2008

全国硕士研究生入学考试用书

考研数学

题型及其变式精析

编著　陈文灯　陈启浩　王莉

- 打破常规，依据题型巧分章节
- 发散思维，多个角度精析变式
- 以点及面，经典试题完全评注

（新）考研数学系列

新华出版社

2008

全国硕士研究生入学考试用书

考研数学

题型及其变式精析

编著　陈文灯　陈启浩　王 莉

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据
考研数学题型及其变式精析/陈文灯等编著
北京:新华出版社,2007.8
全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978-7-5011-8058-5
Ⅰ.考… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 128636 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

考研数学题型及其变式精析

策　　划:白云覃
责任编辑:韩　刚
出版发行:新华出版社
网　　址:http://www.xinhuapub.com
地　　址:北京石景山区京原路 8 号
邮　　编:100040
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:22.5
字　　数:370 千字
版　　次:2007 年 9 月第 1 版
印　　次:2007 年 9 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5011-8058-5
定　　价:36.00 元

本社购书热线:(010)63077122　　中国新闻书店电话:(010)63072012
图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)82570560

前　言

“数学太灵活，太难学了。”因此，不少同学改行报考不考数学的专业。客观地讲，数学的确不那么好学。但是，研究生数学考试不像同学们想象的那么难，那么可怕。很多考高分的同学说：“只要抓住基础，抓住题型的解题方法和技巧，数学是可以考得比较理想的。”要夯实数学基础，最根本的办法就是牢记和深入理解概念、定理和公式，多做题；方法技巧的掌握靠多归纳、多总结，尤其是针对考研常考的题型多下功夫。为了使同学们少花时间、少走弯路，我们编写了此书，相信同学们学过后会有登临绝顶“一览众山小”的感觉。

本书的特点：

精　本书中的题型是从21年的考研题型中精选出来的，分析解答精粹入里。

变　变是数学的特点，要学好数学，就应该在抓数学的变上下功夫。如何掌握住数学的变，了解数学变的方向是关键。本书就告诉你数学常考的题型可能朝哪些方面变，如何在千变万化中抓住它的本质。

本书是一种新的尝试，再兼时间仓促，定有不足或纰漏之处，恳请读者和同学指正。

陈文灯

2007年8月8日

目　录

高等数学部分

线性代数部分

概率论与数理统计部分

高等数学部分

第一章 极限计算

题型一 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限计算

设 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$,则称 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

解题思路 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限计算有以下三种基本方法:

(1) 利用因式分解或有理化约去 $f(x)$、$g(x)$ 中的公共零因子(即极限为零的公因子).

(2) 用等价无穷小代替 $f(x)$ 或 $g(x)$. $x\to 0$ 时,常用的等价无穷小有

$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,e^x-1\sim x,$

$\ln(1+x)\sim x,(1+x)^a-1\sim \alpha x(a\neq 0),1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$

当 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的表达式比较复杂时,需利用函数的泰勒公式寻找它的等价无穷小.

(3) 利用洛必达法则.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x du\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt}{x(1-\cos x)}$.

【分析】 本题是 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限. 先将分母用等价无穷小代替,然后应用洛必达法则.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x du\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x du\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^3}$(由于 $x\to 0$ 时,

$x(1-\cos)\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$)

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{\frac{3}{2}x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{3x}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\arctan(1+x^2)=\frac{\pi}{6}.$$

【评注】 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x du\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^3}$与$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{\frac{3}{2}x^2}$的分子都是积分上限的函数，故必须使用洛必达法则计算.

【例 2】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{x^3(1-\cos\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}$.

【分析】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{x^3(1-\cos\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x}}{(1-\cos\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}$，所以所给极限是$\dfrac{0}{0}$型未定式. 令$t=\dfrac{1}{x}$，将所给极限转换成$t\to0$时的极限.

【详解】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{x^3(1-\cos\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x}}{(1-\cos\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t+t^3\cos t}{(1-\cos t)\ln(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t+t^3\cos t}{\frac{1}{2}t^3}\text{（由于 } t\to0\text{ 时，}(1+\cos t)\ln(1+t)\sim\frac{1}{2}t^2\cdot t=\frac{1}{2}t^3\text{）}$$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}+2\lim_{t\to0}\cos t=2\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}+2\xlongequal{\text{洛必达法则}}2\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}+2$$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2}+2=\frac{7}{3}.$$

【评注】 题解中有两点值得注意：

(1) 由于$x\to\infty$，所以令$t=\dfrac{1}{x}$转化为计算$t\to0$时的极限.

(2) 将$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t+t^3\cos t}{\frac{1}{2}t^3}$分成两项之和$2\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}+2\lim\limits_{t\to0}\cos t$，然后对第一项应用洛必达法则.

【例3】 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$.

【分析】 应用洛必达法则计算所给极限.

【详解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2 f(x)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^2)\cdot 2x}{3f(x)+xf'(x)}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^2)}{3\dfrac{f(x)}{x}+f'(x)}=4\cdot\frac{f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1.$$

【评注】 题解中有两点值得注意：

(1) 由题设可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\neq 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x^2)\cdot 2x}{3f(x)+xf'(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，但不能应用洛必达法则计算，主是因为 $f''(x)$ 未必存在.

相关变式 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限计算是常见的考题，它还常与其他知识点相结合出现在各类问题中.

变式1 出现在其他未定式极限计算中.

未定式极限除 $\dfrac{0}{0}$ 型外，还有 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，0^0 型，1^∞ 型和 ∞^0 型等六种，往往它们都是转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式计算.

【练习1】 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan^3 x}$.

【分析】 所给极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限，将它转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限后再计算.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot 3x}{\cot x}$（$\dfrac{0}{0}$ 型未定式）

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\dfrac{3}{\sin^2 3x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}=3.$$

【评注】 一般说来，$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限的计算方法，除转化为$\frac{0}{0}$后再行计算外，往往利用$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的洛必达法则计算. 例如，对于$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$可以用洛必达法则计算如下：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sec^2 7x\cdot 7}{\tan 7x}}{\frac{\sec^2 2x\cdot 2}{\tan 2x}}=\frac{7}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}=\frac{7}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{7x}=1.$$

【练习 2】 求极限$\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

【分析】 所给极限为$0\cdot\infty$型未定式极限，将它转化为$\frac{0}{0}$型未定式极限后再行计算.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi}{2}x}$（$\frac{0}{0}$型未定式极限）

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}.$$

【评注】 $0\cdot\infty$型未定式极限，也可以转化为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限后再行计算. 例如本题也可计算如下：

$$\lim_{x\to 1^+}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to 1^+}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{1-x}}\ (\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式极限})$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{(1-x)^2}}\xlongequal{\text{令 }t=1-x}\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{(\frac{\pi}{2}t)^2}=\frac{2}{\pi}.$$

【练习 3】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$.

【分析】 所给极限是$\infty-\infty$型未定式. 利用通分将它转化为$\frac{0}{0}$型未定式极限.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\cos^2 x\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}\left(\frac{0}{0}\text{ 型未定式极限}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

【评注】 对 $\infty-\infty$ 型未定式极限，总是利用通分、根式有理化或倒数变换 $t=\frac{1}{x}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

【练习 4】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

【分析】 所给极限是 1^∞ 型未定式极限，利用幂指函数转化成指数函数方法，将所给极限转化为计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

【详解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$，并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

【评注】 应熟练记住换底公式 $A^B=\mathrm{e}^{B\ln A}$.

【练习 5】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$.

【分析】 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=1$，所以，所给的极限是 0^0 型未定式极限，利用幂指函数化为指数函数将所给极限转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

【详解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x}$，并且

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{\frac{1}{\ln x}}\left(\frac{0}{0}\text{ 型未定式极限}\right).$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型未定式极限}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to0^+}x\ln x=0\text{，所以，}\lim_{x\to0^+}x^{x^x-1}=1.$$

【评注】 对 0^0，1^∞ 和 ∞^0 型未定式极限，总是用幂指函数化为指数函数的方法，转化为 $\frac{0}{0}$ 型(有时也转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限).

在各类未定式极限计算中，洛必达法则是常用的. 但是它不是万能的，有时也会失效。例如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，但不能由洛必达法则得出它的极限为 0，同样，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，但也不能由洛必达法则得出它的极限不存在.

变式 2　出现在函数连续性和可导性问题中.

【练习 6】 设函数 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq0,\\ c, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定常数 c，使 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；

(2) 讨论 $F'(x)$ 的连续性.

【分析】 (1) 使 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，只要 $c=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$ ($\frac{0}{0}$ 型未定式极限).

(2) 由 $F'(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}\right]$ 及 $F(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 讨论 $F'(x)$ 的连续性.

【详解】 (1) 使 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，

$$c=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{1}{2}f(0)=0.$$

(2) $x\neq0$ 时，由 $F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}\right]=\dfrac{x^3f(x)-2x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}$ 知 $F'(x)$ 在 $x\neq0$ 处连续；

由于 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}$（$\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限）

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\frac{1}{3}f'(0)=0, \qquad ①$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}\right]=f'(0)-\dfrac{2}{3}f'(0)$（见 ① 的计算）

$$=0=F'(0),$$

即 $F'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 因此 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

【评注】 本题的核心是计算 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}$.

【练习 7】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0,\\ a+bx, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 问 a,b 取何值时，可使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

【分析】 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，必有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，a,b 应满足 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0),\\ f'_-(0)=f'_+(0).\end{cases}$ 解此方程组即得 a,b 的值.

【详解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$ 得 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}\text{（由此也得到 } f(0)=\frac{1}{2}\text{）}.$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 得

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}+bx-\dfrac{1}{2}}{x},$$

所以，$b=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-2\sqrt{1-x}-x}{2x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{4x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{4x\sqrt{1-x}}$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{4x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x}{4x}=\frac{1}{8}.$$

于是，当 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

【评注】 本题计算中，出现两个 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} \text{和} \lim_{x\to 0}\frac{2-2\sqrt{1-x}-x}{2x^2}.$$

变式 3 出现在无穷小比较中.

【练习 8】 试将 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t, \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t, \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小.

【分析】 由于 $t\to 0^+$ 时，$\cos t^2\to 1, \tan\sqrt{t}\sim\sqrt{t}, \sin t^3\sim t^3$，所以粗略估计，$x\to 0^+$ 时 $\alpha\sim x, \beta\sim\int_0^{x^2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}x^3, \gamma\sim\int_0^{\sqrt{x}}t^3\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}x^2$.

【详解】 如果以上分析得到确认即可得到三个无穷小量的一个正确排序.

$$\text{由于}\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\cos x^2=1,\text{所以}\ \alpha\sim x\ (x\to 0^+).$$

$$\text{由于}\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}=\frac{2}{3},$$

所以 $\beta\sim\frac{2}{3}x^3$.

$$\text{由于}\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{-\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4},$$

所以 $\gamma\sim\frac{1}{4}x^2$.

由此可知，正确排序为 α,γ,β.

【评论】 要得正确排序，实际上只要确定 α,β,γ 关于 x 的阶数，即计算三个 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x}, \lim_{x\to 0}\frac{\beta}{x^3}, \lim_{x\to 0}\frac{r}{x^2}$.

【练习 9】 当 $x\to 1$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 是 $x-1$ 的多少阶无穷小？

【分析】 利用等价无穷小即可以算出 $x\to 1$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 关于 $x-1$ 的

阶数.

【详解】 因为$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x=\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]$,而且$x\to1$时,$\sqrt{3x+1}\to2$,$\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]\sim(x-1)^{\frac{3}{2}}$,所以有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}=2.$$

因此,$x\to1$时,$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$,是$x-1$的$\frac{3}{2}$阶无穷小.

> **【评注】** 注意$x\to1$时$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$与$(x-1)^{\frac{3}{2}}$是同阶无穷小,而不是等价无穷小.

【练习10】 求$x\to0$时$e^x-e^{\sin x}$是x的多少阶无穷小?

【分析】 先证明$x\to0$时$e^x-e^{\sin x}$与$x-\sin x$是等价无穷小,然后计算$x\to0$时$x-\sin x$关于x的阶数.

【详解】 记$f(x)=e^x$则由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}e^x-e^{\sin x}&=f(x)-f(\sin x)=f'(\xi)(x-\sin x)(\xi\text{是介于}x\text{与}\sin x\text{之间的实数})\\&=e^{\xi}(x-\sin x)\to x-\sin x(\text{由于}x\to0\text{时},\xi\to0)\end{aligned}$$

由此可知,$x\to0$时,$e^x-e^{\sin x}\sim x-\sin x$.

此外,由$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$知$x-\sin x$是$x$的3阶无穷小,因此,$x\to0$时,$e^x-e^{\sin x}$是$x$的3阶无穷小.

> **【评注】** 我们知道,$x\to0$时,$e^x-1\sim x$,$e^{\sin x}-1\sim\sin x$,但不能由此推导
> $$e^x-e^{\sin x}=(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)\sim x-\sin x.$$

> **变式4** 已知$\frac{0}{0}$型未定式极限时,确定其中的未知常数及与其中未知函数有关的极限.

【练习11】 试确定常数A、B、C的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中$o(x^3)$是当$x\to0$时比$x^3$高阶的无穷小.

【分析】 由题设知$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)}{x^3}=0$,写出分子的麦克劳林公式即可求得$A$、$B$、$C$之值.

【详解】 由于$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,

所以

$$
\begin{aligned}
&e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)\\
&=[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)](1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)\\
&=[1+(B+1)x+(B+C+\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{2}B+C+\frac{1}{6})x^3+o(x^3)]-(1+Ax)\\
&=(-A+B+1)x+(B+C+\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{2}B+C+\frac{1}{6})x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

因此，由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)}{x^3}=0$得方程组

$$
\begin{cases}
-A+B=-1,\\
B+C=-\dfrac{1}{2},\\
\dfrac{1}{2}B+C=-\dfrac{1}{6}.
\end{cases}
$$

解此方程组得　$A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}$.

【评注】 本题也可用以下方法计算 A、B、C：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A}{3x^2}. \quad ①$$

由此可知，$\lim\limits_{x\to 0}\{e^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A\}=0$，即

$$1+B-A=0 \quad ②$$

将 ② 代入 ① 得

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[A+(B+2C)x+Cx^2]-A}{3x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x[(A+B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]}{6x} \quad ③$$

由此可知，$\lim\limits_{x\to 0}e^x[(A+B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]=0$，即

$$A+B+2C=0. \quad ④$$

将 ④ 代入 ③ 得

$$0=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}e^x[(B+4C)+Cx]，即\ B+4C=0. \quad ⑤$$

由 ②④⑤ 得　$A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}$.

【练习 12】 确定常数 a,b,c,使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq 0$.

【分 析】 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$. 由此可得 $b=0$. 于是对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}$($\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限)使用洛必达法则即可得到 a 与 b 的值.

【详解】 如果 $b\neq 0$,则当 $b<0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=\int_b^0 \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t>0$;当 $b>0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t<0$. 这都与 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$ 矛盾. 所以 $b=0$. 因此

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}. \qquad ①$$

于是,由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=0$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$,即 $a=1$. 将它代入①得

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

> 【评注】 本题获解的关键是由题设推出 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$,并由此推出 $b=0$.

【练习 13】 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$,求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【分析】 本题是已知 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限的条件下,计算未知函数的极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【详解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{3x}-1)=0$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1]=0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$,于是 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$(由于 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\sin 2x$,$\mathrm{e}^{3x}-1\sim 3x$)

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right]. \qquad ①$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1\neq 0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在. 于是由①得

$2=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot 1$,即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

【评注】 应当注意：当$\lim\limits_{x\to 0}h(x)$和$\lim\limits_{x\to a}g(x)h(x)$都存在时，未必有$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在. 但是当$\lim\limits_{x\to a}h(x)$存在且不为零和$\lim\limits_{x\to a}g(x)h(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在.

【练习 14】 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$，求

(1) $f(0), f'(0), f''(0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}]$.

【分析】 题设中 $f(x)$ 只知其在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导及$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$，但未知 $f(x)$ 的表达式. 因此本题的求解从已知 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$ 入手.

【详解】 (1) 由于

$$\sin 3x+xf(x)=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+0(x^3)+x[f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)]$$

$$=[3+f(0)]x+f'(0)x^2+[\frac{1}{2}f''(0)-\frac{9}{2}]x^3+o(x^3),$$

所以由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+[\frac{1}{2}f''(0)-\frac{9}{2}]x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

得 $\begin{cases}3+f(0)=0,\\ f'(0)=0,\\ \frac{1}{2}f''(0)-\frac{9}{2}=0,\end{cases}$ 即 $f(0)=-3, f'(0)=0\quad f''(0)=9.$

(2) 由(1) 的计算知

$$\lim_{x\to 0}[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}]=\lim_{x\to 0}\frac{3+[f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)]}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{9}{2}.$$

【评注】 由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个领域内二阶可导，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有二阶泰勒公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)x^2+o(x^2)$$