■ 工科数学基础

高等数学教程（上册）

吴良大　主编

清华大学出版社

工科数学基础

高等数学教程（上册）

吴良大　主编
吴良大　杨振梅　蒲法贵　金继红　编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书按照《工科类本科数学基础课教学基本要求》，并参照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，同时结合作者多年的教学经验编写而成.

本书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限、连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用与微分方程初步，空间解析几何，共7章. 下册内容包括多元函数微分学及其应用，多元函数的积分及其应用，第二型曲线积分、曲面积分与场论，级数，微分方程，共5章.

本书注重基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容体系完整，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对本科公共数学基础课教学的基本要求，可供高等院校工科类专业的学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程. 上册/吴良大主编. —北京：清华大学出版社，2007.7
（工科数学基础）
ISBN 978-7-302-14869-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 035698 号

责任编辑：刘　颖
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969

印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：16.25　**字　数**：332 千字
版　　次：2007 年 7 月第 1 版　　**印　次**：2007 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：22.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103　　产品编号：020967-01

丛书序

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求. 与此同时，全国硕士研究生入学统一招生考试的规模也在不断扩大，其中数学考试对于高等院校工科类专业的公共数学课的影响也愈来愈大. 为适应这个变化，许多学校工科类专业的数学基础课，经过多年调整，实际教学大纲已经与工科类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容逐步协调一致. “工科数学基础”正是适应我国高校工科类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材. 全套教材包括《高等数学教程》(上册、下册)、《线性代数教程》、《概率统计教程》，以及相应的学习指导用书.

本套教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的. 突出了对这两个大纲所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求.

本套教材针对主教材配套推出了《高等数学教程学习指导》、《线性代数教程学习指导》、《概率统计教程学习指导》这三本相应的学习指导用书. 主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结，说明重点难点，进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，便于学生自学. 此外，还着重对教材中的题目类型作必要的补充，增加了相当数量的

研究生入学统一考试试题题型,力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力方面,帮助学生实现跨越,达到全国硕士研究生入学统一考试对数学(一)、(二)的要求.因此,这三本学习指导用书完全可以实现全国硕士研究生入学统一考试数学考试复习参考书的功能,在日后报考研究生时发挥积极作用.

参加“工科数学基础”的编写人员大多具有30年以上从事公共数学基础课程的教学研究、教材研究和教学实践的经历,其中很多教师还多年从事研究生入学统一考试数学考试考前辅导工作,有相当高的知名度.因此,作者在把握工科类公共数学基础课程的教学内容和要求、时数安排和难易程度,以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验,这对于本套教材的编写质量是一个可靠的保障.

我们知道,一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨炼和广大读者的支持与帮助.欢迎广大读者对于本套教材使用过程中存在的不足提出批评和建议.

《工科数学基础》作者

2007年3月

目录

第1章 函数、极限、连续

高等数学是研究微积分及其应用的学科，它属于数学分析的范畴. 而极限方法是研究微积分的基本方法. 连续是极限方法的直接应用，连续函数也是我们研究的主要对象.

本章将对微积分的研究作分析基础上的准备.

1.1 函 数

函数的概念与基本初等函数的性质和图形在中学已经学过，本节只是中学内容的复习、总结与提高.

1.1.1 预备知识

1. 常用集合的符号

本书所说的数都是实数. 全体实数的总体称为实数集，记作$\mathbb{R}$. 我们知道，若把数轴上的点对应到其坐标的实数，则数轴上的点与实数集$\mathbb{R}$建立了一一对应. 为方便起见，以后实数与数轴上的点的称呼不加区别. 例如，数 x 有时说点 x，反之亦然.

为叙述方便，先介绍一个符号："$\overset{\text{def}}{=\!=}$". 符号"$\overset{\text{def}}{=\!=}$"表示"定义"的意思. 例如数 x 的绝对值为

$$|x| \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

其含义是：符号"$\overset{\text{def}}{=\!=}$"的左端表示 x 绝对值的记号，其右端表示 x 绝对值的含义.

本书所说的数集都是实数集$\mathbb{R}$的子集. 实数集$\mathbb{R}$有下列重要子集：

全体非负整数的集合称为自然数集，它为 $\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=\!=} \{0,1,2,3,\cdots\}$；

全体正整数的集合为 $\mathbb{N}^{+} \overset{\text{def}}{=\!=} \{1,2,3,\cdots\}$；

全体整数的集合为 $\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=\!=} \{0,1,-1,2,-2,\cdots\}$；

全体有理数的集合为 $\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \dfrac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^{+} \right\}$；

全体正实数的集合为 $\mathbb{R}^{+} \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x > 0\}$.

没有元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如集合$\{x \mid x^2+1=0, x \in \mathbb{R}\}$就是空集.

若集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subset B$.

2. 区间

区间是常用的一类数集. 下面四种区间称为**有限区间**.

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$.

开区间：$(a,b)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]\xlongequal{\text{def}}\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开区间：$(a,b]\xlongequal{\text{def}}\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

半开区间：$[a,b)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

a 与 b 称为此有限区间的端点.

符号“$+\infty$”与“$-\infty$”分别读作“正无穷”与“负无穷”.

除有限区间外，还有无限区间，例如

$$(a,+\infty)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x>a\}\text{ 与 }(-\infty,b]\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\leqslant b\}$$

都是**无限区间**.

实数集$\mathbb{R}$ 也记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间，有限区间与无限区间统称区间，一般的区间通常用 I 表示.

3. 邻域、内点

对任意的正数 δ，开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的 δ **邻域**，简称点 a 的邻域，记作 $U(a,\delta)$或简记作 $U(a)$. 数集$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$称为点 a 的**去心邻域**(或称空心邻域)，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$或简记作 $\mathring{U}(a)$.

设 I 为区间，$x\in I$，若存在 x 的邻域 $U(x,\delta)\subset I$，则称 x 为 I 的**内点**. 显然开区间(a,b)都是由其内点组成的.

4. 逻辑符号

符号“$\forall$”表示“任意给定”的意思. 如“任意一个实数 x”可记作“$\forall x\in\mathbb{R}$”. 这里的实数 x 有任意性与给定性两层意思. 任意性是指它可代表实数$\mathbb{R}$ 中任意一个数，给定性是指 x 一旦从$\mathbb{R}$ 中取出后，它在数轴上的位置就定了，它就是一个具体的、固定的数.

符号“$\exists$”表示“存在”的意思. 例如，“$\forall a\in\mathbb{R}$，$\exists$ 正整数 $N\geqslant a$”. 它是显然成立的命题. 事实上，可取 $N=[|a|]+1$. ①

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”. 设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题. 例如，“$A\Rightarrow B$”是指，若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B. 这时称 A 是 B

---

① $\forall x\in\mathbf{R}$，$[x]$表示不大于 x 的最大整数，例如$[5.1]=5$，$[5]=5$，$[-5.1]=-6$.

的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件.

符号"$\Leftrightarrow$"表示"必要充分"或"等价"."$A\Leftrightarrow B$"表示命题 A 与命题 B 等价,或命题 A 蕴涵命题 B,同时命题 B 蕴涵命题 A,即"$A\Rightarrow B$"与"$B\Rightarrow A$"同时成立. 例如 $a^2+b^2=0$ 的必要充分(简称充要)条件是 $a=0$ 且 $b=0$.

1.1.2 函数的概念及其图形

在中学已学过映射,即设 A,B 是两个非空集合,对集合 A 中任意一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应法则 f 叫做从集合 A 到集合 B 的**映射**. 记作 $f:A\to B$. 如果 A,B 都是数集,则从数集 A 到数集 B 的映射叫做**函数**. 因此,函数是特殊的映射.

定义 设 D 是实数集$\mathbb{R}$的非空子集. 若对 D 中每一点 x,对应唯一的实数 y,则这些对应所构成的对应法则 f 称为函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中,集合 D 称为函数 f 的**定义域**,记作 D_f. 定义域 D_f 中的数 x 所对应的数 y 记作 $f(x)$,称为点 x 的函数值. 这时,x 称为**自变量**,函数值 y 或 $f(x)$ 称为**因变量**. 函数值的全体称为函数 f 的**值域**,记作 $f(D_f)$. 即

$$f(D_f)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

若 E 是 D_f 的子集,f 在 E 上的值域也记作 $f(E)$. 即 $f(E)=\{y\mid y=f(x),x\in E\subset D_f\}$.

例 1 设数集 $D=\{1,2,3\}$,令 1 对应到 3,2 对应到 7,3 对应到 100. 记作 $1\to 3,2\to 7,3\to 100$. 这些对应所构成的对应法则就是定义域 D 上的函数.

例 2 半径为 r 的圆的面积是 $A=\pi r^2$. r 的变化范围是$\mathbb{R}^+$. 这时,对任意的 $r\in\mathbb{R}^+$,$r\to\pi r^2$. 此对应法则就是定义域$\mathbb{R}^+$上的函数.

通常用拉丁字母 f,g,h,F,G,H 或希腊字母 φ,ψ 等来表示函数. 在同一问题中,不同的函数要用不同的符号来表示. 近代微积分主张区别函数符号 f 与函数值符号 $f(x)$. f 是整个对应法则,而 $f(x)$ 只是 x 点的函数值. 如果要把 $f(x)$ 看成函数,必须把它看成整个对应法则.

从函数定义可看出,两个函数相等,首先要它们的定义域相同,其次是定义域上每点的函数值都相等.

我们知道,函数是定义域中的点与其对应的数之间的对应法则. 因此,它与自变量、因变量所取的记号无关. 下面三个函数都应看成同一个函数.

(1) $y=f(x),x\in D_f$;

(2) $s=f(t),t\in D_f$;

(3) $x=f(y),y\in D_f$.

对函数，我们经常借助它们的图形直观形象地来研究函数的性质.

设函数 f 的定义域为 D_f，则平面直角坐标系 xOy 中的点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为**函数 f 的图形**（图 1.1）.

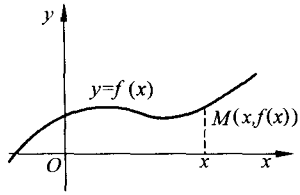

图 1.1

例 3 函数 $y=x^2(x\in\mathbb{R})$ 的图形是抛物线（图 1.2）. 函数 $y=x^3(x\in\mathbb{R})$ 的图形见图 1.3.

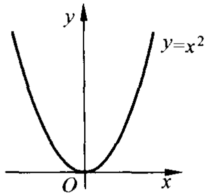

图 1.2

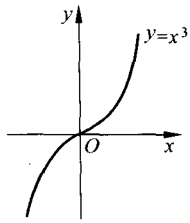

图 1.3

1.1.3 函数值的计算、分段函数

用公式表示的函数，若未指出其定义域，则认为使公式中函数值有意义的自变量的集合是函数的定义域. 这种定义域称为函数的**自然定义域**.

例 4 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为 $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}\text{ 且 }x\neq 1\}$. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 的定义域 $D_f=\mathbb{R}^+$.

例 5 设 $f(x)=x^2+\sin x-1$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(x^2)$，$f(-t^2)$.

解 求 f 在点 x 的函数值，只要把 x 代入下式括号内进行运算，可得函数值 $f(x)$.

$$(\quad)^2+\sin(\quad)-1.$$

因此

$$f(0)=0^2+\sin 0-1=-1,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\sin\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi^2}{4},$$

$$f(x^2)=(x^2)^2+\sin(x^2)-1=x^4+\sin(x^2)-1,$$

$$f(-t^2)=(-t^2)^2+\sin(-t^2)-1=t^4-\sin(t^2)-1.$$

例 6 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

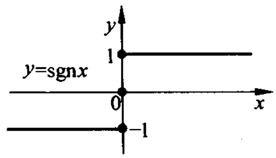

图 1.4

称为符号函数,它的定义域为$\mathbb{R}$,值域为$\{1,0,-1\}$.它的图形如图 1.4 所示.此函数在定义域中几部分分别用不同的公式表示,这种函数称为**分段函数**.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\geqslant 0,\\ x^2+4, x<0,\end{cases}$ 求 $f(x-1)$的表达式.

解 当 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$ 时,$f(x-1)=2(x-1)+1=2x-1$,当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时,$f(x-1)=(x-1)^2+4=x^2-2x+5$.所以

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x^2-2x+5, & x<1.\end{cases}$$

1.1.4 函数的几种特性

(1) **函数的有界性** 设函数 f 在数集 E 上有定义.若存在数 K_1,使得对 $\forall x\in E$,都有

$$f(x)\leqslant K_1,$$

则称函数 f 在 E 上**有上界**,而 K_1 称为函数 f 在 E 上的一个上界.若存在数 K_2,使得对 $\forall x\in E$,都有

$$f(x)\geqslant K_2,$$

则称函数 f 在 E 上**有下界**,而 K_2 称为函数 f 在 E 上的一个下界.若存在正数 M,使得对 $\forall x\in E$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 f 在 E 上**有界**.若这样的 M 不存在,则称函数 f 在 E 上**无界**.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是无界函数,但在$[1,+\infty)$上是有界函数.

(2) **函数的单调性** 设函数 f 在区间 I 上有定义.若 $\forall x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,都有不等式

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 f 在区间 I 上是**单调增加**的.若 $\forall x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,都有不等式

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 f 在区间 I 上是**单调减少**的.单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增加与单调减少的函数的图形特性如图 1.5 与图 1.6 所示.