普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等院校物理学教材

数学物理方法简明教程

林福民　编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学物理方法简明教程

林福民　编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法简明教程/林福民编. —北京:北京大学出版社,2008.1

ISBN 978-7-301-12161-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. 林… Ⅲ. 数学物理方法—高等学校—教材
Ⅳ. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 072890 号

书　　　　名: 数学物理方法简明教程
著作责任者: 林福民　编
策 划 编 辑: 张　昕
责 任 编 辑: 顾卫宇
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-12161-0/O·0719
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　　址: http://www.pup.cn　电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
印　刷　者: 北京大学印刷厂
经　销　者: 新华书店
890mm×1240mm　A5　8.25 印张　237 千字
2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　　　数: 0001—4000 册
定　　　　价: 15.00 元

内 容 简 介

本书是作者在总结十多年从事数学物理方法教学和研究的基础上编写而成，以适合于应用物理专业本科生的“数学物理方法”课程51～54学时(周学时3)和68～72学时(周学时4)的教学之用。

本书把加强基础知识放在首位，在保留复变函数微积分、两种基本积分变换、几类常用特殊函数、偏微分方程建立和求解等基础知识的前提下，尽可能精简内容，同时确保各部分衔接紧凑，逻辑严谨。选材讲求实用性，特别注重选取有着生动物理背景的例子。

全书内容共分五个知识模块：1. 复变函数论；2. 一维有限区间中波动问题和一维输运问题；3. 二阶线性常微分方程的级数解法和特殊函数；4. 拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程；5. 行波与散射问题、格林函数法和保角变换及其应用(周3学时选读内容，周4学时必修内容)。书末还附有第一至十四章的计算题参考答案和内容丰富的附录，可供学生自学和查阅。

序　言

作者从事数学物理方法课程的教学多年，深感其内容繁多，而课时却太少。为了适应当前压缩基础课学时的教学改革，对该课程的教学内容进行改革势在必行。数学物理方法是一门十分古老的学科，基本理论和方法都已经非常成熟，我很难为其增添什么重要的创新内容。因此，改革的关键问题在于如何选取适当的教学内容，以及如何编排这些教学内容以达到节省授课学时的目的。

本书正是针对上述问题所进行的一项改革尝试，力争达到内容精练、选材实用、结构新颖、逻辑严谨，以满足周学时 3(总学时 51～54)和周学时 4(总学时 68～72)的数学物理方法课程教学之用。其主要特色为：1. 采用了全新的编排结构，使内容衔接更紧凑，条理更清晰，逻辑更严谨。2. 求解偏微分方程部分只介绍一种最行之有效的方法，充分突出了简明易懂的特色。3. 实际问题提出→定解问题建立→求解方法→结果讨论，这几个关键环节一气呵成地讲述，这既有利于培养学生解决实际问题的能力，也有利于提高学生的学习兴趣。

全书共有 17 章内容，对于周学时 3(总学时 51～54)，其中第一至十四章为教学内容，最后 3 章为选读，书中附录只作为查阅和加深理解之用；参考学时分配为第一至六章 20 学时，第七、八章 12 学时，第九至十二章 12 学时，第十三、十四章 7 学时。若作为周学时 4(总学时 68～72)的教学之用，则最后 3 章也是必修内容，其中第十五章授课学时为 5 学时，第十六和第十七章均为 6 学时，总约需 68 授课学时。

作者非常感谢汕头大学数学系林福荣教授先后两次审核和校对书稿，并提出了很多修改建议，也感谢中山大学物理系林琼桂教授为本书提出了不少宝贵意见。另外，本书在申请国家“十一五”规划教材

立项和编辑出版过程中，得到北京大学出版社的鼎立支持，以及北京大学出版社张昕先生和顾卫宇女士的大力协助，作者对此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中出现错漏在所难免，欢迎同行专家批评指正。

作　者

2007 年 8 月

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数和复平面的基本概念

为了扩大实数的范围，引入虚数单位 i，定义 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，这样便出现了形如 $x+\mathrm{i}y$（x,y 均为实数）的数，称为**复数**，通常记为

$$z=x+\mathrm{i}y, \tag{1.1}$$

其中 x 称为复数 z 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}z$；y 称为复数 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}z$.

两个复数无法比较大小；两复数 z_1 和 z_2 相等，意味着 $\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$ 和 $\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$.

定义：复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$. 显然 $\bar{\bar{z}}=z$，所以 z 和 $\bar{z}$ 是一对互为共轭复数的复数.

就像实数可以用数轴上的点表示一样，复数可采用平面直角坐标系中的点表示. 任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应于 Oxy 平面直角坐标系中一个点 (x,y)，反之亦然. 这样，全体复数与 Oxy 平面上所有点构成了一一对应关系，相应的 Oxy 平面称为**复平面**. 其中 x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴.

如图 1.1 所示，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应于复平面上一点 P. 矢量 $\overrightarrow{OP}$ 称为对应于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**复矢量**，复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，记为 $|z|$ 或 ρ，

$$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.2}$$

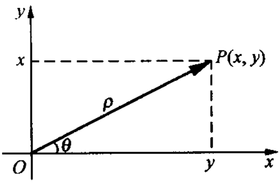


图 1.1 复数与复平面点的一一对应关系示意图

复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的夹角称为复数的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$. 根据图 1.1 可知：

$$\mathrm{Arg}z = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{1.3}$$

上式中 θ 称为复数 z 的**辐角的主值**，记为 $\arg z$. 一般规定辐角的主值范围为：

$$0 \leqslant \arg z < 2\pi \quad 或 \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi. \tag{1.4}$$

复矢量具有一般矢量的特性和运算法则，它在复平面上具有平移不变性，其大小和方向分别由复矢量的模和辐角确定. 复数的模和辐角主值与实部和虚部的关系如下：

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta \quad (\rho = |z|, \theta = \arg z). \tag{1.5}$$

一个复数的模和辐角确定，那么该复数就完全确定. 所以复数也可以采用复数的模和辐角的主值表示. 根据复数的模和辐角主值与实部和虚部的关系式(1.5)，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以表示为 $z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 若再利用著名的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.6}$$

又可以将该复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示为 $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

根据上述讨论可知，复数具有如下三种表示方式：

(i) 代数式 $z=x+\mathrm{i}y$；

(ii) 三角式 $z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

(iii) 指数式 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

复数的加、减、乘、除、乘方运算与实数的运算完全相同，只要注意 $\mathrm{i}^2=-1$. 由于复数辐角的不确定性，复数的开方具有多个根(任何复数的 n 次开方具有 n 个根). 复数辐角增加 2π 的整数倍后，该复数保持不变，但其开方根却已改变. 下面将对复数的各种基本运算分别进行介绍.

(1) 复数的加减法. 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，那么

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2). \tag{1.7}$$

复数加减法也可采用复矢量表示，其加减运算与一般矢量的加减法完全相同，如图 1.2 和图 1.3 所示. 复矢量加减法也称为复数的几何运算法.

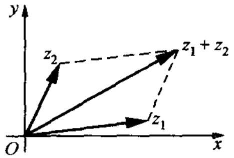


图 1.2　复矢量的加法

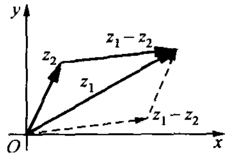


图 1.3　复矢量的减法

(2) 复数的乘除法.　设

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = \rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$

$$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

那么

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_1 - \mathrm{i}y_1) = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2 = \rho_1^2, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (|z_2|^2 \neq 0) \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

(3) 复数的乘方运算.　设 $z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，那么

$$z^n = \rho^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \quad (n \text{ 为自然数}). \tag{1.11}$$

(4) 复数的开方运算. 设 $z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,那么

$$z^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1,\ n\text{ 为自然数}). \tag{1.12}$$

上式中 k 每取一值对应一根,共有 n 个根.

例 1.1 计算复数$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$.

解 $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$,所以

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi/6+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi/6+2k\pi}{3}\right)$$

$$(k=0,1,2).$$

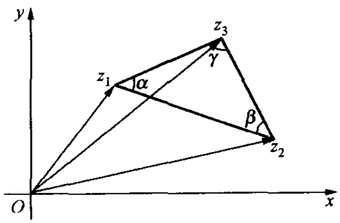
上式中 k 可以取 0,1,2,分别对应如下三个根:

$$z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{18}\right),$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

例 1.2 试利用复数证明三角形的内角和等于 π.



证明 如上图所示,在复平面上画出任意的三角形$\triangle z_1z_2z_3$,其三顶角分别为 α,β,γ,三个顶点对应于复数 z_1,z_2,z_3. 若采用复数辐角的主值表示三个顶角,则可表示为:

$$\alpha=\angle z_2z_1z_3=\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_1)=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\beta=\angle z_1z_2z_3=\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2},$$

$$\gamma = \angle z_1 z_3 z_2 = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

所以

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg\left[\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right] = \arg(-1) = \pi.$$

证毕.

§1.2 复平面区域与边界的定义

实数集对应于数轴上的点集，当把数的范围扩大到复数以后，复数集则对应于复平面上的点集. 下面将介绍有关复平面上点集的一些重要定义，这些定义对以后进一步学习复变函数极限和复变函数微积分非常重要.

定义 1 满足条件 $|z-z_0|<\delta$ 的所有复数的集合称为点 z_0 的 δ **邻域**，记为 $U(z_0,\delta)$，即 $U(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta, z \text{ 为复数}\}$. 满足条件 $0<|z-z_0|<\delta$ 的所有复数的集合称为 z_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\hat{U}(z_0,\delta)$，即 $\hat{U}(z_0,\delta)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta, z \text{ 为复数}\}$.

在复平面上，$U(z_0,\delta)$ 所对应的点集构成一个以点 z_0 为圆心、δ 为半径的圆；$\hat{U}(z_0,\delta)$ 则对应于一个挖去圆心的圆.

定义 2 设 E 为复平面上的点集，若 $z_0\in E$，并且存在 $\delta>0$，使得 $U(z_0,\delta)\subset E$，那么 z_0 称为点集 E 的内点. 全部由内点组成的点集称为**开集**.

定义 3 若 D 是复平面上的开集，并且 D 中任意两点可用一条完全属于 D 的折线连接(连通性)，那么点集 D 称为复平面上的**区域**. 简单地说，区域就是连通的开集.

定义 4 如果某点不属于区域 D，而它的任意小邻域中都含有属于 D 的点，那么该点称为 D 的**边界点**，D 的所有边界点的集合构成 D 的**边界**. 区域 D 和它的边界的并集称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

定义 5 若在区域 D 内作任意闭合曲线，曲线所包围的所有点都属于 D，那么 D 称为**单连通区域**；否则，D 称为**复连通区域**.

直观地说，单连通区域是实心的，而复连通区域是空心的或者有

多个空穴，如图 1.4 和图 1.5 所示.

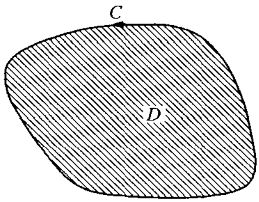


图 1.4 阴影部分为单连通区域

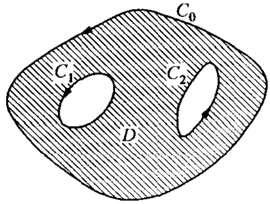


图 1.5 阴影部分为复连通区域

有限的单连通区域具有一条闭合的边界线，而复连通区域一般有多条独立的边界线. **通常规定：若观察者沿边界线走时，区域总保持在观察者的左边，那么观察者的走向为边界线的正向；反之，则称为边界线的负向.**

例如，图 1.4 中区域 D 的边界线为 C，图中标出的方向为区域 D 边界的正向，也即逆时针方向. 图 1.5 中区域 D 的总边界线包括三条独立的闭合曲线 C_0, C_1, C_2，标出的曲线的方向都是逆时针方向，并不都是区域边界线的正向，其中 C_0 是区域的正向边界线，C_1 和 C_2 是区域的负向边界线. 因此图 1.5 中区域 D 的总正向边界线应为 $C=C_0+C_1^-+C_2^-$，式中 C_1^-, C_2^- 的上标“－”表示顺时针方向，与图 1.5 中标出的方向相反. 对于闭合曲线而言，一般采用 C_n 代表逆时针方向，C_n^- 代表顺时针方向，若没有特别说明，本书后续内容中均采用这个规定.

§1.3 初等复变函数

简单地说，在实变函数中，把自变量和因变量的取值范围扩大到复数，便成了复变函数.

复变函数的定义 设 E 为复数集，若对于 E 中的每一个复数 z，按照一定的映射关系，总有唯一的复数 w 与之对应，则称在数集 E 中定义了一个单值的复变函数，简称**单值函数**，记为 $w=f(z), z\in E$. 若对于每一个复数 $z\in E$，总有两个或两个以上的复数 w 与之对

应，则称在 E 中定义了一个多值的复变函数，简称**多值函数**，仍记为 $w=f(z),z\in E$.

变量 z 称为自变量，变量 w 称为因变量；数集 E 称为复变函数的定义域，因变量 w 的所有取值构成的数集 $\{w\mid w=f(z),z\in E\}$ 称为复变函数的值域.

实变函数的定义域和值域通常是数轴上的区间，而复变函数的定义域和值域则通常是复平面上的一个或几个区域.

复变函数的自变量 z 和因变量 w 都是普通的复数，可将其实部和虚部分离，写成标准的代数式. 设 $z=x+\mathrm{i}y,w=u+\mathrm{i}v$，那么 u 和 v 一般是 x 和 y 的二元实变函数，可记为：

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

因此，每一个复变函数实际上都可归结为两个二元实变函数，有关二元实变函数的很多结论、定义和运算法则都可直接移植到复变函数中去.

几类基本初等复变函数的定义和基本特性如下.

(1) 幂函数 $w=z^n$(n 为正整数).

(2) 指数函数 $w=\mathrm{e}^z$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，指数函数 e^z 的实际定义式为

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

(i) 周期性. 因为

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{x+(y+2k\pi)\mathrm{i}}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)\quad (k\text{ 为整数}),\tag{1.13}$$

所以 e^z 具有周期 $2k\pi\mathrm{i}$(k 为整数)，其中 $2\pi\mathrm{i}$ 称为 e^z 的基本周期.

(ii) 可加性. 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}&=\mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1+\mathrm{i}\sin y_1)\cdot\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2+\mathrm{i}\sin y_2)\\&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+\mathrm{i}\sin(y_1+y_2)].\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}.$$

(3) 三角函数 $w=\sin z$ 和 $w=\cos z$.

定义：

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}};\quad \cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.\tag{1.14}$$