21世纪高等院校基础课规划教材

高等数学学习指导

梅 挺 主 编
贾其锋 张 明 王 霞 叶顺军 等编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与中国水利水电出版社出版、梅挺主编的《高等数学》配套的学习指导书。本书按教材章次对应编写，共7章：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步。每章由基本内容及要求、典型例题、练习及习题解答三部分组成。基本内容及要求部分简要地叙述了该章的基本内容，并有针对性地提出要求；典型例题部分，针对第一部分提出的基本要求列举了典型习题，并进行必要的分析；第三部分对《高等数学》教材的所有练习和习题作了详细的解答。

本书突出了教材内容的针对性和实用性，注重学生基本技能、创新能力和综合应用能力的培养，体现了高等院校高等数学基础教育的特点和要求。本书在选材和编排上着眼于基础训练的强化，突出解题的思路和方法指导，并对解题的步骤和思路进行适当的归纳，以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书内容丰富，语言流畅，通俗易懂，可作为高等院校非数学类专业本科教材使用，也可作为高职高专院校的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 梅挺主编. —北京：中国水利水电出版社，2007

21世纪高等院校基础课规划教材

ISBN 978-7-5084-4916-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 梅… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第131425号

书　　名	高等数学学习指导
主　　编	梅 挺 主 编　贾其锋　张 明　王 霞　叶顺军　等编著
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68331835（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　　格	787mm×1092mm　16开本　15.75印张　382千字
版　　次	2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷
印　　数	0001—4000册
定　　价	24.00元

前　　言

本书是根据高等院校对数学基础知识教育的具体要求，遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”与“必需、够用为度”的原则组织编写的。本书语言精练、内容深入浅出、实例丰富，具有“系统、实用、通俗”的特点。

本书是与中国水利水电出版社出版、梅挺主编的《高等数学》配套的学习指导书。本书由长期在教学第一线从事高等数学教学工作的教师编写，他们结合多年的数学教学经验，源于数学教学特点和工作实际，在写作过程中，以初学者的身份和心理量身编写和安排了本书内容。

主要内容

本书按《高等数学》教材章次对应编写，共 7 章：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步。每章由基本内容及要求、典型例题、练习及习题解答三部分组成。基本内容及要求部分简要地叙述了该章的基本内容，并有针对性地提出要求；典型例题部分，针对第一部分提出的基本要求补充了一些例题，并进行必要的分析；第三部分对《高等数学》教材的所有练习和习题作了详细的解答。

特点和目的

本书的主要特点是针对性强，主要解决学生在学习过程中遇到的实际困难。根据编者多年的教学实践经验，总结多数学生在学习高等数学过程中经常感到困惑和容易出错的内容，本书中通过提出要求和增加典型例题的方式予以提示和强调。

编写本书的主要目的有两方面：一是方便教师授课，教材中的例题数量偏少，难度偏低，典型例题部分的例题相应地作了补充，教师可以根据需要选取例题在课堂上讲解；二是方便学生自学，目前很多学校的高等数学课程大都存在时间紧、任务重的情况，这样高等数学的教学将主要依靠学生的自学，本书是学生自学时必要和有益的参考书和指导书，它有助于学生更全面、深刻地理解高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，也有助于掌握解题方法，提高解题能力。

适用对象

本书语言通俗易懂，内容丰富翔实，重点突出，适合作为高等院校非数学类专业本科教材使用，同时也可作为高职高专院校的教材使用。

编写分工

本书由梅挺主编，贾其锋、张明、王霞、叶顺军等编著。其中第 1 章由叶顺军编写，

第2章由王霞编写，第3、4章由张明编写，第5、6章由贾其锋编写，第7章由梅挺编写。全书由梅挺负责统稿工作，由贾其锋负责审校工作。另外参加本书部分编写工作的还有：邹素琼、赵秋云、赵继军、彭艺、曲辉辉、周章、蒋波、徐留旺、曹振宇、张婷、温凌霜、鲁得翠等，在此一并表示感谢！

为充分展现本书的编写特点，帮助读者深刻理解本书编写意图与内涵，进一步提高对本书教学的使用效果，我们建立本书使用指导联络方式，这将是读者与编者之间交流沟通的直通车，欢迎读者将图书使用过程中的各种问题与探讨、建议反馈给我们，本书编者会竭诚给您答复。我们的E-mail：china_54@tom.com。

由于编者水平有限及时间仓促，书中错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

2007年6月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　基本内容及要求

1.1.1　基本内容

1．函数的概念、性质，基本初等函数及其性质，初等函数.

2．函数极限的概念、性质、运算，两个重要极限公式，无穷小与无穷大.

3．函数连续的概念，间断点的概念和分类，闭区间上连续函数的性质及应用.

1.1.2　要求

1．理解函数的概念，熟悉六种基本初等函数的性质，会求常见函数的定义域.

2．理解函数各种极限的概念，会求常见函数的极限.

3．理解无穷小的概念、性质，能对无穷小进行比较.

4．能对常见函数间断点进行确定和分类.

5．能利用介值定理证明简单命题.

1.2　典型例题

例 1　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求：

（1）$f(x^2)$；　　（2）$f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

解：由已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$，则有

（1）对于 $f(x^2)$，有 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $0\leqslant x\leqslant 1$，因此 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$；

（2）对于 $f(x+a)+f(x-a)$（$a>0$），应有 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 且 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 且 $a\leqslant x\leqslant 1+a$．函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域应是上述两者的公共部分，考虑下述三种情况：

1）当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，函数定义域为空集；

2）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，函数定义域为一个点，即 $x=\dfrac{1}{2}$；

3）当$a<\dfrac{1}{2}$时，函数的定义域为$[a,1-a]$.

例2 已知

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1,\\ 2 & |x|>1.\end{cases}$$

求$f[g(x)]$与$g[f(x)]$.

分析：这是两个分段函数的复合，解题的关键是应抓住中间变量的值域．为便于学习，我们引进u表示中间变量.

解：在求$f[g(x)]$与$g[f(x)]$时，先由

$$u=g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1,\\ 2 & |x|>1.\end{cases}$$

求出u的取值范围：

当$x=-1$时，有$u=g(-1)=2-(-1)^2=1$；当$x=1$时，有$u=g(1)=2-1^2=1$；而当$|x|<1$时，$u=g(x)=2-x^2>1$；

当$|x|>1$时，$u=g(x)=2$，

综上所述，仅当$|x|=1$时，有$u=g(x)=1$，而当$|x|\neq 1$时，皆有$u=g(x)>1$.

另一方面，$f(u)=\begin{cases}1 & |u|\leqslant 1,\\ 0 & |u|>1;\end{cases}$

于是有$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|=1,\\ 0 & |x|\neq 1;\end{cases}$

同样，对于$g[f(x)]$，当$|x|\leqslant 1$时，$u=f(x)=1$，$g(1)=2-u^2\big|_{u=1}=1$；

当$|x|>1$时，$u=f(x)=0$，$g(0)=2$，

所以$g[f(x)]=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 2 & |x|>1.\end{cases}$

例3 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$；

（4）$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m}{n};$$

（2）$\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1;$$

（3）$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left[\frac{x-a}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+1\right]$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+1\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}};$$

（4）$\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3}=-2.$$

小结：在求多项式商的极限时（当 $x\to x_0$），若分子分母的极限都是 0，则不能直接用极限运算法则，可先将分子分母因式分解，消去公因子后，再求极限.

当分子或分母含有根式且极限都是 0 时，可根据情况对其有理化或分解，消去因子后，求极限.

例 4　若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=l$，求 a，l.

解：当 $x\to1$ 时，分母极限为 0，而 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=l$，因此，当 $x\to1$ 时分子的极限应为 0，即

$$\lim_{x\to1}(x^3-ax^2-x+4)=0,$$

即 $4-a=0$，得 $a=4$.

将 $a=4$ 代入原极限中，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-3x-4)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2-3x-4)=-6,$$

因此$l=-6$．于是得$a=4$，$l=-6$．

例 5 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-4x+2}{3x-4x\sqrt{x}+1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$．

解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-4x+2}{3x-4x\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{3}{\sqrt{x}}-4+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}=-\dfrac{1}{4}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}=1.$$

小结：当分子分母的极限都是∞时，可将分子分母同除以分子分母的最大项，然后求极限．特别地，可利用（$a_0\neq0$，$b_0\neq0$）．

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n,\\ 0 & m<n,\\ \infty & m>n\end{cases}$$

的结果求极限．

例 6 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+1})=2$，求$a$，$b$的值．

解：因为

$$\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+1})(5x+\sqrt{ax^2-bx+1})}{(5x+\sqrt{ax^2-bx+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-1}{5x+\sqrt{ax^2-bx+1}}=2,$$

所以上式成立只能$25-a=0$，即$a=25$．

将$a=25$代入原极限中，得

$$\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{25x^2-bx+1})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-1}{5x+\sqrt{25x^2-bx+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b-\frac{1}{x}}{5+\sqrt{25-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{b}{10}=2,$$

得 $b=20$，故 $a=25$，$b=20$.

例 7　求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$；（3）$\lim\limits_{x\to0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2(x+2)-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)}\right]^2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^3}$$
$$=e^2\cdot1=e^2;$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}}\right]^{-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}}}$$
$$=\frac{1}{e}.$$

例 8　研究 $f(x)=\begin{cases}|x-1| & |x|>1,\\ \cos\frac{\pi x}{2} & |x|\leqslant1\end{cases}$ 的连续性.

解：将 $f(x)$ 改写为

$$f(x)=\begin{cases}1-x & x<-1,\\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1 & x>1.\end{cases}$$

在 $(-\infty,-1)$ 内，$f(x)=1-x$ 为初等函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内连续；在 $[-1,1]$ 内，$f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 为初等函数，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续；在 $(1,+\infty)$ 内，$f(x)=x-1$ 为初等函数，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续；下面讨论 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 两点处的连续性.

在点 $x=1$ 处，

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0,$$

由于 $f(1-0)=f(1+0)=0=f(1)$，故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处必连续.

在点 $x=-1$ 处，

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1^-}(1-x)=2,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

由于 $f(-1-0)\neq f(-1+0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处不连续.

综上所述，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上连续.

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(a)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<0$，证明在 $[a,+\infty)$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

分析：只要能找到一点 $x_1>a$，使 $f(x_1)<0$，对 $f(x)$ 在 $[a,x_1]$ 上应用零点定理，便可得到所需结论.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<0$，

故对 $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}>0$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

即

$$-\frac{|A|}{2}+A=A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=A+\frac{|A|}{2}=\frac{A}{2}<0,$$

取实数 $x_1>X$，则 $f(x_1)<0$，而 $f(a)>0$，由零点定理知，在 (a,x_1) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，由于 $(a,x_1)\in[a,+\infty)$，所以在 $[a,+\infty)$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

1.3 练习及习题解答

练习 1-1

1．求下列函数的定义域：

解：（1）$y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

要使原函数有意义，则只需

$$2-x^2\neq 0,\quad \left|\frac{1}{2}x-1\right|\leqslant 1$$

即可，即

$$x\neq\pm\sqrt{2}\quad 0\leqslant x\leqslant 4,$$

所以原函数的定义域为 $[0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},4]$；

（2）$y=\frac{x}{\sin x}$

要使原函数有意义，则只需

$$\sin x\neq 0.$$

即可，即

$$x\neq k\pi\ （k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots）$$

所以原函数的定义域为 $(k\pi,(k+1)\pi)$（$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$）；

（3）$y=\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$

要使原函数有意义，则只需

$$x\neq 0,\quad x^2-4\geqslant 0$$

即可，即

$$x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2,$$

所以原函数的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$；

（4）$y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$

要使原函数有意义，则只需

$$\ln(2+x)\geqslant 0 \text{ 且 } x(x-4)\neq 0$$

即可，即

$$x\geqslant -1 \text{ 且 } x\neq 0,\quad x\neq 4,$$

所以原函数的定义域为 $[-1,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

2．设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

解：（1）$f(\sin x)$

要使 $f(\sin x)$ 有意义，则必须满足下列条件：

$$0\leqslant \sin x\leqslant 1,$$

即 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$），

所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$（$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$）；

（2）$f(\ln x+1)$

要使 $f(\ln x+1)$ 有意义，则必须满足下列条件：

$$0\leqslant \ln x+1\leqslant 1,$$

即

$$e^{-1}\leqslant x\leqslant 1,$$

所以函数 $f(\ln x+1)$ 的定义域为 $[e^{-1},1]$；

（3） $f(x^2)$

要使 $f(x^2)$ 有意义，则必须满足下列条件：

$$0\leqslant x^2\leqslant 1,$$

即

$$-1\leqslant x\leqslant 1,$$

所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$；

（4） $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

要使 $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ 有意义，则必须满足下列条件：

$$\begin{cases}0\leqslant x+\dfrac{1}{3}\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-\dfrac{1}{3}\leqslant 1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

所以函数 $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$.

3．指出下列各函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的：

解：（1） $y=\cos\ \ln^3\sqrt{x^2+1}$

$y=\cos\ \ln^3\sqrt{x^2+1}$ 由 $y=\cos u$， $u=v^3$， $v=\ln\omega$， $\omega=\sqrt{\varphi}$， $\varphi=x^2+1$ 复合而成；

（2） $y=\tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

$y=\tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 由 $y=\tan u$， $u=\sqrt{v}$， $v=\dfrac{1+x}{1-x}$ 复合而成；

（3） $y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$

$y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$ 由 $y=\sqrt{u}$， $u=v^3$， $v=\sin\omega$， $\omega=x+2$ 复合而成；

（4） $y=e^{\arctan(2x+1)}$

$y=e^{\arctan(2x+1)}$ 由 $y=e^u$， $u=\arctan v$， $v=2x+1$ 复合而成.

4．已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解：令 $e^x+1=t$，则 $e^x=t-1$，其中 $t>1$，那么

$$f(e^x+1)=f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1,$$

即

$$f(x)=x^2-x+1\ (x>1).$$

练习 1-2

1．求下列函数的极限：

解：（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{x^2-5x+4}$

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-1)}=\dfrac{0}{1}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{x^2-5x+4}=\infty$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{3};$$

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(2x+1)}=\frac{2}{3};$$

（4）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(x-1)}=\frac{-2}{-2}=1;$$

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}$$

$=1$；

（6）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+13)-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=-\dfrac{1}{16}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{1-x^2}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)}$

$=-\dfrac{1}{2}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2};$$

（9）$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

令$1-x=t$，则

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

$=\lim\limits_{t\to 0}t\tan\dfrac{\pi}{2}(1-t)$

$=\lim\limits_{t\to 0}t\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}t\right)$

$=\lim\limits_{t\to 0}t\cot\dfrac{\pi}{2}t$