高等学校教材

普通物理实验

梁伟华　张庆荣　郝晓辉
张金平　庞学霞　周　阳　编著

PUTONG WULI SHIYAN

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高等学校教材

普通物理实验

梁伟华　张庆荣　郝晓辉
张金平　庞学霞　周　阳　编著

PUTONG WULI SHIYAN

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

普通物理实验/梁伟华等编著．—北京:中国计量出版社,2007.8
高等学校教材
ISBN 978-7-5026-2708-9

Ⅰ．普…　Ⅱ．梁…　Ⅲ．普通物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ．O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 123556 号

内　容　提　要

本书依据教育部《理工科大学物理实验教学基本要求》编写。全书内容分为力学和热学实验、电磁学实验、光学实验三部分，共收入 50 个实验。在每部分之前，都介绍了相关的实验基本知识，每个实验后均有思考题。

书中所编入的实验，有多年来普通物理实验中的经典题目，也有近年来出现的较新的实验题目和内容，力求能够反映当前主流的普通物理实验理论、技术和方法，有较好的适用性。在编写过程中，根据有关国家标准和规范，统一了有关名词、计量单位和符号，力求做到科学化和规范化。

本书可作为综合性大学物理类专业普通物理实验课程的教材，也可作为理工科非物理类专业物理实验课程的教材。可以根据教学时数的要求，选用其中的内容。

中国计量出版社 出版

地　址　北京和平里西街甲 2 号(邮编 100013)
电　话　(010)64275360
网　址　http://www.zgjl.com.cn
发　行　新华书店北京发行所
印　刷　北京市密东印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　15.75
字　数　374 千字
版　次　2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　数　1—3000
定　价　27.00 元

前　言

本书依据教育部颁发的《理工科大学物理实验教学基本要求》，为适应当前对学生能力培养的需求，结合我校多年物理实验课教学改革的经验及现有仪器设备而编写的，可作为综合性大学物理类专业普通物理实验课程的教材，也可供理工科非物理专业普通物理实验课程选用。

随着科学技术的发展和实验教学改革的深入，普通物理实验课的教学从实验内容到实验技术都在不断的变化。本书力求反映当前主流的实验理论、技术和方法。与传统的物理实验教材相比，增添了一些新的实验内容，在一些传统的实验中也使用了新的实验仪器和新的实验技术。

本书按照力学和热学、电磁学、光学的顺序编入50个实验，在每部分实验之前，都介绍了相关的实验基本知识。其内容充分体现了我校多年来大学物理实验课程改革及实验室建设的成果，是普通物理实验室全体教师和实验技术人员(包括已经离开本室的一些同志)集体智慧和共同劳动的结晶。

本书编写的具体分工：梁伟华编写了力学和热学实验部分中的力学和热学实验基本知识、实验二、实验五、实验六、实验八、实验十一、实验十三、实验十四、实验十五、实验十八、实验十九、实验二十；庞学霞编写了实验一、实验三、实验四、实验七、实验九、实验十、实验十二、实验十六、实验十七；郝晓辉编写了电磁学部分中的实验一、实验二、实验三、实验四、实验八、实验九、实验十、实验十三；周阳编写了电磁学实验部分中的电磁学实验基本知识、实验五、实验六、实验七、实验十一、实验十二、实验十四；张庆荣编写了光学实验部分中的光学实验基本知识、实验三、实验四、实验七、实验八、实验九、实验十、实验十二、实验十六，并完成光学实验部分的绘图；张金平编写了实验一、实验二、实验五、实验六、实验十一、实验十三、实验十四、实验十五。

本书在编写过程中参阅了一些兄弟院校的教材和仪器厂家的说明书，在此致以深切的谢意。

由于编写时间紧迫，以及水平所限，书中若有不当之处，恳请读者批评指正。

编者

2007年7月

目　录

光学实验部分

绪 论

物理学的建立和发展都是以生产实践和科学实验为基础的,任何一个物理定律的确立和修正都是以大量的实验材料为依据而归纳总结出来的,因此,物理实验是物理理论的基础,也是检验物理理论的标准,这在物理学史上有许多实例,但是,实验又需要有理论根据和理论指导,所以两者是相辅相成的,不可偏废,唯理论和经验论都是错误的。

自然界发生的物理现象极为复杂,在这复杂的物理现象中,要想深入了解我们所要研究的某一个物理变化规律,就必须在实验室内通过仪器和措施,用人为的方法控制条件,尽量削减存在的次要现象和因素的干扰,集中地对主要现象加以反复观察和测量,找出在一定条件下这一物理变化的本质,测量出数量或是物理量之间的关系,这就是我们在实验室中的工作。

同学们将来在今后工作中,不仅应有丰富的理论知识,而且要有熟练的实验技能。实验是物理课中的一个重要学习环节,对实验课必须严肃认真,才能获得应有的学习效果,基础物理实验课的培养目的,主要有以下三方面。

1. 学习物理实验的基本知识、基本方法和基本的技能技巧,要求掌握有关的实验方法和测量技术,学会使用有关的仪器,学会有效数字的运算和数据处理的方法。

2. 培养分析问题和解决问题的能力,要求理论联系实际,加深理解物理概念和规律,学会分析、归纳、概括实验结果。对实验出现的问题能根据理论做出正确的分析和判断。

3. 树立严肃认真的科学态度和工作作风,要求对实验中任一细节都应实事求是,一丝不苟,并严格遵守实验室所定的规章制度。

为了达到实验的预期目的,同学们必须做到以下几点。

1. 预习实验,写预习报告。每个实验都是由同学独立完成的,在课前必须预习实验教材,明确实验目的,理解实验原理,了解所用的测量仪器、测量方法和具体步骤,在做实验前,一定要心中有数。为了达到此目的,我们将采取各种检查的措施,如检查预习报告,预习报告的成绩占总成绩的10%左右;在实验课上巡回,按计划及时检查某些重要的操作是否正确。并当堂给出每个学生的操作成绩(一般为总成绩的40%)。

预习报告的内容包括:实验题目、实验目的、实验用具、实验原理(不宜照抄全搬,应善于归纳总结,要求简明扼要,又不失精华)、详细的实验步骤、数据表格及思考题。

2. 做好实验记录和计算的准备。在预习实验时,单独准备一张纸,用于记录实验名称、重要的计算公式和详细的实验步骤,最为重要的是画出测量数据表格,以免在做实验时将数据随便记在纸上而造成数据紊乱、计算错误,要养成细心记录数据的良好习惯,不能事后凭回忆追记数据,每次实验的原始数据要经过教师检查,签字后方有效,无效的数据不能给成绩,并且生效的原始数据不能有任何涂改(不能用铅笔记录数据)。

3. 熟悉仪器。上课时,首先熟悉仪器的安装、调整和使用方法,然后才能进行实验。实验的顺利与否、实验的成败以及仪器损坏的原因,多是在仪器的安装和调整中有误造成的。

仪器的安装和调整,可通过仔细阅读实验教材中仪器简介部分的内容,也可在实验室亲自操作。

4. 使用对数表或计算器进行计算。初始时可能不习惯,要求逐步练习达到熟练的程度。

5. 写实验报告。正式的实验报告内容包括有:实验题目,实验用具,实验原理,实验步骤、数据及处理,思考题及讨论。

实验报告中的字迹要清楚整洁,图表要规格,不整齐和内容不完全的报告要退回重写。

按教师指定时间交实验报告,交实验报告时连同教师签过字的原始数据一起交回。

6. 在整个实验过程中,保持实验桌和地面的整洁。井井有条是保证实验顺利进行的必要条件,否则会带来杂乱,有失公德、妨碍工作甚至损坏仪器,实验完成后,把仪器整理好。

7. 对各项要求,经教师检查认可后,方能离开实验室。

力学和热学实验部分

力学和热学实验基本知识

一、误差理论基础

(一)测量

物理实验不仅要定性地观察物理变化的过程,还要定量地测量物理量的大小。测量就是把待测量与标准量进行比较,待测量是标准量的多少倍,待测量的值就是多少,同时把待测量的单位明确下来。

如果对某一量重复地测量了许多次,而且每次测量的条件都相同(同一观察者,同一仪器,同一方法,同一环境等),因为没有根据能指出哪一次测量比另一次测量更准些,所以每次测量的精确度是相同的,我们把这种测量叫做等精度测量。当测量条件中只要有一个发生了变化,就是不等精度测量。

测量的类别虽然很多,但归纳起来可分为两大类:直接测量和间接测量。

在国际上所规定的基本量之中,长度、质量、时间、温度、电流强度和光强,是可以用仪器直接测量的,对这些量进行的测量叫直接测量。另外一些量(导出量),如:面积、体积、密度等,它们的量值是不能用仪器直接测量得知的,必须将直接测量出的量代入有关公式,通过计算,才能得到。这样的测量过程叫间接测量。例如测量一个圆柱形物体的密度,需要的有关公式是

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 L}$$

其中,M 是物体的质量;D 是圆柱的直径;L 是圆柱的高。这些都是直接测量的量,代入上式即可算出物体的密度 ρ 。为求物体密度 ρ 的测量和计算就是间接测量。

(二)测量的误差

误差的定义:某量值的给出值与其客观真值之差为误差。其中,给出值包括测量值、标称值、示值、预置值、计算近似值等非真值,用公式表示为

误差 = 给出值 - 真值

而　修正值 = - 误差 = 真值 - 给出值

一般情况下　真值 = 测量值 + 修正值

在任何一种测量中,由于测量仪器、感觉器官和测量方法难以达到理想的程度,使测量值和待测量的真值之间总有一个差值,这一差值就是误差。

根据误差产生的原因,误差可以分为三类:过失误差、系统误差和随机误差。

1. 过失误差

这种误差是由于实验者的粗心大意或过度疲劳所致。如对仪器的使用不正确,实验方法不合理,违反操作规程,或读错、记错、算错数据等。对这种误差,只要对工作和学习认真

负责，是完全可以避免的。

2. 系统误差

系统误差是指实验的全部系统中所出现的误差，包括：仪器误差、理论误差、环境误差和个人误差。

(1)仪器误差

仪器误差是由于仪器本身的缺陷所引起的。例如：温度计的零点不在冰点，仪表的刻度不准确，停表的走快或走慢，天平的两臂不等长，砝码不标准等。

减小这种误差的办法是改进仪器或改进实验方法。

(2)理论误差

理论误差是由于实验理论和实验方法不够完善所引起的。例如，称量轻物体的质量时，没有考虑空气的浮力，测量热量时，避免不了与周围物质的热交换，测量磁针偏转时，附近有铁器的影响等。

减少这种误差的办法，可用改进实验仪器，或在计算公式中引入修正项。

(3)环境误差

环境误差是由于环境的影响而造成的误差。如外界的温度、气压或气流等的影响。

可在计算公式中引入修正项或改进实验条件，来减小这种误差。

(4)个人误差

个人误差是由于个人习惯或生理(视觉、听觉、身形高矮等)关系所引起的。例如，在读刻度数值时，总是偏高或偏低，掐停表时总是较迟或较早等。

对这种误差，经过相当时间的实验训练，注意矫正个人的习惯，就可减小。

系统误差的特点是：它的出现是有规律的，或是全部测量值都大于真值，或是全部测量都小于真值。掌握它的规律之后，按照误差产生的原因，可以设法校正，使误差减到最小。

用增加测量的次数是不能减小这类误差的。

3. 随机误差

在实验时，即使采用了完善的仪器，选择了恰当的方法，经过精心的观测，使系统误差减到了最低的程度，还存在另一类不可避免的误差。这类误差是由于人们的感觉器官的灵敏程度和仪器的准确程度都有一定的限制，对同一目标进行多次测量，其中每次测的数值，不可能完全相同，偏高或偏低，误差或正或负，纯属是随机性的，叫做随机误差。有的教材上称为偶然误差。

产生随机误差的原因：

(1)判断错误　这是由于实验者的眼、耳、手在观测上的限制，或由于疲劳所引起的。例如，用直尺测量长度时，眼睛最多只能估计到毫米的十分之几，而每一次的估计不一定完全相同，因为估计是不准确的，可能较多些或较少些。又如观测仪表上标尺的刻度时，眼睛的位置偏左或偏右，也使测量的数值时多时少，误差或正或负。

(2)涨落影响　环境的温度或气压忽升忽降，电源的电压不稳定等，都能使测量值偏大或偏小，出现或正或负的误差。

(3)干扰影响　外界机械的振动，风的吹动，电磁波的干扰等，也可使测量值有时大有时小，出现或正或负的误差。

在多数实验中，系统误差和随机误差两者是同时存在的，有时两者可同出一个来源。

4.精密度、准确度和精确度

精密度表示各测量值之间的相近程度,它与随机误差的大小有关。准确度表示测量值接近真值的程度,它与系统误差的大小有关。我们以实弹打靶为例,来说明精确度和准确度的意义。设有三个射击手各射一批子弹,分别打到三个靶子上(图1-0-1、图1-0-2、图1-0-3)。

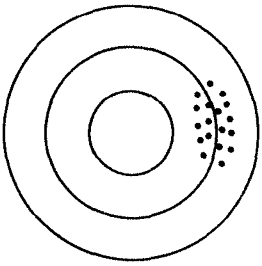

图1-0-1

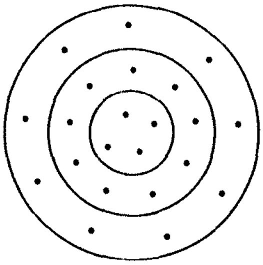

图1-0-2

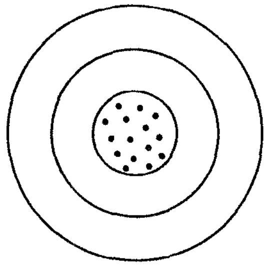

图1-0-3

在图1-0-1中,靶上的弹痕较密集,但偏离靶心的一方,这说明枪上的瞄准系统有问题,或枪身歪斜,或射击手的姿式不正确,使子弹有规律的偏斜,尤如我们在实验中发生的系统误差大,准确度低;而弹痕密集,说明射击手观测估计的较好,外界干扰因素影响不大,相当于我们在实验中的随机误差小,精密度高。

在图1-0-2中,弹痕基本围绕在靶心的周围,但不密集,相当于实验中的系统误差小,准确度高,而随机误差大,精密度低。

在图1-0-3中,弹痕密集于靶心,说明系统误差和随机误差均小,准确度和精密度均高,通常称为精确度高。

消除系统误差是实验科学的任务之一,减小随机误差是误差理论的任务之一。现在我们所要讨论的误差理论基础是指随机误差而言。

(三)随机误差的特性

在实验过程中,过失误差是不允许存在的,系统误差是可以通过修正减至最小的,而随机误差的产生是不可预料的,也是无法制止的,似乎是没有规律,其实它是服从统计规律的,它具有以下四点特性。

(1)在一定测量条件下,误差的绝对值不超过一定的限度(有限性)。

(2)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会较多(单峰性)。

(3)绝对值相等的正负误差,出现的机会相等(对称性)。

(4)对于任一量作等精度的测量时,当测量的次数增加到无限多的时候,随机误差的算术平均值趋近于零。

若对某一量进行无限次的重复测量,而在测量中仅有随机误差,则这些测量值的分布曲线如图1-0-4所示。其中 x_i 为测量值,N_i 为某一测量值在重复测量中出现的次数。

变换一下坐标位置,就可表示误差的分布情况。图1-0-5所示曲线称为误差分布曲线,它完全显示了随机误差的四个特性。其中,Δx_i 为误差值;N_i 为某一误差值在重复测量中出现的次数。

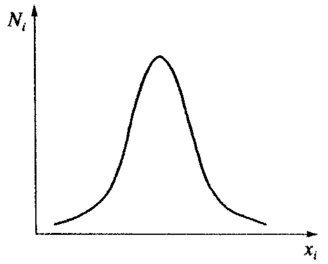

图 1－0－4　测量值的分布曲线

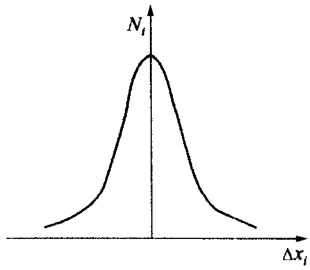

图 1－0－5　误差分布曲线

（四）多次直接测量结果的误差计算

由于随机误差存在于每一测量中，对随机误差的处理，在一般实验工作中常采用下面的方法。

1. 直接测量的算术平均值——最可靠值

设 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ 为 k 次直接测量的数值，则全部直接测量数值的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k}{k} \qquad (1-0-1)$$

当系统误差不存在，测量次数 k 增至无穷大时，算术平均值 $\bar{x}$ 等于待测量的真值。在一般情况下测量的次数 k 不要求太多，而是有限的。因此，算术平均值只是接近于真值的近似值。因它与直接测量中出现次数最多的测量值很相近，较为可靠，故把这算术平均值叫做最可靠值或最佳值。

直接测量值与真值的差叫真误差，直接测量值与最可靠值的差叫残差。

2. 算术平均误差

设每次直接测量的误差的绝对值（严格讲，这是残差 $v_i = x_i - \bar{x}$ 的绝对值）为

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|, i = 1, 2, 3, \cdots, k$$

则误差绝对值的算术平均值

$$\Delta x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| \qquad (1-0-2)$$

称为算术平均误差。

例 1：用千分尺测量一金属丝的直径，反复进行五次，测得数据是 $d_1 = 0.3235\text{cm}$，$d_2 = 0.3232\text{cm}$，$d_3 = 0.3236\text{cm}$，$d_4 = 0.3233\text{cm}$，$d_5 = 0.3231\text{cm}$。最可靠值是

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = 0.323\ 34\text{cm}$$

每次测量的误差绝对值是

$\Delta d_1 = |d_1 - \bar{d}| = 0.000\ 16\text{cm}$，$\Delta d_2 = |d_2 - \bar{d}| = 0.000\ 14\text{cm}$，$\Delta d_3 = |d_3 - \bar{d}| = 0.000\ 26\text{cm}$，$\Delta d_4 = |d_4 - \bar{d}| = 0.000\ 04\text{cm}$，$\Delta d_5 = |d_5 - \bar{d}| = 0.000\ 24\text{cm}$

算术平均误差是

$$\Delta d = \frac{\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 + \Delta d_4 + \Delta d_5}{5} = 0.000\ 17\text{cm} \approx 0.0002\text{cm}$$

对金属丝直径测量的结果是

$$d=(0.3233\pm0.0002)\text{cm}$$

这结果表明金属丝的真实直径一般不大会比 0.3235cm 大，也不大会比 0.3231cm 小，即金属丝直径在 0.3231cm 到 0.3235cm 之间的可能性最大。

有时误差可多保留一位数字，将测量的结果写为

$$d=(0.323\,34\pm0.000\,17)\text{cm}$$

3. 标准误差

标准误差，又称均方误差或均方根误差，它定义为各次测量值误差的平方和的平均值的平方根，即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_k^2}{k}}=\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i^2} \tag{1-0-3}$$

式中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 为各次测量的误差；k 为测量次数。

上述标准误差的定义，系对一组测量中各测定值（有的书上称为“单次测量”，这容易与只测量一次的单次测量混淆）的可靠程度的估计而不是对测量结果（平均值）的可靠程度的估计。显然，后者要比前者的可靠程度更高些，这一点将在下面谈到。

目前，我国和世界上许多国家都在科学报告中使用标准误差。

在实验中已消除系统误差和过失误差的情况下，当测定次数无限增多时，所得算术平均值为真值。实际上，测定的次数都是有限的，所得的平均值是最佳值而不是真值。由于真值往往都是不知道的，因而测定值与真值之差（误差）也是无法知道的。此时我们可以用测定值与平均值之差（残差）来估计测定值的标准误差。

设未知量的真值为 a，各测定值为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k$，对应于各测定值的误差为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_k$，残差为 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_k$，则

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_i=x_i-a\\
&v_i=x_i-\bar{x}\\
&x_1=a+\varepsilon_1=\bar{x}+v_1\\
&x_2=a+\varepsilon_2=\bar{x}+v_2\\
&\cdots\cdots\\
&x_k=a+\varepsilon_k=\bar{x}+v_k
\end{aligned} \tag{1-0-4}$$

式中，$\bar{x}$ 表示算术平均值，将式（1-0-4）中各等号两边相加，得

$$ka+\sum\varepsilon_i=k\bar{x}+\sum v_i$$

因为

$$\sum v_i=0$$

故

$$\bar{x}=\frac{ka+\sum\varepsilon_i}{k} \tag{1-0-5}$$

将式（1-0-5）代入式（1-0-4），得到

$$\begin{aligned}
&ka+\sum\varepsilon_i+kv_1=ka+k\varepsilon_1\\
&ka+\sum\varepsilon_i+kv_2=ka+k\varepsilon_2\\
&\cdots\cdots\\
&ka+\sum\varepsilon_i+kv_k=ka+k\varepsilon_k
\end{aligned}$$

整理后得

$$v_1 = \varepsilon_1 - \frac{\sum \varepsilon_i}{k}$$

$$v_2 = \varepsilon_2 - \frac{\sum \varepsilon_i}{k}$$

$$\cdots\cdots$$

$$v_k = \varepsilon_k - \frac{\sum \varepsilon_i}{k} \tag{1-0-6}$$

将式(1－0－6)两边取平方后相加，得

$$\sum v_i^2 = \sum \varepsilon_i^2 - 2\frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k} + k\left(\frac{\sum \varepsilon_i}{k}\right)^2 = \sum \varepsilon_i^2 - \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k} \tag{1-0-7}$$

而

$$(\sum \varepsilon_i)^2 = \sum \varepsilon_i^2 + \sum_{p \neq q} \varepsilon_p \varepsilon_q$$

$$p = 1, 2, \cdots, k; q = 1, 2, \cdots, k$$

根据随机误差的特征，当测量次数 k 相当大时，具有绝对值相等而符号相反的误差，出现的机会相等。故

$$\sum_{p \neq q} \varepsilon_p \varepsilon_q = 0$$

因而式(1－0－7)可化简为

$$\sum v_i^2 = \sum \varepsilon_i^2 - \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k} = \frac{k-1}{k}\sum \varepsilon_i^2 \tag{1-0-8}$$

根据标准误差的定义

$$\sigma^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{k}$$

故有

$$\sigma^2 = \frac{\sum v_i^2}{k-1}$$

则

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k-1}} \tag{1-0-9}$$

式(1－0－9)即为在有限次测量时，用残差表示标准误差的方法。显然 σ 是这 k 次测量的各个测定值的标准误差。

对于这 k 次测量的算术平均值的标准误差，将用式(1－0－10)来计算

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k(k-1)}} \tag{1-0-10}$$

式(1－0－10)的得来，可参见本节四。

下面举例说明如何利用式(1－0－10)来计算测量结果的标准误差。

例2：表1－0－1所示数据为对某一长度量测10次($k=10$)所得数据及算出的平均值、残差 v、残差的平方 v^2 及其和 $\sum v^2$，现在来求算各测量值 x_i 的标准误差 σ 和算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$。

表 1-0-1 某一长度测量数据

序号 i	$x_i(10^{-3}\text{cm})$	$v_i = x_i - \bar{x}(10^{-3}\text{cm})$	$v_i^2(10^{-6}\text{cm}^2)$
1	63.57	+6	36
2	63.58	+16	256
3	63.55	-14	196
4	63.56	-4	16
5	63.56	-4	16
6	63.59	+26	676
7	63.55	-14	196
8	63.57	-24	576
9	63.57	+6	36
10	63.57	+6	36
	$\bar{x}=63.564$		$\sum v_i^2 = 2040$

根据式(1-0-9)、式(1-0-10)及表1-0-1数据，有

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k-1}} = \pm\sqrt{\frac{2040\times10^6}{9}} = \pm 0.015\ 05\text{cm}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k(k-1)}} = \pm\sqrt{\frac{2040\times10^6}{10\times9}} = \pm 0.004\ 76\text{cm}$$

误差计算的结果，决不能看成是一个严正的结果，它只不过根据概率理论，对实验结果可靠程度的一种估计。因此，一般情况下，算出的误差，至多取两位有效数字，在考虑最不利的情况下，总是将两位以后的数字向上入一位，于是上述 σ 及 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma = \pm 0.015\text{cm}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm 0.005\text{cm}$$

测量的最后结果应表示为

$$x = (63.564 \pm 0.005)\text{cm}$$

在实际计算中，还广泛应用下列计算标准误差的公式

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^k x_i^2 - (\sum x_i)^2/k}{k-1}} = \sqrt{\frac{\sum_1^k x_i^2 - k\bar{x}^2}{k-1}} \qquad (1-0-11)$$

式(1-0-11)的优点在于计算时可不必先算出各残差，特别是在用计算器时更为方便。

式(1-0-11)可以很容易地从式(1-0-9)推导出来，由式(1-0-9)

$$\sigma^2 = \frac{\sum v_i^2}{k-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{k-1}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) \\ &= \sum x_i^2 + k\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum x_i\end{aligned}$$

$$= \sum x_i^2 + k\bar{x}^2 - 2k\bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - k\bar{x}^2$$

则

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - k\bar{x}^2}{k-1} = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/k}{k-1}$$

4. 相对误差

误差与真值之比，称为相对误差。

相对误差 = 误差/真值

故又常称误差本身为绝对误差。相对误差表示了测量值误差是真值的百分之几，有时又写成

相对误差 =（误差/真值）×100%

若考虑的仅仅是随机误差，测量结果的相对误差一般是

相对误差 =（算术平均误差/最可靠值）×100%

或

相对误差 =（标准差/最可靠值）×100%

例 1 中，对金属丝测量的相对误差是

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0.0002}{0.3233} = 0.0006 = 0.06\%$$

例 2 中，对某一量测量的相对误差是

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{0.005}{63.564} = 0.000\ 079 = 0.0079\%$$

绝对误差和相对误差是误差的两种表示方法，而相对误差可更明显地表示出测量的精确程度。例如，用螺旋测微计（千分尺）测得金属丝的直径 $d = (0.3233 \pm 0.0002)$ cm，用米尺测得金属丝的长度 $L = (100.00 \pm 0.05)$ cm，如果只比较它们二者的绝对误差，显然前者比后者小，但它们的相对误差恰恰相反，前者的相对误差是 0.0002/0.3233 = 0.06%。后者的相对误差是 0.05/100.00 = 0.05%，这说明金属丝长度的测量与直径的测量相比较较精确。因此，在计算测量的结果时，应同时算出测量值的绝对误差和相对误差。

（五）一次直接测量结果的误差估计——最大绝对误差

在测量中，有时不需要对随机误差做较精确的计算，或者多次测量值的变化不超过仪器的最小分度值，或者待测量如位移、温度、气压等随时间变化而不能简单地完全恢复，只要（或只能）进行一次或两次测量即可。遇到这种情况，我们就用仪器的精度所规定的误差来表示测量的误差。所谓仪器的精度，就是在正确使用情况下，它所能指出最大误差的界限，叫最大误差界。游标卡尺的最大误差界是其最小分度值。但大多数情况下，最大误差界是仪器最小分度值的一半。如螺旋测微计（千分尺），米尺、停表，温度计等。我们以米尺，卡尺，千分尺为例来说明，如表 1－0－2。

表 1－0－2　米尺、卡尺、千分尺的最大误差界

测量仪器	精度	误差界	有效数字	相对误差
米尺	1mm	0.5mm	20.6mm	2.4%
卡尺	0.1mm	0.1mm	20.6mm	0.5%
千分尺	0.01mm	0.005mm	20.614mm	0.024%

若选用仪器的精度与其他因素所引起的随机误差接近或略为超过,就可用仪器的最大误差界来表示直接测量的绝对误差,叫做直接测量的最大绝对误差。例如用米尺测得的长度是20.6mm,则测量的结果写为

$$d=(20.6\pm0.5)\,\mathrm{mm}$$

以仪器的精度来估计最大绝对误差的大小,也要考虑到环境和感觉器官的情况,如光线较暗,或有振动干扰时,误差就要估计得稍大一些,甚至是一个最小分度。对米尺来说,误差可估计为0.5mm,甚至可估计为1mm。对温度计来说,一般可以估计为0.5℃,而在光线较暗或温度变化较快的情况下,可估计为1℃。关于电学仪表的精度,是以级别来划分的,如1.5级,表示其相对误差是满刻度值的1.5%。

(六)间接测得量的误差传递公式

间接测定值是指由几个直接测定值按一定的函数关系求出的数值。物理实验中进行的多数测定,都是求间接测定值,因而对间接测定值的可靠程度的估计,就是要从直接测定值的最佳值及其误差,计算出间接测定值的最佳值及其误差。

设间接测定值 y 是由若干个独立的直接测定值 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m$ 决定的,即

$$y=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)$$

若 x_i 的误差为 Δx_i,而且一般情况下,$\Delta x_i \ll x_i$,则 y 的误差 $\xi \ll y$。因为

$$y+\xi=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_m+\Delta x_m) \tag{1-0-12}$$

将式(1-0-12)按泰勒级数展开,并略去高阶小量以后,得到

$$y+\xi=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m \tag{1-0-13}$$

即:

$$\xi=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m \tag{1-0-14}$$

因为式(1-0-14)右边的 Δx_i 的符号无法确定,故改写成

$$\xi=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right||\Delta x_1|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right||\Delta x_2|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right||\Delta x_m| \tag{1-0-15}$$

式(1-0-15)是从最不利的情况考虑的,因而求出的误差 ξ 是最大误差。为避免这一情况,我们可以将式(1-0-15)两边平方,即

$$\xi^2=\left[\sum_1^m\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)\right]^2=\sum_1^m\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right]^2+\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_q}\Delta x_p\Delta x_q\right)$$

若对这 m 个测定值 $x_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 分别进行 k 次等精度测量,得 $x_{i1},x_{i2},x_{i3},\cdots,x_{ik}$,那么将有

$$\xi_1{}^2=\sum_{i=1}^m\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_{i1}\right]^2+\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p1}}\frac{\partial f}{\partial x_{q1}}\Delta x_{p1}\Delta x_{q1}\right)$$

$$\xi_2{}^2=\sum_{i=1}^m\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_{i2}\right]^2+\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p2}}\frac{\partial f}{\partial x_{q2}}\Delta x_{p2}\Delta x_{q2}\right)$$

……

$$\xi_k{}^2=\sum_{i=1}^m\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_{ik}\right]^2+\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{pk}}\frac{\partial f}{\partial x_{qk}}\Delta x_{pk}\Delta x_{qk}\right)$$

对上列各式左右两边分别求和,得