每个知识点都有例题剖析及方法总结，使读者能循序渐进.每个模块的内容相对独立，具有较强的伸缩性，便于灵活安排.可作为高职高专、成人大专工科各专业的高等数学、工程数学课程的教学用书，也可作为工程技术或其他相关专业人员的自学用书.

前　言

在高等职业教育的发展过程中，工科各专业需要的数学课程，在开设学时的多少、教学内容的选取、教学要求的确定以及与后续课程的结合等方面，都走过了一条曲折的道路.现在数学已被公认为是工科各专业所必需的基础素质课，而且涉及的领域之广泛是其他学科所不能比拟的.学好数学不仅可以提高学生严密的逻辑思维能力，同时对学习其他课程及实际应用都有着极大的帮助.

随着高等职业教育改革的不断深入，工科各专业需要的数学与专业结合日益紧密，能够在新的教学模式下，为读者提供一本好的教材，将是数学教育工作者莫大的欣慰.

我们一直深入教学一线，积累经验，召开座谈会听取学生的意见，通过中学教师了解学生基础和内容接续问题，与专业课教师共同研讨构建教材内容.形成的初稿在我院机电一体化技术和机械制造与自动化专业试用，师生反映良好，其创新思想为这两个专业成为全国示范性专业提供了有力的智力支持，我院开设的高等数学课程也被江苏省评为一级精品课程.

本书在教学水平、科学水平、思想水平上均符合人才培养目标及课程教学基本要求，教材内容宽泛、深度适宜、分量恰当，符合认知规律，富有启发性，便于学习，有利于激发学生的学习兴趣及培养学生的各种能力，其突出点在于：

(1) 各章节内容都通过实例引出概念，继而启发性地深入到原理和方法中去.所用实例多取自于专业环境，寓意深刻，其思想性贯穿所述内容的全过程，使读者能够轻松愉快地接受所学内容的要旨.

(2) 在保证数学概念正确的前提下，尽量借助几何图形加以直观描述，图文并茂，力求使抽象概念形象化.定理公式在给出前后都有通俗的解释，便于读者理解.

(3) 本书从结构上进行有机整合.为加深理解，先介绍定积分，后引出不定积分，并把两种积分法合二为一，减少重复；按一致性和相近原则进行有效分散，把微分方程分解在积分应用和拉普拉斯变换应用中加以解决；多元函数微积分分解在空间曲面、微分应用和积分应用中，使学习者能够触类旁通.

(4) 有机地分散难点，相关联的重点和难点之间有很好的过渡，每个知识点都配选典型的例题，注重贯彻由浅入深的原则；每节之后配备有适量习题，以供

学生练习巩固所学内容.习题多以计算为主,少数是技巧题.每节练习在编排上,从最基本的开始,逐步提高题目难度,引导学生进入到较深的境界.

(5) 为加强能力培养,在掌握数学理论的基础上,在极限与连续模块后增设了数学实验,第十章介绍了数学软件、计算机操作方法等内容.

(6) 对数学建模的思想和方法作了简介,结合具体内容进行数学建模训练,提高解决实际问题的能力.

(7) 应用环境除纯数学外还涉及物理、化学、工程技术、生物工程、天体运行、经济管理等许多领域.选取的问题生动具体,妙趣横生,使学生直接感受到数学的重要与奥妙.

(8) 每一自然节的内容较为紧凑、均衡,可在一次课(约 90 分钟)内完成,便于课程安排.

另外,为配合数学的素质教育,在预备知识、第一至六章、第八章中都简介了与各章内容相关的微积分史、杰出数学家生平及其重要贡献.为了某些专业或有能力的读者学习的需要,书中适当编写了一部分较难的内容,并用"*"标出,授课时可根据需要选讲.

本书编写过程中,许多专家学者都给以热忱关注和大力支持.在数学与专业知识的结合方面,得到了江南大学机械学院刘利国副教授、南京化工职业技术学院自动化系孙建领副教授、淮安信息职业技术学院机电系马宪亭副教授和南京工业职业技术学院机械工程系主任腾宏春教授的热忱帮助与极大的支持;在处理与中等数学知识衔接的问题上,中等数学教育专家许庆县老师给予了大力支持;在人才培养方面,山东峄化集团人资部的刘国力、李夫健给出了建设性意见,在此表示衷心的感谢.

全书的框架结构安排、统稿工作由南京工业职业技术学院的王书营副教授承担,由南京大学陈仲教授担任主审.

本书的预备知识和物理应用部分的内容由洪焕冰编写,第一章由朱建国编写,第二至九章由王书营编写,第十章由冯桂珍编写.

由于时间仓促及编者水平所限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正.

编　者

2007 年 5 月于金陵

目　　录

预 备 知 识

微积分史简述

16 世纪以前，数学研究的对象基本上是常量和不变的图形，如算术、代数主要研究数量关系，几何侧重于研究图形，大致相当于现在中学数学课本的内容，通称常量数学时期. 到了 16 世纪，对运动的研究变成了自然科学的中心问题. 从 17 世纪开始，进入了所谓变量数学时期，它是以微积分的出现和发展为标志.

变量数学的第一个决定性步骤是 1637 年笛卡儿通过引入坐标法创立了解析几何. 在此之前，对于一个二元代数方程如 $F(x,y)=0$，在代数中把 x 和 y 看作变量，认为该方程本身表示 x 与 y 之间的一种依赖关系，即 $y=f(x)$ 是一个线性函数. 笛卡儿在平面上引入了直角坐标系，建立了点和数偶、图形与方程之间的联系. 这样，数和形就结合起来了，从此，有利于用代数的方法去解决几何问题.

变量数学的第二个决定性步骤是微积分的创立. 诚然，微积分作为一门学科，它的一些概念（如极限）萌芽于 15 世纪以前的古代，比如我国三国时的数学家刘徽曾使用割圆术求圆的面积，古希腊阿基米德曾用穷竭法求抛物线弓形的面积，就是很好的例子. 微积分和解析几何不同，它的对象是函数本身的性质，而解析几何的对象是几何图形. 可以说微积分起源于力学的新问题和几何的老问题，它是在已形成的力学材料的基础上，从几何和代数中引出的方法和问题中建立起来的. 17 世纪，由于天文、航海及生产技术的发展，大量的科学技术和生产实践问题需要解决. 这些问题大体上可以归纳为四大类：① 已知物体移动的距离是时间的函数，求物体在任意时刻的速度与加速度；反过来已知加速度是时间的函数，求速度与距离；② 求曲线的切线；③ 求函数的最大值、最小值；④ 求曲线的长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积以及两个物体之间的引力，等等. 当时，许多数学家都为解决这些问题而努力探索，其中有关微分学方面的问题解决得比较好，积分学中的一些问题也得到过一些好的结果. 但是由于他们使用的方法多半不具有普遍性，或者即使有的方法蕴含着普遍性，但由于尚未有人能充分理解微分与积分这两类问题之间的相互联系，因而未能创立微积分. 直到 17 世纪后半期，英国的牛顿与德国的莱布尼兹，才在前人工作的基础上，各自独立地建立了微分运算和积分运算，并且建立了两者之间的内在联系，奠定了微积分这门学科的基础.

第一节 实 函 数

数学的研究对象是现实世界的空间形式与数量关系，而现实世界是处于永恒的变化之中，事物的变化以及它们之间的内在联系可以从量的侧面来描述，就形成了变量与函数，其中实变量是大学数学的主要研究对象.

微积分学的研究对象是函数[1]，函数概念是数学中一个基本而重要的概念. 但是微积分问世时，函数的一般定义还没有出现，随着数学研究范围的扩大，研究问题的深入，直到公元 1837 年，德国数学家 P. G. L. 狄利克雷(Dirichlet，1805～1859)才提出现今通用的函数定义，使函数关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用. 函数从提出到完成，用了两百多年的时间，经历了由不全面到全面、不严密到严密的发展过程.

在 17 世纪，数学已经出现了三角函数、对数函数、指数函数、代数函数、超越函数等概念，但当时人们还没有充分认识到函数概念，因此，17 世纪引进的绝大部分函数是被当作曲线来研究的.

1673 年，莱布尼兹首次用“function” 一词表示函数，进而把它解释为表示任何一个随曲线上的点的变动而变动的量.

记号 f 是欧拉 1743 年引进的，当时，欧拉认为函数是一条可以随意描绘出的曲线. 1748 年，欧拉把函数定义为由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表达式. 1775 年，欧拉又给出一个新的函数定义：如果一个变量依赖于另一个变量，使得当后一个变量变化时，前一个量也随着变化，那么称第一个量是第二个量的函数.

从上述函数概念的发展变化过程可看出，这些函数概念是人们不断地对各种具体的函数关系加深认识，经过抽象得出的，都反映了一个量对另一个量的依赖关系，都是“变化”和“运动”的辩证唯物主义观点的抽象.

1837 年，高斯和雅各布的学生，黎曼的指导老师狄利克雷给出了一个函数定义：“如果对于某区间上的每一个确定的 x 值，按照某一法则 y，都有一个或多个确定的值与之对应，那么 y 叫做 x 的函数.”

狄利克雷的定义一方面继承了欧拉等人关于函数概念的精神，又打破了把“函数”和“解析式子”等同起来的局限性，抓住了两个变量对应关系的确定存在这一要害，而不管它是否可用数学运算来表达，从而使函数概念能更准确地描述各种互相依赖的变量之间的关系. 但是随着科学技术及数学学科本身的发展，这个以变量概念作为函数概念的定义逐渐暴露出不足之处. 20 世纪初，又有人给出了下面的函数定义：“设 X 和 Y 是两个非空集合，如果对于每个 X 中的元素 x，依照某一法则，总有确定的一个 Y 中的 y 和它对应，这个对应法则就叫做函数.”这就是说，函数是非空集合 X 到非空集合 Y 的一个映射.

这个定义使我们可以将函数概念推广到以任何对象为元素的两个集合之间，这就极大地扩展了函数概念建立的基础，适应了现代数学对函数概念的需要.

由于事物的多样性，反映它们的函数也是复杂多样的，在表示方法中解析式较为规范、

[1] “函数”一词的由来. 1859 年我国清代数学家李善兰翻译《代数学》一书时首先用“函数”一词翻译“function”一词，他解释说：“凡此变数函彼变数，则此为彼之函数”.

严格,但有一些函数的关系是复杂的,以难易程度和表现形式不同,可把我们所接触到的大多数解析式函数分为以下几种类型.

一、基本初等函数

基本初等函数共有六大类:即常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

1. 常量函数

标准式:$y = c$(c 为常数).

标准式要求:y 的表达式中不含自变量,直接表现为常数或常量字母.

2. 幂函数

标准式:$y = x^{\alpha}$(α 为实数).

标准式要求:① 指数 α 是常量;② 底是一个独立变量[1];③ 系数为 1.

幂函数的类形式:$y = [f(x)]^{\alpha}$(其中 $f(x) \neq c$, 下同).

运算特点:幂函数的积、商、乘方、开方皆为幂函数(自身封闭).

例如,函数 $y = x^5$ 是标准幂函数,$y = (2x^2 + 3)^5$ 不是标准幂函数,而是幂函数的类形式;幂函数 $y = x^3$ 与 $y = x^5$ 的积、商分别是 $y = x^8$ 和 $y = x^{-2}$,仍然是幂函数.

3. 指数函数

标准式:$y = a^x$(a 是常数,且 $a > 0, a \neq 1$).

标准式要求:① 底是常量;② 指数是一个独立变量;③ 系数为 1.

指数函数的类形式:$y = a^{f(x)}$(a 是常数,且 $a > 0, a \neq 1$).

运算特点:指数函数的积、商、乘方、开方皆为指数函数(自身封闭).

注意:以常数 $\mathrm{e} = 2.718\,281\,8\cdots$ 为底的指数函数 $y = \mathrm{e}^x$ 是科技中常用的函数.

例如,函数 $y = 5^x$ 是标准指数函数;$y = 5^{(2x^2+3)}$ 不是标准指数函数,而是指数函数的类形式;函数 $y = 5^{2x}$,若把它看作以 5 为底的指数函数,是指数函数的类形式,经过运算后函数变为 $y = 25^x$,是以 25 为底的标准指数函数.

4. 对数函数

标准式:$y = \log_a x$(a 是常数,且 $a > 0, a \neq 1$).

标准式要求:① 底是常量;② 真数是一个独立变量;③ 系数和指数皆为 1.

对数函数的类形式:$y = \log_a f(x)$(a 是常数,且 $a > 0, a \neq 1$).

注意:以常数 e 为底的对数函数 $y = \log_{\mathrm{e}} x$ 称为自然对数函数,简记作 $y = \ln x$.

例如,函数 $y = \log_3 x$ 是标准对数函数,$y = \log_3(2x + 5)$ 不是标准对数函数,而是对数函数的类形式.

5. 三角函数

六个三角函数的标准式有:

$$\text{正弦函数 } y = \sin x,\ \text{余弦函数 } y = \cos x;$$

---

〔1〕 独立变量是指系数和指数皆为 1 的变量.

$$正切函数\ y = \tan x,\ 余切函数\ y = \cot x;$$
$$正割函数\ y = \sec x,\ 余割函数\ y = \csc x.$$

标准式要求:① 角变量[1]是一个独立变量;② 系数和指数皆为 1.

三角函数的类形式: $y = \sin[f(x)]$ (余类推).

运算特点:六个三角函数间存在倒数、商、积等关系,它们是同类部分封闭.

例如,函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 不是标准正弦函数,而是正弦函数的类形式; $y = \sin x$ 与 $y = \cot x$ 之积是余弦函数 $\cos x$, $y = \sec x$ 的倒数是 $\sin x$.

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数,常用的四个反三角函数的主值形式的标准式是:

$$反正弦函数\ y = \arcsin x,\ 反余弦函数\ y = \arccos x;$$
$$反正切函数\ y = \arctan x,\ 反余切函数\ y = \operatorname{arccot} x.$$

标准式要求:① 值变量[2]是一个独立变量;② 系数和指数皆为 1.

反三角函数的类形式: $y = \arcsin[f(x)]$ (余类推).

二、简单初等函数

在众多的函数中,有一些仅用基本初等函数经简单的运算就能分析研究,它们在复杂函数中起过渡作用,称为简单初等函数,也称简单函数,是由不同种类的基本初等函数的和、差、积、部分商(倒数封闭)运算形成的函数.

例如,函数 $3x^2 + 2$, $2^x \tan x$, $\frac{\arcsin x}{x^3}$ 等都是简单函数,而 $\frac{4}{\ln x}$ 不是简单函数.

三、复合函数

有些函数的关系比较复杂,表现出函数中"套" 函数,如函数 $y = \ln\cos x$ 中,对数函数与余弦函数之间不是通过四则运算完成的,而是一种较为高级的"运算"(两个函数关系共用一个自变量). 若以它们在内嵌过程中的先后顺序进行剖析,函数 $y = \ln\cos x$ 的变化过程是:当自变量 x 变化时引起 $\cos x$ 的变化,继而经对数关系引起 y 的变化. 在此,$\cos x$ 起双重作用:它是自变量 x 的函数,又是对数函数的自变量,如果将 $\cos x$ 用一个辅助的独立变量 u 表示,则 $y = \ln\cos x$ 可以看作是 $y = \ln u$ 与 $u = \cos x$ "嵌套"在一起. 当然,这个函数的定义域既不完全依赖 $\cos x$,也不完全依赖对数函数,而是两者都有意义的自变量取值集合,即

$$\cos x > 0, x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k \in \mathbb{Z}).$$

事实上,上述函数的变化过程不分先后,是由余弦关系和对数关系同时作用.

1. 复合函数的概念

若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2,值域为 W_2,并且

[1] 三角函数的自变量反映角的变化,因此称为角变量.

[2] 反三角函数的自变量反映三角函数值的变化,因此称为值变量.

$W_2 \subset D_1$，那么对于每个数值 $x \in D_2$，有确定的数值 $u \in W_2$ 与之对应. 由于 $W_2 \subset D_1$，也有 $u \in D_1$，因此有确定的 y 与 u 对应. 这样，对于每一个 $x \in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y = f[\varphi(x)]$，而 u 称为**中间变量**.

例如，函数 $y = e^{\sqrt{x}}$ 可以看成是由 $y = e^u$，$u = x^{\frac{1}{2}}$ 复合而成的.

2. 函数的复合过程

复合函数概念中涉及到的三个函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 和 $y = f[\varphi(x)] = g(x)$，在各自的直角坐标系中皆为一条曲线，如图 0－1－1 所示，对于任意 $x_0 \in D_2$，在图 0－1－1(a)，(b)中的 x 轴上皆有点 x_0；由 $u = \varphi(x)$ 得 u_0，在图 0－1－1(b)，(c)中的 Ou 轴上皆有点 u_0；由 $y = f(u) = g(x)$ 知 $f(u_0) = g(x_0)$，图 0－1－1(a)，(c)中 $x_0B' = u_0B$，变量 x，u 皆跨越两个坐标系使函数相等.

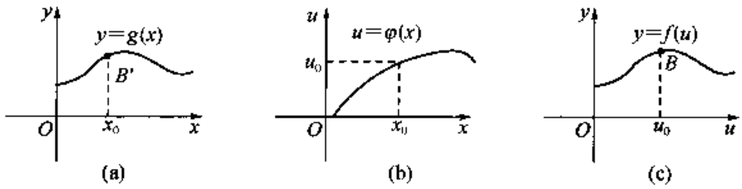

图 0－1－1　复合中的三个函数

上述三个函数是联系在一起的，为能更清楚地研究它们之间的关系，在函数 $y = g(x)$ 所在的直角坐标系 xOy 的后面插入一个(虚)轴 Ou，按右手法则形成“三维直角坐标系”(如图 0－1－2)，复合过程是：对于自变量 x 取 x_0，在 xOu 坐标系中由 $u_0 = \varphi(x_0)$，得点 $A(x_0, u_0)$，把 A 点的值投影到 Ou 轴上得点 u_0；在 uOy 坐标系中又由 $f(u_0) = y_0$，得点 $B(u_0, y_0)$；u_0B 沿折线 u_0A，Ax_0 平移到 xOy 坐标系中 x_0 处成为函数值 $g(x_0)$，得到曲线 $y = f[\varphi(x)] = g(x)$ 上的点 $B'(x_0, y_0)$.

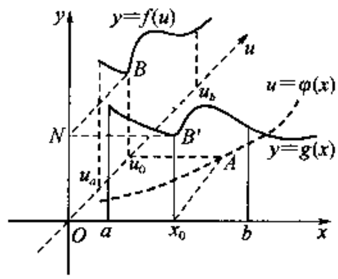

图 0－1－2　函数的复合过程

有一些函数在有意义的前提下，经一定形式的复合可以创造出许多新函数，如，$y = e^u$，$u = 2x + 1$，合成为函数 $y = e^{2x+1}$.

对于给定函数的合成，采用变量代入的方法，依次把中间变量的表达式代入函数中，形成只有一个自变量的复合函数，复合后一定要确定出定义域.

例 0.1.1　把函数 $y = u^2$，$u = \sin v$，$v = 2^x$ 中的 y 表示成 x 的函数.

解　把 $v = 2^x$ 代入 u 中，有 $u = \sin 2^x$，再把计算后的 $u = \sin 2^x$ 代入 y 中，有 $y = (\sin 2^x)^2$，定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$.

通过函数的合成可使函数家族庞大起来，特别是通过合成一些简单函数，能形成较为复杂的函数，但不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 2$，就不能复合成一个复合函数. 虽然能有式子 $y = \arcsin(x^2 + 2)$，但这个函数不存在，因为对于 $u = x^2 + 2$ 的定义域$(-\infty, +\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值，都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

3. 复合函数的分解

在复合函数 $y=f[\varphi(x)]=g(x)$ 的终极表达式 $g(x)$ 中，函数关系 g 较为复杂，给许多问题的研究带来不便，然而它又是两个函数构成的，因此可以把复合函数进行分解. 为以后表述方便，本书把复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 中的 f 称为外层关系，φ 称为内层关系.

分解的要求：分解出的每个函数必须是简单函数，甚至是基本初等函数.

分解的标准：符合基本初等函数的标准式.

分解的过程：从外层到内层依次进行.

例 0.1.2 分解复合函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$.

解 把这个复合函数写成规范式 $y=(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}$，指数是常数，底是一个表达式，是幂函数的类形式，即外层函数关系是幂函数. 按幂函数的标准式要求，底必须是一个独立变量，那么，令 $u=1-x^3$，则有 $y=u^{\frac{1}{2}}$，而 $u=1-x^3$ 是简单函数，不需再分解，这样，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ 分解为 $y=u^{-\frac{1}{2}},u=1-x^3$.

复合函数分解的步骤：

(1) 把复合函数写成严格的数学式子，各个关系用括号区别(根号、分数线等不是严格的形式)；

(2) 分析外层关系的标志，确定函数类型，引进中间变量，写出第一个简单函数；

(3) 分析中间变量与自变量间是否为简单函数，如是简单函数，则分解完成，否则，对中间变量表示的函数式用第二步，第三步的方法继续分解，直至完成；

(4) 写出分解了的简单函数.

例 0.1.3 分解复合函数 $y=\cos^3(2e^x-3)$.

解 把这个函数写成规范式 $y=[\cos(2e^x-3)]^3$，从标志看，外层函数关系是幂函数，这就要求底是一个独立变量，即令 $u=\cos(2e^x-3)$，有 $y=u^3$.

对于 $u=\cos(2e^x-3)$ 的外层关系是余弦函数，要求角变量必须是一个独立变量，即令 $v=2e^x-3$，有 $u=\cos v$，而函数 $v=2e^x-3$ 是简单函数，不需再分解，这样，$y=\cos^3(2e^x-3)$ 分解为 $y=u^3,u=\cos v,v=2e^x-3$.

复合函数的分解是研究复杂函数的基础，是以后实际运算中经常使用的有效方法.

复合次数 一个复合函数若仅由两个简单函数复合而成，称为一次复合，若由三个简单函数复合而成，称为二次复合，以此类推. 例 0.1.1 中的复合函数是一次复合，例 0.1.2 中的复合函数经过了二次复合.

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤以后所构成的函数称为**初等函数**.

例 0.1.4 分解初等函数 $y=(2x-1)e^{\arcsin(\sqrt{x})}$ 成简单函数.

解 分析式中 $2x-1$ 是简单函数，$e^{\arcsin(\sqrt{x})}=e^{\arcsin(x^{\frac{1}{2}})}$ 是复合函数，只对后者加以分解即可.

令 $u=\arcsin(x^{\frac{1}{2}})$，有 $y=(2x-1)e^{u}$，在 $u=\arcsin(x^{\frac{1}{2}})$ 中，令 $v=x^{\frac{1}{2}}$，有 $u=\arcsin v$.

函数 $y=(2x-1)e^{\arcsin(\sqrt{x})}$ 分解为 $y=(2x-1)e^{u}$，$u=\arcsin v$，$v=x^{\frac{1}{2}}$.

初等函数的特征：基本初等函数都是由一个式子表示，它们经有限次四则运算和有限次的函数复合后仍然是一个式子，因而初等函数必是一个式子的函数.

五、分段函数

在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为**分段函数**. 其中，定义域所分成的有限个区间称为分段区间，分段区间的公共端点称为分界点.

如 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$ 为分段函数，$x=1$ 是分界点.

分段函数不是几个函数，而是一个函数，由于各个区间的对应规则不同，必须用多个函数式分开表示. 有些函数虽然表面上是一个函数式，但经分解后是分段函数，如绝对值函数 $f(x)=|x|$，去掉绝对值符号后成为分段函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$. 以后遇到含有绝对值符号的式子，在研究时要先去掉绝对值符号，使其转化为分段函数.

考察自变量的取值范围，就可确定分段函数的定义域. 在计算分段函数的函数值时，应首先观察自变量的取值属于哪个分段区间，然后用该分段区间上的数学表达式来计算函数值.

例 0.1.5 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$，试确定定义域并求 $x=1$ 处的函数值.

解 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 有意义，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，于是 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $f(1)=\sin 1$.

从分段函数的解析式看到，分段函数在各个区间内表现为初等函数，在分界点处，有的解析式与左右区间中的一个一致，有的是孤立的，如例 0.1.5 中的 $x=0$.

分段函数的研究方法：

一般情况下，在各个区间内按初等函数的方法研究，在分界点处，先按孤立点处理，再考虑左右邻近点的情况.

六、常用数学模型举例

1. 面积问题

例 0.1.6 一个下水道的截面是矩形加半圆形（如图 0-1-3），截面积为 A，A 是一常量，此常量取决于预定的排水量. 设截面的周长为 L，底宽为 x，试建立 L 与 x 的函数模型.

解 设矩形高为 h，根据等量关系得到关系式

$$L=x+2h+\frac{1}{2}\pi x. \tag{0-1}$$

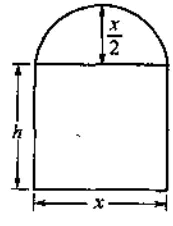

图 0-1-3 排水道剖面图

在关系式(0-1)中有两个变量 x 及 h，应把 L 表示成 x 的函数. 为此，需把变量 h 也表示成与 x 有关的量.

根据题中所给限制条件：截面积为 A，建立 x 与 h 的关系

$$A = xh + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

即
$$h = \frac{A}{x} - \frac{1}{8}\pi x. \tag{0-2}$$

将(0-2)式代入(0-1)式得
$$L = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{2A}{x}(x > 0).$$

此式即为我们所要找的周长 L 与底宽 x 的函数模型.

问题：面积一定，底宽为多少时，周长最小，即材料最省？

2. 数列与级数

例 0.1.7 以正方形的一边及其对角线为两邻边作一个矩形，将这矩形截去一半，得到一个与原矩形相似的新矩形，再将所得矩形截去一半，又得到一个相似的新矩形，如此无限继续. 这些矩形的面积呈何状态？求这些矩形的面积的总和，并说明其几何意义.

解 设正方形的一边为 a，则对角线为 $\sqrt{2}a$. 又设第 n 个矩形的面积为 A_n，则

$$A_1 = \sqrt{2}a^2, A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2, \cdots, A_k = \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}a^2, \cdots.$$

如此无限继续，A_n 成为无穷递缩等比数列.

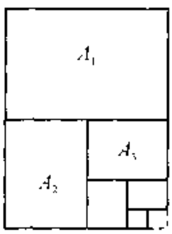

图 0-1-4

上述矩形中，在前一个矩形的长边中点连线截取，其中的一个小矩形就是后一个矩形，各矩形拼合在一起，如图 0-1-4 所示，它们的面积总和等于两个 A_1，设面积总和为 S，则

$$S = \sqrt{2}a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}a^2 + \cdots = 2\sqrt{2}a^2.$$

像上面的和式 $S = \sqrt{2}a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}a^2 + \cdots$ 是由一个无限项数列的各项依次用加号连接起来的表达式，称为**常数项级数**，简称级数. 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

其中，$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 称为级数的项，第 n 项称为级数的一般项或通项.

若级数中的各个项皆是定义于区间 I 上的函数列，则式子

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为在区间 I 上的**函数项级数**，简称级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.