



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

数字物理教学典型案例

李元杰 主 编



4



高等教育出版社

04/326

2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

数字物理教学典型案例

李元杰 主 编

刘 艺 钟菊花 王祖源 副主编

高等教育出版社

内容提要

本书提供了作者在多年的数字化教学中总结形成的 18 个数字物理教学的专题案例,覆盖了力学、相对论、热力学与统计物理学、电磁学、波动光学、量子论和非线性物理学等七个部分,还提供了作者多年开展数字化物理教学的教学研究成果的总结论述,充分体现了“老师讲得少,学生学得多”和“以教为导,以学为主”的教学理念和数字化教学模式的特色。本书是高等学校理工科学生学习大学物理基础课程的非常有益的参考书,也是教师开展研究式教学,培养学生创新思维能力的重要参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字物理教学典型案例/李元杰主编. —北京:高等教育出版社,2008.1

ISBN 978-7-04-022667-6

I. 数… II. 李… III. 数字技术-应用-物理学-教案(教育)-高等学校 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190090 号

策划编辑 刘 伟 责任编辑 张海雁 封面设计 王 睢 责任绘图 尹 莉
版式设计 王艳红 责任校对 王效珍 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京北苑印刷有限责任公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 11.75
字 数 280 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008 年 1 月第 1 版
印 次 2008 年 1 月第 1 次印刷
定 价 18.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 22667-00

前 言

数字化技术给大学物理创新教育与研究式学习带来新的教学思想与方法,基于基础知识的拓展与转移就是其中重要的代表,其教学目标是完成知识的拓展与转移,实现三个超越(超越教材、超越教师、超越自己);其教学举措是落实三个环节(掌握知识、应用知识、探求未知),做到三个并重(传授知识、思想、方法三者并重)、三个支撑(科学计算与模拟、立体化教学、研究创新平台),和贯彻三个原则(教学方法、学习模式、交互方式多样化)。从实践中我们总结出用基础物理专题模型系列对学生进行训练,完成知识的拓展与转移,这就是实现这一教学目标的重要方法之一。

本书将已形成数字物理教学系统的专题教学的十八个案例介绍给读者,它覆盖了力学、相对论、热力学与统计物理学、电磁学、波动光学、量子论和非线性物理学等七个部分,充分体现了“老师讲得少,学生学得多”和“以教为导,以学为主”的教学理念,是一种全新的数字化物理教学模式,深受学生欢迎。本书是高校理工类本科生学习基础物理极有益的参考书,它对培养学生创新思维与能力有明显的效果;本书也是高校基础物理教师开展研究式教学的重要参考书,有条件的教师不妨用本书开设一门选修课试试,你一定会取得意想不到的效果。由于数字物理教学是一种新的教学观念与方式,它尚在发展和完善的过程中,书中如有不妥之处,恳请读者批评指正。

李元杰

2006年12月于上海

目 录

第一部分 数字物理教学典型案例	1
一、运动的分解与合成研究	1
二、碰撞问题研究	11
三、连接体与准粒子模型研究	22
四、波的叠加模型研究	30
五、势模型的研究	36
六、刚体运动模型	43
七、电势与电场分布模型研究	53
八、电流磁场的有限元法	70
九、交变电磁场问题研究	86
十、理想气体的状态与过程	97
十一、熵的统计意义	103
十二、分布函数的研究	109
十三、光的相干叠加	117
十四、波函数的几何描述	130
十五、本征态与本征值	138
十六、量子效应	147
十七、相对论效应	156
十八、从规则走向混沌	164
第二部分 论数字物理教学的模式与特点	171

第一部分

数字物理教学典型案例

一、运动的分解与合成研究

1. 两类基本运动——直线运动与圆运动

(1) 圆运动按直线运动展开

如图 1-1 所示,旋转矢量的半径为 r : $\mathbf{r} = r e^{i(\theta_0 + \omega t)} \mathbf{e}_r$, 分解为

$$x = r \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y = r \sin(\omega t + \theta_0)$$

(2) 直线运动按圆运动展开

直线运动 $A = A_0 A \cos(\omega t)$, $A_0 = (1, \theta)$, 分解为

$$r_1 = \frac{A}{2} e^{i(\theta + \omega t)}, \quad r_2 = \frac{A}{2} e^{i(\theta - \omega t)}$$

两类基本运动

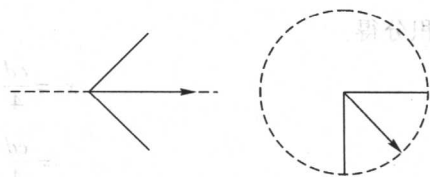


图 1-1 直线运动与圆运动

现用两套基矢组: $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, 则任意函数皆可按基矢组展开, 指数函数可按三角函数展开, 反之, 三角函数可按指数函数展开。其实基本运动是多样化的, 选择适当的基本运动作为基矢组, 会使复杂的运动变得十分简单, 这是物理学重要的思维方法之一。

2. 基本运动的合成

(1) 直线运动的合成: 小船过河

“小船过河”是典型运动学模型, 它较之均匀重力场中的抛体问题在物理内容上更为丰富, 因为小船的航速有各种方案(匀速、加速), 水速有各种不同的分布(均匀、线性、抛物线分布等), 因而研究起来具有较大的拓展空间。最简单的情况是: 小船以匀速垂直河岸过河, 河水平行河岸匀速下流, 两运动合成为一匀速直线运动; 其次, 小船沿垂直河岸方向加速航行, 河水平行河岸匀速下流, 合成抛物线运动; 如果考虑较为复杂的情况, 如河水流速成对称线性分布, 两岸边为零, 河中心为 c , 小船沿垂直河岸方向匀速 u 航行, 合成为一对称曲线轨迹, 如图 1-2 所示, 试增大 c 值观察轨道变化。

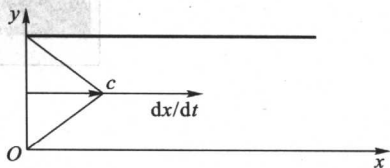


图 1-2 小船过河

分析讨论:

船速: $dy/dt = u$

$$\text{河水速度: } dx/dt = \begin{cases} 2cy/d & (0 \leq y \leq d/2) \\ 2c(d-y)/d & (d/2 \leq y \leq d) \end{cases}$$

要点:

① 河水速度分布: 利用 dx/dt 与 y 的直线关系: $dx/dt = k_1 y + k_2$, 其中 k_1, k_2 为待定系数, 以及 $y=0, d/2, d$ 处的边界条件 $dx/dt=0, c, 0$, 通过计算待定系数 k_1, k_2 可以确定河水速度分布的表达式。

② 分段积分: 垂直方向对船速积分得

$$y = ut$$

代入水平方向河水速度表示式中

$$dx = \frac{2cut}{d} dt$$

积分得

$$x = \frac{cu}{d} t^2 = \frac{c}{d} y^2 \quad (0 \leq y \leq d/2)$$

$$dx = \frac{2c(d-ut)}{d} dt$$

积分得

$$\begin{aligned} x &= \frac{cd}{4} + 2c \left(t - \frac{d}{2u} \right) - \frac{cu}{d} \left(t^2 - \frac{d^2}{4u^2} \right) \\ &= \frac{cd}{4} + \frac{2c}{u} \left(y - \frac{d}{2} \right) - \frac{c}{du} \left(y^2 - \frac{d^2}{4} \right) \quad (d/2 \leq y \leq d) \end{aligned}$$

小船过河的模拟图如图 1-3 所示。

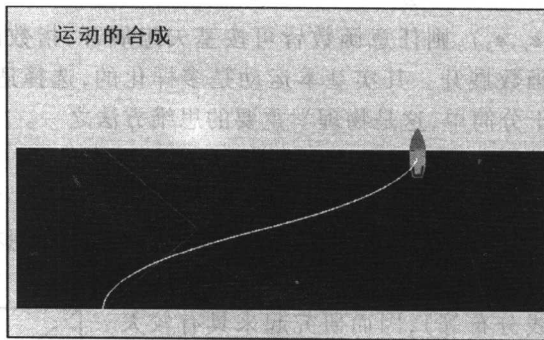


图 1-3 模拟小船过河

(2) 直线运动与圆运动的合成: 科里奥利加速度

直线运动与圆运动的合成在物理学中有许多重要实例, 如在刚体的平行平面运动中, 刚体(圆轮)的质心做匀速直线运动, 圆盘轮边缘上某固定点相对质心做匀速圆周旋转, 该点相对地面的运动轨迹就是一个直线运动与圆运动的合成; 在电磁学中, 带电粒子在均匀正交的电场和磁场中的平面运动也是一个直线运动与圆运动的合成; 至于科里奥利加速度更与此相关。

实例:光滑的水平面上,一根细木杆环绕其一端点做匀速圆周运动,杆上套有一光滑的圆环,圆环沿着木杆径向做匀速直线运动,观察其合运动轨迹。观察结果:

① 圆环沿着木杆径向距离的变化是均匀的;

② 沿圆周运动切线方向,环移动的横向距离越来越大,这是由于角速度 ω 虽不变,但径向匀速 $v_r = dr/dt$ 使半径 r 增大,因而产生切向加速度 $\omega \times v_r$,其次,由于角速度 ω 使 v_r 方向发生改变也产生切向加速度 $\omega \times v_r$;

③ 以上两个匀速运动合成,生成一个沿切向的线加速运动,其加速度称为科里奥利加速度,即

$$\begin{aligned} a_c &= e_\theta \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} e_r + r \omega e_\theta \right) \right] \cdot e_\theta \\ &= e_\theta \left[\frac{dr}{dt} \omega + \frac{dr}{dt} \omega \right] = 2\omega \times v_r \end{aligned}$$

其中,第一项是由于 ω 引起 v_r 的方向变化产生的横向加速,第二项是由于 r 大小的增长产生的横向加速,故出现两倍这个系数,如图 1-4 所示。

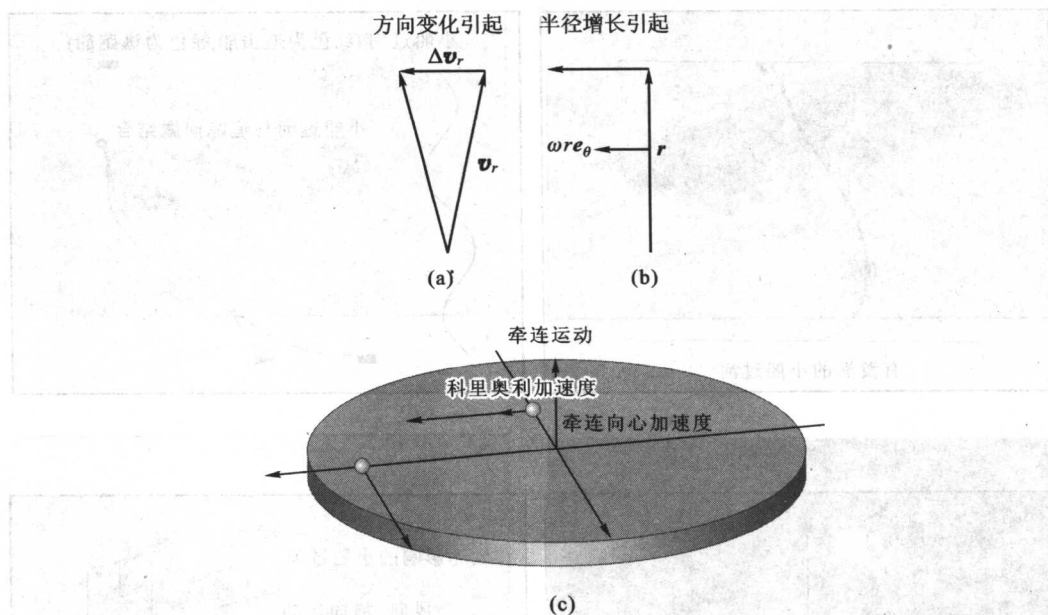


图 1-4 科里奥利加速度

(3) 圆运动的合成:月球相对太阳的运动

设太阳中心为坐标原点,地球球心坐标为 (E_x, E_y) ,月球的球心坐标为 (M_x, M_y) ,且均做匀速圆周运动,角速度分别为 (ω_1, ω_2) ,则

$$\begin{aligned} E_x &= R \cos \omega_1 t, & E_y &= R \sin \omega_1 t \\ M_x &= E_x + R \cos(\omega_2 t + \phi_0) \end{aligned}$$

$$M_y = E_y + R \sin(\omega_2 t + \phi_0)$$

月球相对太阳的运动如图 1-5 所示。关于此类问题在动力学研究中将会有较严格的求解。

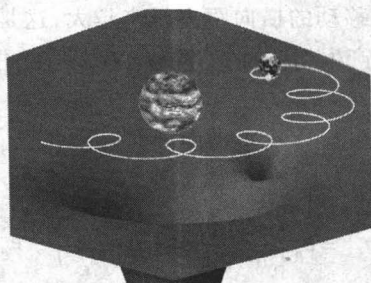
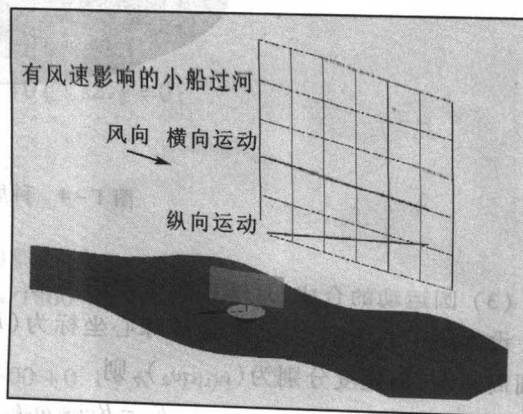
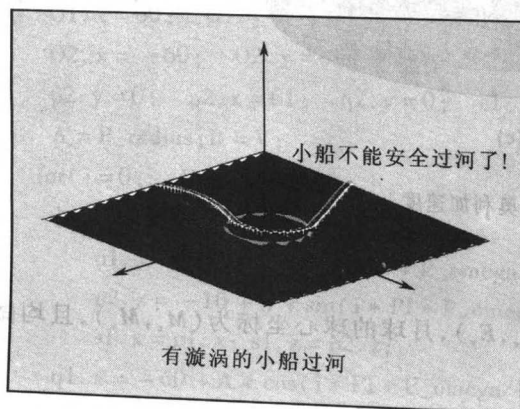
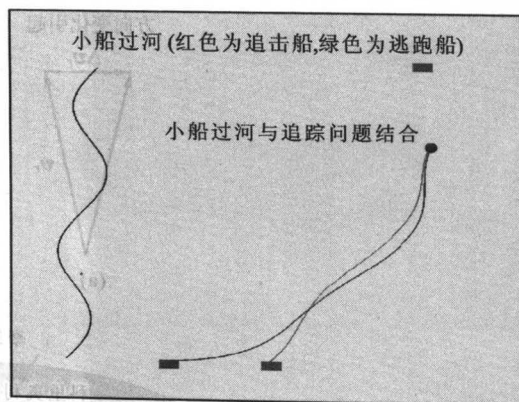
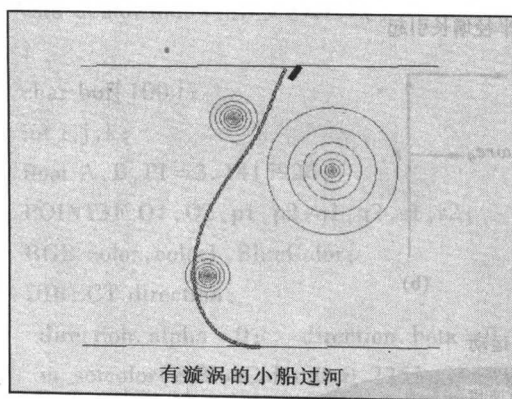
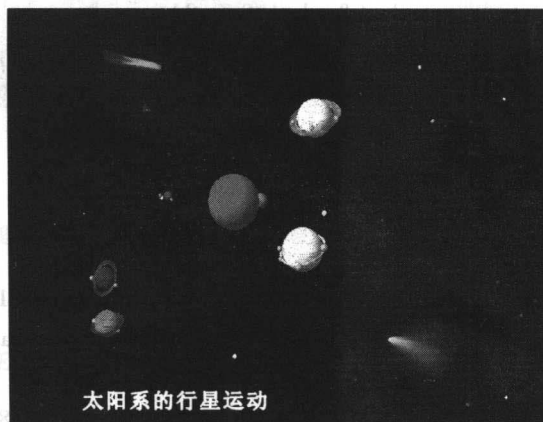
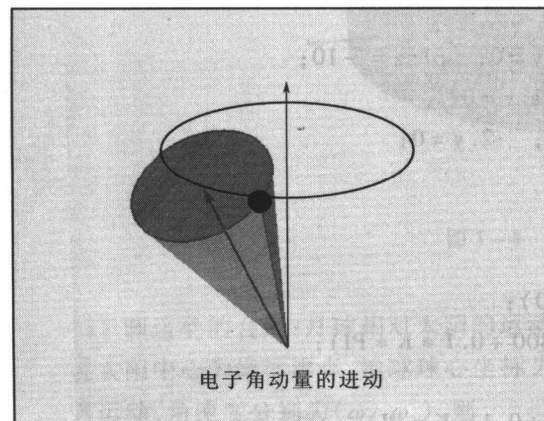
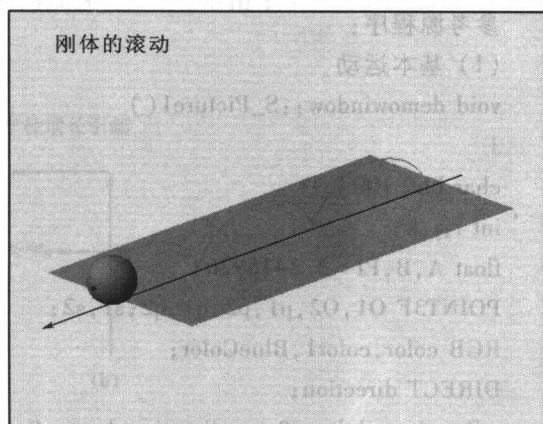
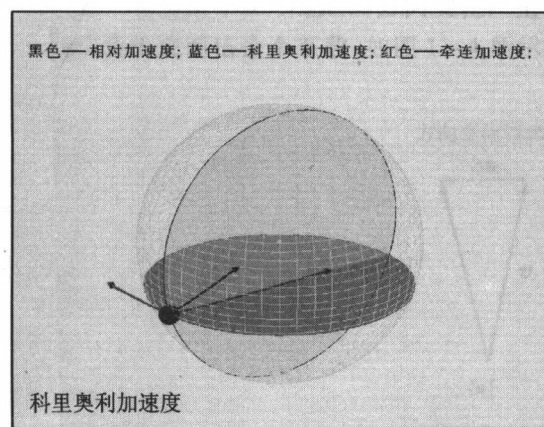
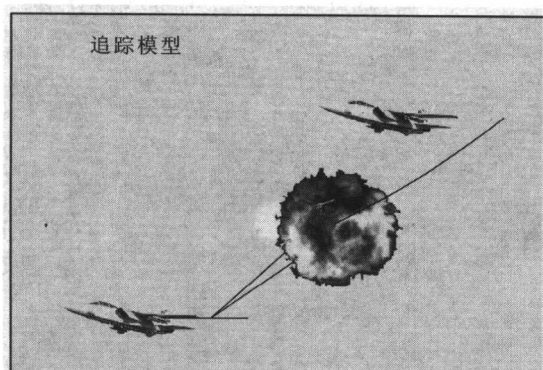
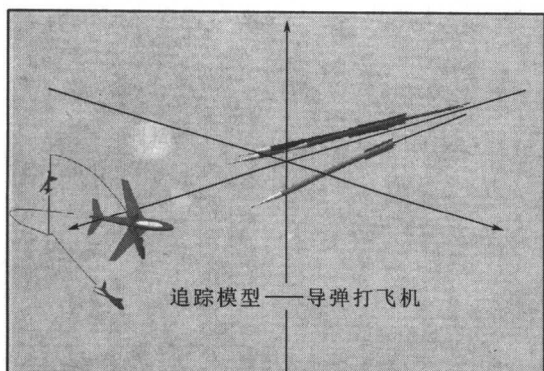
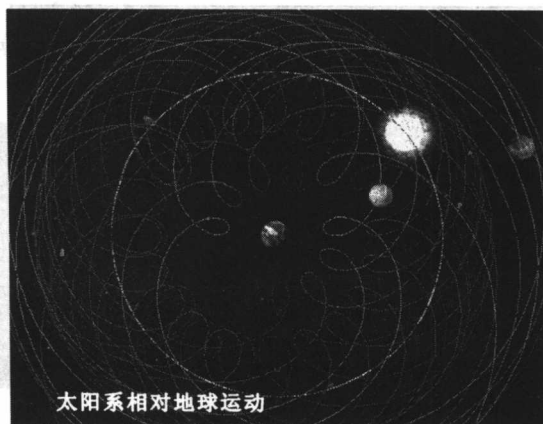
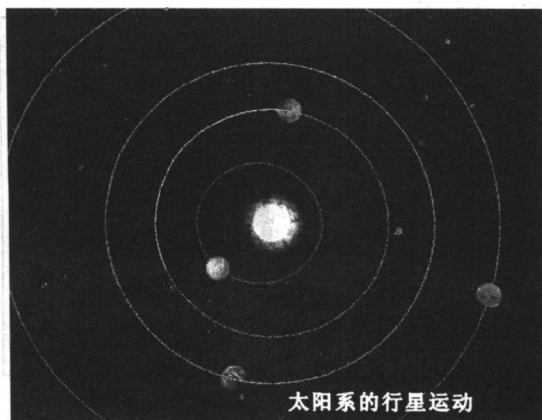


图 1-5 日、月、地的运动

学生拓展与创新实例







参考源程序:

(1) 基本运动

```
void demowindow::S_Picture1()
```

```
{
```

```
char buf[100];
```

```
int i,j,k;
```

```
float A,B,PI=3.1415926;
```

```
POINT3F O1,O2,p1,p2,q1,q2,s1,s2;
```

```
RGB color,color1,BlueColor;
```

```
DIRECT direction;
```

```
direction.alpha=0; direction.beta=0;
```

```
m_setcolor(&BlueColor,0,0,225);
```

```
m_setcolor(&color,255,0,0);
```

```
m_setcolor(&color1,0,0,0);
```

```
O1.x=60; O1.y=0; O1.z=-10; p1.y=0; p1.z=-10;
```

```
O2.x=-60; O2.y=0; O2.z=-10; q1.y=0;
```

```
p2.y=0; p2.x=61; q2.y=0; s1.y=0; s2.y=0;
```

```
A=P_radius;B=V;
```

```
for(i=0;i<S_Step+1;i++)
```

```
{
```

```
p1.x=60+A*cos(i*PI*P_omega/1800);
```

```
p2.z=-10+A*sin(i*PI*P_omega/1800+0.1*K*PI);
```

```
s1.x=p1.x; s1.z=p2.z;
```

```
q1.x=-60+A*cos(i*PI*P_omega/1800+0.1*K*PI);
```

```
q1.z=-10+A*sin(i*PI*P_omega/1800+0.1*K*PI);
```

```
q2.x=-60+B*cos(i*PI*X/1800);
```

```

q2.z = -10 + B * sin( -i * PI * X/1800);
s2.x = q1.x + q2.x + 60; s2.z = q1.z + q2.z + 10;
MDrawCircle(s1,direction,0.1,color1,255);
MDrawCircle(s2,direction,0.1,color1,255);
}

SetLineWidth(3);
PDrawArrow(O1,p2,5,1,BlueColor);
PDrawArrow(O1,s1,5,1,color1);
PDrawArrow(O1,p1,5,1,color);
PDrawArrow(O2,q2,5,1,BlueColor);
PDrawArrow(O2,s2,5,1,color1);
PDrawArrow(O2,q1,5,1,color);
DrawHZCharacter(-140,10,-140,FLEFT,FBOTTOM,word,color1);
}

```

(2) 小船过河

```

void demowindow:~S_Picture1()
{
    POINT3F p[200],q[3],s[4],f[200][101];
    RGB color,color1,color2;
    RGB Color[200][101];
    int i,j,n;
    float d,u,c,dt=0.02;
    DIRECT direction;
    direction.alpha=0; direction.beta=0;
    d=30+P_radius; c=V; u=P_omega;
    m_setpoint(&s[0],-150,0,-50+P_radius); //画河道
    m_setpoint(&s[1],150,0,-50+P_radius);
    m_setpoint(&s[2],150,0,-80);
    m_setpoint(&s[3],-150,0,-80);
    m_setpoint(&q[0],-100,1,-80);
    m_setpoint(&q[1],-100+c/2,1,-65+P_radius/2);
    m_setpoint(&q[2],-100,1,-50+P_radius);
    m_setcolor(&color,0,0,0);
    m_setcolor(&color1,255,255,255);
    m_setcolor(&color2,255,0,0);
    CDrawLine(q[0],q[1],color2);
    CDrawLine(q[1],q[2],color2);
    word.buffer=(unsigned char *) malloc(totalbyte("小船过河",HZ_SIZE_24));
}

```

```

LoadHZCharacter24(S_FONT,&word,"小船过河");
DrawHZCharacter(80,-70,90,FCENTER,FBOTTOM,word,color);
for(j=0;j<200;j++)for(n=0;n<101;n++)    //模拟流水
{
f[j][n].x=-150+1.8*j;    f[j][n].y=-80+d*n/100;
Color[j][n].r=20;    Color[j][n].g=20;
if(n<51)
{Color[j][n].b=150-100*cos(0.01*c*n*S_Step/d-20*j/c);
f[j][n].z=2*cos(0.01*c*n*S_Step/d-20*j/c);
}
else
{Color[j][n].b=150-100*cos(0.01*c*(100-n)*S_Step/d-20*j/c);
f[j][n].z=2*cos(0.01*c*(100-n)*S_Step/d-20*j/c);
}
}
CDrawColorSurface(&f[0][0],200,101,&Color[0][0],255);
SetLineWidth(3);
if(S_Step>int(d/(u*dt))+1)    S_Step=S_Step-int(d/(u*dt));
for(i=0;i<S_Step+1;i++)
{
if(i<int(d/(2*u*dt))+1)
{
p[i].x=-100+c*u*i*i*dt*dt/d;
p[i].z=-80+u*i*dt;    p[i].y=1;
CDrawCurve(&p[0],i-1,color1);
}
if(i>(d/(2*u*dt)))
{
p[i].x=-100+c*d/(2*u)-c*pow(u*i*dt-d,2)/(u*d);
p[i].z=-80+u*i*dt;    p[i].y=1;
CDrawCurve(&p[0],i-1,color1);    }
}
}

```

(3) 追踪模型

```

POINT3F p[5][1000];
float v0=P_p2/8;    //反击飞机
float v1=6;    //攻击
float v2=10;    //反击1

```

```

float v3 = P_p1/4;           // 攻击飞机
float v4 = 20;               // 反击 2
RGB color;
    m_setcolor(&color,0,0,0);
    DrawHZCharacter(100,0,100, FCENTER, FBOTTOM, word, color);
for(int j=0;j<1000;j++)
{
    p[0][j].y=0;    p[1][j].y=0;    p[2][j].y=0;
    p[3][j].y=0;    p[4][j].y=0;
}

p[0][0].x = -100;  p[0][0].z = -80;
p[1][0].x = -100;  p[1][0].z = 50;
p[2][0].x = -100;  p[2][0].z = -80;
p[3][0].x = -100;  p[3][0].z = 50;
p[4][0].x = -100;  p[4][0].z = -80;
float k1,k2,k3,r1,r2,r3,dt=0.2;
for(j=0;j<S_Step+2;j++)
{
    p[0][j+1].x = p[0][j].x + v0 * dt;
    p[0][j+1].z = -80;
    p[3][j+1].x = p[3][j].x + v3 * dt;
    p[3][j+1].z = 50 + 0.05 * j;
    if(j < S_Step + 1)
        CDrawLine(p[0][j],p[0][j+1],color);
    if(j < 2)           // 攻击
    {
        p[1][j+1].x = p[3][j+1].x;
        p[1][j+1].z = p[3][j+1].z;
    }
    else
    {
        r1 = sqrt((p[0][j].x - p[1][j].x) * (p[0][j].x - p[1][j].x) + (p[0][j].z - p[1][j].z) *
            (p[0][j].z - p[1][j].z));
        k1 = v1/r1;
        p[1][j+1].x = p[1][j].x + k1 * (p[0][j].x - p[1][j].x) * dt;
        p[1][j+1].z = p[1][j].z + k1 * (p[0][j].z - p[1][j].z) * dt;
        if(j < S_Step + 1)
            CDrawLine(p[1][j],p[1][j+1],color);
    }
}

```

```

    if(r1 > 60)          // 反击 1
    {
        p[2][j+1].x = p[0][j+1].x;
        p[2][j+1].z = p[0][j+1].z;
    }
    else
    {
        r2 = sqrt((p[1][j].x - p[2][j].x) * (p[1][j].x - p[2][j].x) + (p[1][j].z - p[2][j].z) *
            (p[1][j].z - p[2][j].z));
        k2 = v2/r2;
        p[2][j+1].x = p[2][j].x + k2 * (p[1][j].x - p[2][j].x) * dt;
        p[2][j+1].z = p[2][j].z + k2 * (p[1][j].z - p[2][j].z) * dt;
        if(j < S_Step + 1)
            CDrawLine(p[2][j], p[2][j+1], color);
    }

    if(r1 > 55)          // 反击 2
    {
        p[4][j+1].x = p[0][j+1].x;
        p[4][j+1].z = p[0][j+1].z;
    }
    else
    {
        r3 = sqrt((p[3][j].x - p[4][j].x) * (p[3][j].x - p[4][j].x) + (p[3][j].z - p[4][j].z) *
            (p[3][j].z - p[4][j].z));
        k3 = v4/r3;
        p[4][j+1].x = p[4][j].x + k3 * (p[3][j].x - p[4][j].x) * dt;
        p[4][j+1].z = p[4][j].z + k3 * (p[3][j].z - p[4][j].z) * dt;
        if(j < S_Step + 1)
            CDrawLine(p[4][j], p[4][j+1], color);
    }

    if(r2 < 1)
    {
        p[1][j+1].x = p[1][j].x;
        p[1][j+1].z = p[1][j].z;
        p[2][j+1].x = p[2][j].x;
        p[2][j+1].z = p[2][j].z;
        LoadBMPImage2(&S_logo3, "PICTURE\\爆炸火球.bmp", WITHEXE);
        CDrawBMPImage1(p[1][j+1].x, p[1][j+1].y, p[1][j+1].z, FCENTER,

```

```

FCENTER, 20, S_logo3);
}
if( r3 < 1 ){
    p[3][j+1].x = p[3][j].x;
    p[3][j+1].z = p[3][j].z;
    p[4][j+1].x = p[4][j].x;
    p[4][j+1].z = p[4][j].z;
    LoadBMPImage2(&S_logo3, "PICTURE\\爆炸火球.bmp", WITHEXE);
    CDrawBMPImage1(p[3][j+1].x, p[3][j+1].y, p[3][j+1].z, FCENTER,
    FCENTER, 20, S_logo3);
}
if( r2 < 1 && r3 < 1 ) break;
}

LoadBMPImage2(&S_logo1, "PICTURE\\飞机.bmp", WITHEXE);
CDrawBMPImage1(p[0][j].x, p[0][j].y, p[0][j].z, FCENTER, FCENTER, 20, S_logo1);
LoadBMPImage2(&S_logo2, "PICTURE\\导弹.bmp", WITHEXE);
CDrawBMPImage1(p[1][j].x, p[1][j].y, p[1][j].z, FCENTER, FCENTER, 10, S_logo2);
LoadBMPImage2(&S_logo3, "PICTURE\\导弹.bmp", WITHEXE);
CDrawBMPImage1(p[2][j].x, p[2][j].y, p[2][j].z, FCENTER, FCENTER, 10, S_logo3);
LoadBMPImage2(&S_logo4, "PICTURE\\飞机.bmp", WITHEXE);
CDrawBMPImage1(p[3][j].x, p[3][j].y, p[3][j].z, FCENTER, FCENTER, 20, S_logo4);
LoadBMPImage2(&S_logo5, "PICTURE\\导弹.bmp", WITHEXE);
CDrawBMPImage1(p[4][j].x, p[4][j].y, p[4][j].z, FCENTER, FCENTER, 10, S_1
ogo5);

```

二、碰撞问题研究

碰撞模型是最简单的两体相互作用模型,它也是运用对称性方法处理的典型物理模型,因为任何复杂的碰撞问题都具有对称性,所以研究碰撞模型无论从理论上还是从方法上皆具有十分重要的意义。考察有不同质量及初速的二弹性光滑球的一维正弹性碰撞,要求能显示:

- (1) 碰撞时动量曲线的突变性;
- (2) 碰撞前后动量之和的不变性;
- (3) 碰撞前后机械能守恒。

并讨论动量守恒的物理实质是什么?

研究思路:碰撞前后,总动量是守恒的,两碰撞物体只是重新分配了动量与能量或者重新分配了速度,不发生碰撞时,皆保持匀速直线运动。

处理问题的要点:

- (1) 确定碰撞时间

对于一次性碰撞,设经过 N 次迭代发生碰撞,则

$$N = \text{int} \left[\frac{x_{20} - x_{10}}{(v_1 - v_2)T} \right]$$

但碰撞时两球接触,球心距离为 $2R = j(v_1 - v_2)T$,所以实际两球接触时,迭代次数为 $N - j$;

对于多次多体碰撞,采用条件语句 if else 判断。

(2) 由守恒定律确定碰撞后的速度 u_1, u_2 与 v_1, v_2 的关系,碰前碰后,皆保持匀速直线运动。

定义一个恢复系数 e :

$$e \equiv \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (1)$$

其中, v_1, u_1, v_2, u_2 分别为碰撞前后二物体的速度, $u_2 - u_1$ 是碰撞后两球的离开速度, $v_1 - v_2$ 是碰撞前两球的接近速度,恢复系数 e 是它们的比值。由动量守恒定律碰撞的方程可列出

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (2)$$

方程(1)和(2)可写成

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ e(v_1 - v_2) \end{pmatrix}$$

利用行列式法解二元一次方程组,可解得

$$u_1 = v_1 - \frac{(1+e)m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = v_2 + \frac{(1+e)m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

将(2)式改写为

$$m_1(v_1 - u_1) + m_2(v_2 - u_2) = 0$$

乘以 $\frac{1}{2}(v_1 + u_1)$ 得

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - u_2^2) \left(1 + \frac{v_1 + u_1 - v_2 - u_2}{v_2 + u_2} \right) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2}m_2 \frac{(1+e)m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} [v_1 - v_2 - e(v_1 - v_2)] \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned}$$

其中

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1^2 - \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

是碰撞前后的动能损失。

对于二质量相同的弹性球的斜碰撞(图 2-1):