JINDAI SHIYONG DUOYUAN TONGJI FENXI

近代实用多元统计分析

吴诚鸥　秦伟良等　编著

气象出版社
China Meteorological Press

近代实用多元统计分析

吴诚鸥 秦伟良 等 编著

气象出版社

内容简介

本书是多元统计分析的入门教科书，共分10章。主要介绍了多元统计分析的基本知识和基本方法，包括多元方差分析、回归分析、主成分分析(PCA)、经验正交函数分解(EOF)、因子分析、判别分析、典型相关分析(CCA)、聚类分析、属性数据分析。本书介绍了回归诊断、岭回归、主成分回归、LOGISTIC回归、LAD回归、经验正交函数、主成分分析在聚类中的应用、属性数据分析等较新内容。介绍各知识点时，采用由实际例子引入数学概念、再通过例子介绍数学模型和理论、然后介绍用电脑软件求解方法、最后介绍分析电脑输出信息的方法，便于读者掌握。本书可作为经济、保险、气象、环境科学、地质、农业、生物、心理、管理、化工、信息、医药等专业硕士生教材，也可作为上述领域科技工作人员的工具书。

图书在版编目(CIP)数据

近代实用多元统计分析/吴诚鸥，秦伟良等编著．—北京：气象出版社，2007.8

ISBN 978-7-5029-4363-9

Ⅰ．近…　Ⅱ．①吴…②秦…　Ⅲ．多元分析：统计分析　Ⅳ．0212.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第135315号

出版者：气象出版社　　**地　址**：北京市海淀区中关村南大街46号

网　址：http://cmp.cma.gov.cn　　**邮　编**：100081

E-mail：qxcbs@263.net　　**电　话**：总编室：010-68407112

发行部：010-68409198

责任编辑：俞卫平　李太宇　　**终　审**：纪乃晋

封面设计：阳光图文工作室　　**版式设计**：王丽梅

责任校对：王丽梅

印刷者：北京市昌平环球印刷厂

发行者：气象出版社

开　本：787×960　1/16　**印　张**：20　**字　数**：400千字

版　次：2007年8月第一版　2007年8月第一次印刷

印　数：1～2000

定　价：40.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等，请与本社发行部联系调换。

前　言

多元统计分析在自然科学和社会科学(诸如经济学、心理学、管理、保险、生物学、医药、农业、气象、地质、化工等学科)中广泛应用。多元统计的内容也在不断发展,需要不断更新。我们根据多年的教学科研经验,编写了这本教材,其目的是提供一本数学起点低(仅仅是非数学系本专科的概率论和线性代数知识)、实用性强,内容先进的教材,让学生学习后既能掌握多元统计的基础知识和基本方法,又能掌握较新的多元统计工具,特别是要求做到即学即用,“立竿见影”。

由于学时有限,教学中不可能全部讲授本书所有章节,因此,本书尽可能写得浅显易懂,利于学生在学习部分章节的基础上自学其他章节。

为了便于使用,本书尽量避免引进较深的数学知识,一般只简单介绍定理的证明,较复杂的定理证明略去。在介绍方法上,由实际例子引入数学概念、再通过例子介绍数学模型和理论、然后介绍用电脑软件求解方法、最后介绍如何分析电脑输出的信息,易于学生掌握,并且强调多元统计分析的数学模型,便于理解。

当前多元分析方法及其应用正在迅速发展,本书适量介绍较新的内容:回归诊断、岭回归、主成分回归、LOGISTIC 回归、LAD 回归、经验正交函数,主成分得分的应用、主成分分析在聚类中的应用,典型判别、属性数据分析等。

当前,计算机软件发展异常迅猛,不再需要处处用 C 语言、FORTRAN 语言或其他语言编写程序了。由于多元统计方法计算量一般很大,学生用 C 语言、FORTRAN语言编写多元分析程序也很困难,学生往往把主要精力用于编程计算,没有力量分析计算的结果,这就达不到学习多元统计的目的。为了让学生学了就能算,把主要精力从编程计算中解放出来,本书介绍用大规模集成软件 SAS 和 SPSS 实施多元统计分析的方法:编写 SAS 程序、使用 SPSS 菜单实施多元分析、解释电脑输出的信息。SAS 程序与分析写在正文里,SPSS 菜单式方法附在正文后(SAS 也可用菜单实现多元统计,其方法类似 SPSS 菜单方法,为节省篇幅不再介绍)。有了这些软件的帮助,学生就能把精力用在“刀口”上,真正使用多元统计分析方法。当然学生也可以使用其他软件,诸如 SPLUS 等。

为了让学生会用多元统计方法,本书较多地介绍了一些实例,从而说明多元统计方法的使用范围,计算原理,编程计算,计算结果的分析方法。书中还配备了较多

的习题、习题附答案，以便学生通过实例进一步训练。

限于篇幅，本书所介绍多元统计分析方法和软件的使用都是初步的，想进一步学习多元统计分析方法的学生可在参考文献中选取适合自己的书籍和文献。

本书可作为经济、保险、管理、气象、环境科学、地质、农业、生物、心理、医药等专业硕士生教材，也可作为从事这些方面工作科技工作人员的工具书。

本书由吴诚鸥编写第1、4、5、6章和附录1；张斌编写第2章；吕红编写第3章；秦伟良编写第7、8章；董英华编写第9章；来鹏编写第10章和附录2。东南大学朱道元教授，上海师范大学岳荣先教授参加了本书早期工作。

本书例题和习题的数据及程序（包括答案）已做成光盘，读者如有需要，请与作者联系。

通信地址：南京市盘城镇、南京信息工程大学数理学院。

邮编：210044　　　电话：025-58731160

E-mail：wuchengou@nuist.edu.cn

由于水平所限，本书中一定存在错误和不足之处，欢迎广大读者指正。

谨以此书纪念张尧庭教授。

作　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章 矩阵知识补充

矩阵是多元统计分析的基本工具。考虑读者已学过线性代数，本章补充一些必不可少的矩阵知识，作为多元统计分析的基础。未学过线性代数的读者，可以先自学一本线性代数的书，再阅读本章。

1.1 矩阵的谱分解

定理 1.1 （矩阵的谱分解）设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和相应的单位特征向量是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$，其中 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 两两正交；则

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}'_k \tag{1.1}$$

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称，存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T\Lambda T}'$，其中

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_k]$$

是以 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 为元素的分块矩阵；

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_k]$$

是对角阵，对角线上元素为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$。于是

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_k]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}'_1\\ \boldsymbol{e}'_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{e}'_k\end{bmatrix}$$

根据分块矩阵乘法原理，$\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}'_k$。

定义 1.1 （1.1）式称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。当特征值无重根时，单位特征向量在不计正负号条件下是唯一的，即同一个矩阵只有同一形式的谱分解。

当特征值有重根时，由于单位特征向量不唯一，同一个矩阵可以有不同形式的谱分解。

例 1.1

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

的特征值和相应的单位特征向量是

$$1,4,-2,\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=1\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]+4\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\left[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]+$$

$$(-2)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$$

例 1.2 （谱分解形式不唯一）若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4,4 相应的特征向量是

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{bmatrix}$$

其中 α 是任意常数。$\boldsymbol{A}$ 的谱分解就可以是

$$\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1+4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_2$$

容易证明，当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 全不为零时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\lambda_1^{-1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1+\cdots+\lambda_k^{-1}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}'_k$。

1.2 矩阵开平方与比较

定义 1.2 （半正定矩阵）设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，对任何实向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵。

容易看出，正定矩阵也是半正定矩阵，且有

定理 1.2　正定矩阵的特征值必为正实数。半正定矩阵的特征值必为非负实数。

定义 1.3　(半正定矩阵的算术平方根)：设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵，它的谱分解是 $\boldsymbol{A}=\lambda_1 e_1 e'_1+\cdots+\lambda_k e_k e'_k$，则

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\lambda_1^{\frac{1}{2}} e_1 e'_1+\cdots+\lambda_k^{\frac{1}{2}} e_k e'_k \tag{1.2}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的算术平方根，简称为 $\boldsymbol{A}$ 的平方根。

显然，当特征根无重根时，半正定矩阵谱分解形式上唯一，从而矩阵的平方根是唯一的。当特征根有重根时，学者可以自证：半正定矩阵谱分解形式上不一定唯一，但这时矩阵的平方根是唯一的。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1+4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_2$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$$

这时

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1+2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

与 α 无关。

例 1.3

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}13 & -4 & 2\\-4 & 13 & -2\\2 & -2 & 10\end{bmatrix}$$

的特征值和相应的单位特征向量是

$$9,9,18,\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

所以

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$A^{\frac{1}{2}}=3\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]+3\begin{bmatrix}-\frac{1}{18}\\ \frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}\left[-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}}\right]+$$

$$\sqrt{18}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\left[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{5+4\sqrt{2}}{3} & \frac{4-4\sqrt{2}}{3} & \frac{-2+2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{4-4\sqrt{2}}{3} & \frac{5+4\sqrt{2}}{3} & \frac{2-2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{-2+2\sqrt{2}}{3} & \frac{2-2\sqrt{2}}{3} & \frac{8+\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}$$

定理 1.3 $A^{\frac{1}{2}}$ 是半正定矩阵且 $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=A$。

证明 由(1.2)可见 $A^{\frac{1}{2}}$ 是半正定阵;(1.2)两边平方,左边是 $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$,由特征向量的正交性,右边是

$$(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}e_1e'_1+\cdots+\lambda_k^{-\frac{1}{2}}e_ke'_k)(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}e_1e'_1+\cdots+\lambda_k^{-\frac{1}{2}}e_ke'_k)$$
$$=(\lambda_1^{-1}e_1e'_1+\cdots+\lambda_k^{-1}e_ke'_k)=A$$

从而命题得证。

一般矩阵是不能比较大小的,但是对于半正定矩阵,在一定条件下,可以比较。

定义 1.4 设 A,B 都是半正定矩阵,且 $A-B$ 半正定,则称 $A\geqslant B$。

由半正定定义容易证明,当 $A\geqslant B$ 时,A 对角线上元素全大于 B 对角线上相应元素,例如

$$\begin{bmatrix}3&3\\3&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$$

是正定阵,

所以

$$\begin{bmatrix}3&3\\3&8\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$$

这时 3≥1,8≥4。

1.3 矩阵的迹

定义 1.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵,其对角线上元素之和 $\sum a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$。

定理 1.4　(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵,c,d 是常数,则 $\mathrm{tr}(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{B})=c\times\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+d\times\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$,

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阵,则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称的 $n\times n$ 矩阵,其特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3,\cdots,n)$,则

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$,

(4) $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^k]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k\quad k\in N$,

(5) $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^{-1}]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}\quad k\in N$(若 $\boldsymbol{A}$ 非奇异)。

证明　(1),(2) 可直接由迹的定义验证。

(3) 因为存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}']=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$$

(4) 因为 $\boldsymbol{\Lambda}^k=(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\cdots(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}$,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^k)=\mathrm{tr}[\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}']=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)$$

(5) 因为 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}$,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})=\mathrm{tr}[\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}']=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})$$

1.4 矩阵微商

矩阵微商内容较多,根据需要,仅介绍如下定理。

定理 1.5　设 λ,μ 是常数,$\boldsymbol{a}$ 是 n 维常数向量,$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶常数矩阵,$\boldsymbol{\beta}_i$ 是自变量,记自变量向量

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$f(\boldsymbol{\beta})$ 是 n 元函数;记梯度

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} f \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} f \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_n} f \end{bmatrix}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f_1 + \mu \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{A} \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}') \boldsymbol{\beta}$$

证明

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1}(\lambda f_1 + \mu f_2) \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2}(\lambda f_1 + \mu f_2) \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_n}(\lambda f_1 + \mu f_2) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} f_1 \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_n} f_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} f_2 \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_n} f_2 \end{bmatrix} = \lambda \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f_1 + \mu \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f_2$$

其余各式同样得证。

1.5 分块矩阵的逆

定理 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都是对称的,且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的逆都存在,则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}' & -\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{-1} \\ -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}' & \boldsymbol{G}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。

证明　经化简，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^{-1}+FG^{-1}F' & -FG^{-1} \\ -G^{-1}F' & G^{-1} \end{bmatrix} = I$$

1.6　有关矩阵不等式

下列矩阵不等式和极值定理可导出多元统计的极值定理。

定理 1.7　（二次型极值）设 B 是 p 阶正定矩阵，其特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$，对应的彼此正交单位向量是 $e_1, e_2, \cdots, e_p$，则对一切 p 维向量 x

$$\max_{x \neq 0} \frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_1, \quad \min_{x \neq 0} \frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_p$$

且

$$\frac{e'_1 Be_1}{e'_1 e_1} = \lambda_1,$$

$$\frac{e'_p Be_p}{e'_p e_p} = \lambda_p。$$

证明　因为 B 实对称，存在正交阵 T，使得 $B = T\Lambda T'$，其中

$$T = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_p]$$

是以 $e_1, \cdots, e_p$ 为元素的分块矩阵；

$$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_p]$$

是对角阵，对角线上元素为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$。令 $y = T'x$，则

$$\frac{x'Bx}{x'x} = \frac{(Ty)'B(Ty)}{y'y} = \frac{y'\Lambda y}{y'y} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{p} y_i^2} \leqslant \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{p} y_i^2}{\sum_{i=1}^{p} y_i^2}$$

当 $x = e_1$ 时，由矩阵谱分解

$$\frac{e'_1 Be_1}{e'_1 e_1} = e'_1 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i e'_i \right) e_1 = \lambda_1$$

定理的其余部分类似可证，留为作业。

习　题　一

1. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解和算术平方根。

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

用 SAS 软件求 A 的谱分解，把特征值从大到小排序，指出最大，第 2 大特征值对应的单位特征向量，并求 $\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}$。

3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$。

4. 设

$$f(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+6x_1x_2-8x_1x_3+10x_2x_3-3x_1+5x_2-7x_3$$

用矩阵微商公式求 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}f$。

5. 证明　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

第 2 章　多元正态分布

多元正态分布是一元正态分布向多元的自然推广。多元正态分布是多元分析的基础,多元分析的许多理论都是建立在多元正态总体基础上的。虽然实际的数据不一定恰好是多元正态的,但是正态分布常常是真实的总体分布的一种有效的近似。所以研究多元正态分布在理论上或实际上都有重大意义。限于篇幅,本章仅简介多元正态简单理论,细节可参看王学民(2004),张尧庭(2002),余锦华(2005),Richard(2003),朱道元(1999)等。

现实世界的许多问题都可以纳入正态理论的范围内,正态分布可以作为许多统计量的近似的抽样分布。

2.1　随机向量

2.1.1　随机向量

定义 2.1.1　称每个分量都是随机变量的向量为随机向量。

类似地,所有元素都是随机变量的矩阵称为随机矩阵。

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)'$ 是 $p \times 1$ 随机向量,其概率分布函数定义为:

$F(x_1, \cdots, x_p) = P\{X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_p \leqslant x_p\}$, $x_1, \cdots, x_p$ 为任意实数

多元分布函数 $F(x_1, \cdots, x_p)$ 有如下性质:

(1)$0 \leqslant F(x_1, \cdots, x_p) \leqslant 1$;

(2)$F(x_1, \cdots, x_p)$ 是每个变量 $x_i, i = 1, 2, \cdots, p$ 的非降右连续函数;

(3)$F(\infty, \cdots, \infty) = 1$;

(4)$F(-\infty, x_2, \cdots, x_p) = F(x_1, -\infty, \cdots, x_p) = \cdots = F(x_1, \cdots, -\infty) = 0$。

多元分布和一元分布一样也分为离散型和连续型。连续型随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)'$ 的分布函数可以表示为:

$$F(x_1, \cdots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f(t_1, \cdots, t_p) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p, (x_1, \cdots, x_p) \in R^p \qquad (2.1)$$

称 $f(x_1, \cdots, x_p)$ 是 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)'$ 的多元联合概率密度,简称多元概率密度或多

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com