工科数学基础

线性代数教程学习指导

严守权 编

6

清华大学出版社

工科数学基础

线性代数教程学习指导

严守权 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与《线性代数教程》(严守权,清华大学出版社,2007)配套的学习指导书.依据《工科本科数学基础课教学基本要求》及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,并结合编者多年的教学及考研辅导的经验编写而成.本书为主教材中的各章配写了内容提要、全章要点、典型例题解析、综合练习、参考答案5部分内容,并附有《线性代数教程》的习题解答.

本书归纳条理明晰、重点讲述透彻、考点分析详细、例题选配多样、习题配置丰富,既便于学生复习、自学,也利于考生备考,可供高等院校工科类各专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程学习指导/严守权编.—北京:清华大学出版社,2007.11
(工科数学基础)
ISBN 978-7-302-16171-4

Ⅰ.线… Ⅱ.严… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第147178号

责任编辑:刘 颖
责任校对:刘玉霞
责任印制:杨 艳
出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175 **邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015 **客户服务**:010-62776969
印 刷 者:北京四季青印刷厂
装 订 者:三河市金元印装有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:12.75 **字 数**:251千字
版 次:2007年11月第1版 **印 次**:2007年11月第1次印刷
印 数:1~4000
定 价:18.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177转3103 产品编号:020964-01

丛 书 序

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求. 与此同时，全国硕士研究生入学统一招生考试的规模也在不断扩大，其中数学考试对于高等院校工科类专业的公共数学课的影响也愈来愈大. 为适应这个变化，许多学校工科类专业的数学基础课，经过多年调整，实际教学大纲已经与工科类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容逐步协调一致. "工科数学基础"正是适应我国高校工科类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材. 全套教材包括《高等数学教程》(上册、下册)、《线性代数教程》、《概率统计教程》，以及相应的学习指导用书.

本套教材的主教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的. 突出了对这两个大纲所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求.

本套教材中针对主教材配套推出了《高等数学教程学习指导》、《线性代数教程学习指导》、《概率统计教程学习指导》这三本相应的学习指导用书. 主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结，说明重点、难点，进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，便于学生自学. 此外，还着重对教材中的题目类型作必要的补充，增加了相当数量的研究生入学统一考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力方面，帮助学生实现跨越，达到全国硕士研究生入学统一考试对数学(一)、(二)的要求. 因此，这三本学习指导用书完全可以实现全国硕士研究生入学统一考试数学考试复习参考书的功能，在日后报考研究生时发挥积极作用.

参加《工科数学基础》的编写人员大多具有 30 年以上从事公共数学基础课程的教学研究、教材研究和教学实践的经历，其中很多教师还多年从事研究生入学统一考试数学考试考前辅导工作，有相当高的知名度. 因此，作者在把握工科类公共数学基础课程的教学内容和要求、时数安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这对于本套教材的编写质量是一个可靠的保障.

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨炼和广大读者的支持与帮助. 欢迎广大读者对本套教材的不足提出批评和建议.

《工科数学基础》作者

2007 年 3 月

目　录

第 1 章

行　列　式

1.1　内容提要

1.1.1　行列式的概念

排列及其逆序数

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 称为一个 n 级排列. 在一个排列中,如果大的数排在小的数的前面,称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$. 如果一个排列的逆序数是偶数,则称之为偶排列,如果一个排列的逆序数是奇数,则称之为奇排列.

行列式的概念

定义　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 构成一个 n 级排列,当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为偶排列时,对应项取正号,当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为奇排列时,对应项取负号. 即

$$D=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

n 阶行列式共 $n!$ 项,其中带正号和带负号的项各占一半.

1.1.2　行列式的基本性质

(1) 行列式和它的转置行列式相等.

(2) 行列式两行(列)互换,行列式改变符号.

(3) 数乘行列式等于用这个数乘行列式中任意一行(列).

(4) 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数之和,则此行列式等于两个行列式之和,这两个行列式的这一行(列)的元素为对应两个加数之一,其余各行(列)元素与原行列式相同.

(5) 将行列式的某行(列)的 k 倍加至另一行(列),其值不变.

1.1.3 行列式按行(列)展开

在 n 阶行列式 $\det D$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列,余下的元素按原有顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},M_{ij} 前加符号 $(-1)^{i+j}$,称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

在 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$,在其交叉位置上的元素构成的 k 阶行列式,称为 D 的一个 **k 阶子式**,记作 M. 在 D 中划去 M 的元素后,剩下的元素构成的 $n-k$ 阶行列式称为 **k 阶子式 M 的余子式**,记作 N. 如果 k 阶子式 M 在 D 中所在的行标和列标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k,j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$ 为 **k 阶子式 M 的代数余子式**,记作

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N.$$

定理(行列式按行(列)展开) 设 D 为 n 阶行列式,则有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D, & s=i,\\ 0, & s\neq i,\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D, & j=t,\\ 0, & j\neq t.\end{cases}$$

***拉普拉斯定理** n 阶行列式 D 等于任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,\quad t=\mathrm{C}_n^k.$$

直接应用拉普拉斯定理得公式:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ * & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & *\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}* & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 n,m 阶方阵,$*$ 处表示相应的矩阵).

1.1.4 克拉默法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

其中 D_j 是将 D 的第 j 列用常数项替换后所得的行列式.

线性方程组(1.1)对应的齐次线性方程组仅有零解的充要条件是 $D\neq0$.

1.2 全章要点

1. **行列式的定义** 注意掌握行列式中一般项大小和正负号的确定方法,会运用定义确定行列式的指定项.

2. **余子式、代数余子式** 了解余子式、代数余子式的概念,掌握按行(列)展开行列式的方法,了解行列式按 k 行(列)展开的拉普拉斯定理.

3. **行列式的计算** 行列式的计算在以后各章都有广泛应用,是全章的重点. 常用计算方法如下:

(1) 二、三阶行列式可直接用"对角线法则".

(2) 化上(下)三角行列式法,即利用行列式性质化为三角行列式,直接计算. 有些特殊结构,可利用性质化为两行(列)成比例定值.

(3) 降阶法. 利用行列式性质,将行列式某行(列)化为仅有个别元素不等于零,再按该行(列)展开,化为较低阶的行列式计算. 对于某些特殊结构的行列式,利用这种方法可以得到从高阶行列式到低阶行列式的递推关系,即用"递推法"计算行列式.

计算高阶行列式还可以利用 "加边法"和"数学归纳法"计算 . 由于这类题具有方法灵活,技巧性强的特点,可通过适量的练习克服这一难点.

4. **了解一些特殊结构的行列式的计算方法和结果,有助于提高解题能力**

(1) 三角行列式等于对角线元素的乘积.

(2) n 阶副对角线行列

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) **范德蒙行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (a_i - a_j).$$

(4) 奇数阶**反对称行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad n = 2k+1.$$

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 m,n 阶方阵.

5. **克拉默法则** 会利用克拉默法则求解线性方程组.

1.3 典型例题解析

1.3.1 行列式的概念

例 填空.

(1) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 5 & 0 & x \\ -7 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的常数项为________，$f''(x) =$ ________.

(2) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为 4 阶行列式，且 $|\boldsymbol{A}| = 5$，记 $\boldsymbol{a}_j$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 j 列，则 $|\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \boldsymbol{a}_{j_3}, \boldsymbol{a}_{j_4}| =$ ________.

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & -2 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & -27 & 64 \\ -1 & 16 & 81 & 128 \end{vmatrix}=$__________.

(5) 设$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & a & -1 & 2 & -b \\ -a & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & -7 & 7 \\ -2 & -4 & 7 & 0 & 0 \\ b & 5 & -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,当$a,b$为__________时,$|\boldsymbol{A}|=0$.

解析 (1) 本题是根据行列式的定义对特定项的选取问题.其中$f(x)$的常数项即为

$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,由不同行不同列的构成规则,其非零项应由元素$a_{34},a_{43},a_{21}$,$a_{12}$乘积构成,即$(-1)^{\tau(3421)+\tau(4312)}3\times1\times2\times(-1)=-6$.由于$f(x)$是二次多项式,求$f''(x)$,只要求出$x^2$项.由不同行不同列的构成规则,$x^2$项应有两项构成,即$(-1)^{\tau(1234)}x\times5\times4\times x=20x^2$,及$(-1)^{\tau(1432)}x\times x\times4\times(-7)=28x^2$.于是

$$f''(x)=(20x^2+28x^2)''=-96x.$$

(2) 计算$|\boldsymbol{a}_{j_1},\boldsymbol{a}_{j_2},\boldsymbol{a}_{j_3},\boldsymbol{a}_{j_4}|$,只需将其中各列作对换调整到原行列式中的位置,调换中行标未动,符号的变化仅与列标排列有关.由于任何一个n级排列经若干次对换均可化为自然序排列$1,2,\cdots,n$,且变换次数的奇偶性同排列$j_1j_2\cdots j_n$的奇偶性.于是

$$|\boldsymbol{a}_{j_1},\boldsymbol{a}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{j_n}|=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}|\boldsymbol{A}|=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}5.$$

(3) 这是副对角线行列式,计算时,切不可套用只适用于二、三阶行列式的对角线法确定其符号,对应项符号由两部分构成:一是元素自身正负号,即$(-1)^n$;二是按行列式定义该项由行标和列标逆序数确定的符号,即$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.因此,

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n}n!=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n!.$$

(4) 经整理可以看出这是由数$-1,2,-3,4$构成的范德蒙行列式,由公式有

$$D=2\times(-3)\times4\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ -1 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$=-24\times(4+1)(4-2)(4+3)(-3+1)(-3-2)(2+1)$$
$$=-52400.$$

(5) 这是奇数阶的反对称行列式,其值为零.因此,a,b 可取任意实数.

1.3.2 用行列式性质计算行列式

类型 1 用三角化法计算行列式.

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式性质化行列式为三角行列式,是行列式计算中最常见的方法.尤其是数值行列式的计算,要保证计算顺畅,关键先将首列首行元素先化为1.因此交换第1,3列,有

$$D=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-1)\quad\times(2)\quad\times(1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \times(3)\quad\times(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \times\frac{5}{22} \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 22 & 15\\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{22}\end{vmatrix}=9.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

解 *方法 1* 将各列加至第 1 列，提取公因子 x，再将第 1 列加至第 2,4 列，减至第 3 列，得

$$D=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4.$$

方法 2 行列式各列都可看作两数之和，可利用性质 4，拆分为 2^4 个行列式. 其中两列元素相同的取值为零. 仅有 5 个非零，再整理即得结果：

$$D=\begin{vmatrix}0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1\\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1\\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1\\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & x & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x & -1\\ 0 & x & 0 & -1\\ x & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1 & 0\\ x & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & x\\ 0 & -1 & x & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ x & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=x^4-x^3+x^3-x^3+x^3=x^4.$$

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

解 用加边法,计算. 即

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix} \quad \times(-a_1) \quad \times(-a_2) \quad \cdots \quad \times(-a_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-a_1) \\ \times\left(-\frac{1}{2}a_2\right) \\ \vdots \\ \times\left(-\frac{1}{n}a_n\right) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}a_i^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}a_i^2\right)n!.$$

类型 2 拆分法.

例 4 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为三阶行列式,$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的 3 列,则下列行列式中与 $|\boldsymbol{A}|$ 等值的是(　　).

A. $|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1|$　　B. $|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3|$

C. $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|$　　D. $|2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2|$

解析 如果行列式某行(列)由两个数的和组成,可利用性质 4 拆分处理. 如果其中

有 m 个行(列)是由两数之和组成,可拆分为 2^m 个行列式,排除其中为零的行列式,即可推得结论. 如选项 A 中非零组合的有 $|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|+|-\boldsymbol{a}_2,-\boldsymbol{a}_3,-\boldsymbol{a}_1|=0$,B 中非零组合有 $|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|$,C 中非零组合为 $|\boldsymbol{a}_1,-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|+|\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3|=-2|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|$,D 中无非零组合,故取 B.

例 5 证明

$$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

证 等式左边每列均为两数之和,可拆分为 2^3 个单一行列式. 其中去掉两列成比例的为零项,共有非零项 2 个. 于是有

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & ay \\ ay & az & ax \\ ax & ay & az \end{vmatrix} \\ &= b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = \text{右边}. \end{aligned}$$

类型 3 行列式形式的方程解的讨论.

行列式的性质主要用于行列式值的计算. 此外,还常见于行列式形式的方程解的讨论和计算:一是要确定行列式展开后未知量幂次,以确定方程解的个数;二是给出使行列式为零的解.

例 6 方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ x & 6-x & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

的全部解为__________.

解析 该方程为二次方程,共有 2 个解,满足行列式为零. 利用行列式性质,当第 1,2 行元素比值为 $\frac{1}{2}$ 时,其值为零,即 $3-x=\frac{x}{2}$ 及 $4=6-x$,得 $x_1=2$. 同理,当第 1,3 行元素比值为 $-\frac{1}{2}$ 时,值为零,即 $3-x=2$,得 $x_2=1$. 故方程全部解为 2,1.

例 7　方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$$

的根的个数为(　　).

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

解析　这是问 $f(x)$是几次多项式的问题.应先对 $f(x)$作恒等变形,运用行列式性质可起到简化的作用.即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 & -2 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}.$$

可知 $f(x)$为二次式,因此有 2 个根,取 B.

1.3.3　用降阶法计算行列式

用降阶法也是最常见的计算行列式的方法之一.通常是在某行列含零元素较多情况下应用.

类型 1　代数余子式代数和的运算.

例 1　设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.求:

(1) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$;　(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解　求某一行或一列代数余子式的代数和,可以由定义一一计算,但较为繁琐.若利

用余子式的性质计算，就简单得多. 方法如下：

(1) 注意到 $a_{11}=1, a_{21}=-1, a_{31}=1, a_{41}=-1$，从而有

$$A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0.$$

(2) 由 A_{ij} 与元素 a_{ij} 取值无关，因此，可构造新的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，该行列式虽然与原行列式的第 4 行元素不同，但与第 4 行元素对应的代数余子式相同. 从而有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

类型 2 用降阶法计算行列式.

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解 本题行列式中多数元素为零，可用降阶法计算，按最后一行展开，有

$$D_n=a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & x & -1 \end{vmatrix}+a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & & & \\ 0 & -1 & & \\ & x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(x+a_1)(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n+2}(-1)^{n-2}x+\cdots+(a_1+x)x^n$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-1}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n.$$