

通用結構學

(第二部)

謝元裕 編著



文 笙 書 局 印 行

序

本書為大專通用之結構學教科書，故定名為「通用結構學」。全書析為二部：第一部份約占 3/5，屬於普通結構學教材，應為大專土木水利建築等系所必修；第二部份約占 2/5，屬於加強之材料，是土木水利主修結構之學生所應讀，而為大專有關科系學生之參考。

第一部份大體依照拙著結構基本理論編述，第二部份大多採自拙著結構學新編，融匯而成一書。然十餘年來，結構學重點已有變化，故除對兩書去蕪存菁外，亦多修訂，俾更適於今日之教學。至於原有明白曉暢之特點，則一仍舊貫。

本書所用度量衡制，不拘於一種，英制、米制，以及國際制，分別穿插於例題與習題中。英制雖應淘汰，然工業先進之美國，尚無決心作全面之更張，故本書仍予保留。

夫出版教科書，非細事也，作者必須先有一段作育後學之「誠」，始能下筆編述以「謹」。本書之編，固處處皆為初學困難着想，不敢草率從事；而文笙書局經理陳昇一兄特別重視土木建築教材之搜集，不遺在遠，有足多者。

一九八四夏 謝 元 裕 時客加州蒙德瑞園

目 錄

通用結構學第一部

第一章 緒論	1
1-1 土木結構	1
1-2 結構學定義	2
1-3 結構學分類	4
1-4 實際結構與理想結構	5
1-5 本書範圍	7
第二章 結構之穩定與可定	9
2-1 引言	9
2-2 共面力系之平衡方程	10
2-3 支承反力	12
2-4 結構斷面之內力	15
2-5 構造上的條件方程	17
2-6 論結構視為整個剛體時，其支承的穩定與可定	17
2-7 結構的全般穩定與可定	21
第三章 靜定梁	33
3-1 引言	33
3-2 靜定梁之分析	34
3-3 載重，剪力與彎矩間之關係	43
3-4 數值例題	46
第四章 靜定桁架	51
4-1 引言	51
4-2 桁架分析的基本方法	53
4-3 靜定桁架之通解	59
4-4 橋架與屋架述略	62

第五章 靜定剛架與合成結構	72
5-1 引言	72
5-2 靜定剛架之分析	72
5-3 靜定合成結構之分析	78
第六章 靜定結構之影響線	85
6-1 引言	85
6-2 影響線之應用	88
6-3 靜定梁影響線舉例	90
6-4 靜定橋桁架的影響線	97
6-5 集中載重系與影響線	102
第七章 結構之彈性變形	117
7-1 引言	117
7-2 彈性線之曲率	118
7-3 外功和內功	121
7-4 虛功法(單位載重法)	124
7-5 卡氏定理	139
7-6 共軛梁法	147
第八章 諧合變位法分析靜不定結構	159
8-1 引言	159
8-2 諧合變位法分析靜不定梁	162
8-3 諧合變位法分析靜不定剛架	170
8-4 諧合變位法分析靜不定桁架	172
第九章 最小功法分析靜不定結構	183
9-1 引言	183
9-2 最小功法分析靜不定梁	184
9-3 最小功法分析靜不定剛架	191
9-4 最小功法分析靜不定桁架	193
9-5 最小功法分析靜不定合成結構	197
第十章 靜不定結構之影響線	103
10-1 馬克斯威撓度互易定理	103

10 - 2	變位結構構成影響線——慕拉 - 勃萊斯勞法則·····	205
10 - 3	靜不定結構影響線之描法·····	207
10 - 4	數值例題·····	210
10 - 5	諧合變位法求靜不定結構影響線·····	217
第十一章	斜坡撓度法分析靜不定梁及剛架·····	223
11 - 1	引言·····	223
11 - 2	斜坡撓度基本式·····	223
11 - 3	斜坡撓度法之分析步驟·····	229
11 - 4	斜坡撓度法分析靜不定梁·····	233
11 - 5	斜坡撓度法分析結點不移動之靜不定剛架·····	238
11 - 6	斜坡撓度法分析結點一度自由移動之靜不定剛架·····	241
11 - 7	斜坡撓度法分析結點二度自由移動之靜不定剛架·····	247
11 - 8	斜坡撓度法分析結點多度自由移動之靜不定剛架·····	254
第十二章	力矩分配法·····	261
12 - 1	引言·····	261
12 - 2	力矩之分配與傳遞·····	264
12 - 3	力矩分配法分析結點不移動之梁與剛架：一個轉動結點 ·····	267
12 - 4	力矩分配法分析結點不移動之梁與剛架：兩個或兩個以上 轉動結點·····	272
12 - 5	修改勁度·····	276
12 - 6	力矩分配法分析結點有移動之剛架：結點一度自由移動 ·····	281
12 - 7	力矩分配法分析結點有移動之剛架：結點二度自由移動 ·····	286
12 - 8	力矩分配法分析結點有移動之剛架：結點多度自由移動 ·····	294
12 - 9	力矩分配法求影響線·····	296
第十三章	結構矩陣法：力法·····	303
13 - 1	引言·····	303

13 - 2	結構之基本觀念	303
13 - 3	平衡；力變換矩陣	307
13 - 4	諧合	308
13 - 5	內在力與變位之關係；柔度係數與柔度矩陣	308
13 - 6	外在力與變位之關係；結構柔度矩陣	311
13 - 7	矩陣力法分析靜定結構	315
13 - 8	矩陣力法分析靜不定結構	320
第十四章	結構矩陣法：變位法	337
14 - 1	引言	337
14 - 2	諧合；變位變換矩陣	337
14 - 3	內在力與變位之關係；勁度係數與勁度矩陣	339
14 - 4	外在力與變位之關係；結構勁度矩陣	341
14 - 5	平衡	342
14 - 6	矩陣變位法分析結構	343
14 - 7	變位法之通式	353
14 - 8	矩陣力法與變位法之比較	358

通用結構學第二部

第十五章	直接勁度法：平面結構	7
15 - 1	引言	7
15 - 2	本位坐標下之元件勁度矩陣	8
15 - 3	坐標系之轉動轉換	11
15 - 4	共同坐標下之元件勁度矩陣	15
15 - 5	特例：桁桿之元件勁度矩陣	16
15 - 6	結構勁度矩陣	19
15 - 7	直接勁度法解構架之步驟	22
15 - 8	例則	23
第十六章	直接勁度法：空間結構	43
16 - 1	引言	43
16 - 2	符號	44

16 - 3	本位坐標下之元件勁度矩陣.....	45
16 - 4	坐標系之轉動轉換.....	49
16 - 5	共同坐標下之元件勁度矩陣.....	53
16 - 6	特例一：空間桁桿之勁度矩陣.....	56
16 - 7	特例二：格子結構之元件勁度矩陣.....	58
16 - 8	轉動矩陣之方向餘弦.....	60
16 - 9	構架分析之計算機程序.....	64
第十七章	非均勻截面桿之處理.....	69
17 - 1	引言.....	69
17 - 2	固端作用.....	70
17 - 3	梁元件之柔度矩陣.....	72
17 - 4	梁元件之勁度矩陣.....	74
17 - 5	其他力—變位之關係.....	77
17 - 6	斜坡撓度之通式.....	79
17 - 7	力矩分配之勁度與傳遞因素.....	81
17 - 8	由結點移動所產生之固端力矩.....	84
17 - 9	力矩分配修改勁度.....	85
17 - 10	數字解算.....	88
第十八章	構架之彈性穩定.....	97
18 - 1	引言.....	97
18 - 2	舉一個例.....	101
18 - 3	古典法解柱之屈挫：尤拉柱及其他.....	107
18 - 4	柱之屈挫綜合解.....	117
18 - 5	梁—柱元件之勁度矩陣.....	124
18 - 6	剛架之彈性穩定.....	130
18 - 7	數字例則.....	133
第十九章	結構動力學.....	149
19 - 1	引言.....	149
19 - 2	堆積質量與諧合質量.....	151
19 - 3	運動方程之建立.....	157

19 - 4	堆積質量一度自由系之無阻尼自由振動.....	158
19 - 5	堆積質量多度自由系之無阻尼自由振動.....	163
19 - 6	分佈質量多度自由系之無阻尼自由振動.....	170
19 - 7	有阻尼自由振動.....	175
19 - 8	強迫振動：穩定狀態解.....	180
19 - 9	正交坐標.....	183
19 - 10	動力反應：運動之不相聯屬方程.....	186
第二十章	有限元件法解彈性聯體.....	195
20 - 1	引言.....	195
20 - 2	有限元件法程序撮要.....	196
20 - 3	變位法應注意事項.....	200
20 - 4	元件勁度矩陣之建立.....	204
20 - 5	受板面力作用薄板之分析（用三角元件）.....	207
20 - 6	高次變位函數及改良元件.....	215
20 - 7	面積坐標.....	221
20 - 8	元件本位坐標之勁度矩陣與共同坐標之勁度矩陣.....	226
20 - 9	數學例則.....	232

第十五章 直接勁度法：平面結構

15-1 引言

本章為本書第二部份之首章。第二部份之結構分析偏重於建立結構的勁度矩陣，與第一部份之末章（即上章，第十四章）——矩陣變位法，亦即勁度法，仍相呼應，但程序上有所不同。按矩陣變位法建立結構矩陣之步驟，其大要為先由桿端與結點之諧合，建立變位變換（轉換）矩陣 a ，將所有桿端變位以結點變位為項表示，由矩陣 a 代表坐標之轉換；次由各桿本位之勁度集成一對角勁度 k ；再計算 $a^T k a$ 而得結構之總勁度。至於本章所述之直接勁度法，則係將各桿視為一結構單元（*Member-structure*），各桿先自建立各別之轉換矩陣 $\bar{a}$ ，即局部坐標（*Local coordinates*，或桿端坐標）與共同坐標（*Global coordinates*，或結點坐標）兩者之間的轉換，同時建立其本位坐標下之勁度 $\bar{k}$ ；再由 $\bar{a}^T \bar{k} \bar{a}$ 得此結構單元在共同坐標下之勁度。最後由共同坐標數字標記之認同，可將各桿之勁度疊加以得結構之總勁度。直接勁度法使結構分析更趨於程式化，適用於電腦之處理，以進行大規模系統化之演算。

本章之討論僅限於平面結構之直接勁度法，然變位之自由度已較上章增加。至於空間結構之直接勁度法，則將於下章述之。

再者第二部份既為新的章節，所用符號及書寫格式較第一部份已有若干變更，例如吾人將用 s 代 k 以表示勁度， T 代 a 以表示轉換矩陣，又各式矩陣，多加框號，較為醒目。

15-2 本位坐標下之元件勁度矩陣

茲考慮一斷面均勻一致之桿件，其桿端廣義變位 (*Generalized end displacement*) $\{ \bar{q} \}$ 將包含兩端之轉動，正交移動，及軸向移動。與此相應之桿端廣義力 (*Generalized forces*) $\{ \bar{Q} \}$ 乃為兩端力矩，剪力，及軸力。設變位 (或相應之力) 之坐標示如圖 15-1，則力與變位之關係式可建立如次：

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \bar{s}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{23} & \bar{s}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{33} & \bar{s}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{43} & \bar{s}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{55} & \bar{s}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{65} & \bar{s}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \end{Bmatrix}$$

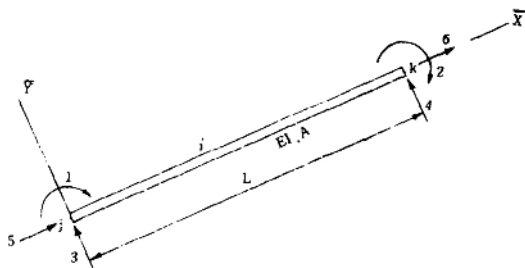


圖 15-1

或逕作：

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{s}] \{q\}$$

式中 $[\bar{s}]$ 代表元件在本位坐標 $\bar{X}-\bar{Y}$ 下之勁度矩陣， $\bar{X}-\bar{Y}$ 為直交坐標， $\bar{X}$ 沿元件中心軸建立。 $[\bar{s}]$ 某一勁度係數 $s_{\alpha\beta}$ 指元件在 β 坐標單獨產生單位變位，所起在 α 坐標上之力。此處吾人假設由彎矩所造成桿件之軸向變位可以忽略，故作用於桿件某項單位轉動，將不涉及軸向力。反之，作用於桿件之單位軸向移動，亦不涉及彎矩與剪力，此所以在 $[\bar{s}]$ 矩陣中含有若干零數。

元件勁度矩陣之製作，無非使桿件某坐標上產生一單位之變位，所求得各坐標之力，遂構成矩陣之某列（從上到下之一欄）。如此逐一可完成矩陣之各列。例如求式 15-1 第一列之矩陣係數 $\bar{s}_{11}$, $\bar{s}_{21}$, $\bar{s}_{31}$, $\bar{s}_{41}$ ，乃為桿兩端固定，僅許 j 端產生一單位轉動，亦即 $\bar{q}_1 = 1$ 時，所得之 $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Q}_4$ ，今參考圖 15-2，及斜坡撓度公式，即可定得：

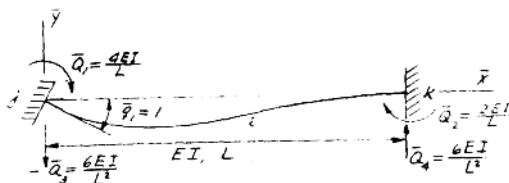


圖 15-2

$$\begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{21} \\ \bar{s}_{31} \\ \bar{s}_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4EI/L \\ 2EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix}$$

又如求同式第三列之矩陣係數 $\bar{s}_{13}$, $\bar{s}_{23}$, $\bar{s}_{33}$, $\bar{s}_{43}$ ，乃為桿兩端固定，唯許 j 端產生一單位移動，亦即 $\bar{q}_3 = 1$ 時，所得之 $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Q}_4$ 。今參考圖 15-3，及斜坡撓度式，即可定得：

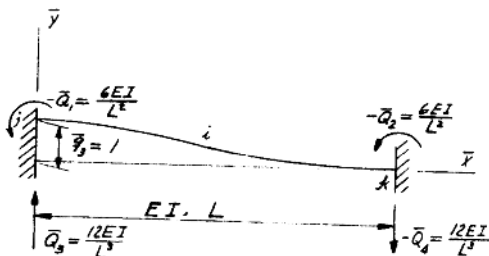


圖 15-3

$$\begin{Bmatrix} \bar{s}_{13} \\ \bar{s}_{23} \\ \bar{s}_{33} \\ \bar{s}_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 \\ 12EI/L^3 \\ -12EI/L^3 \end{Bmatrix}$$

循此方式可完成本位坐標下一彈性均勻桿件之勁度矩陣如式 15-2。

式 15-2 為一奇特矩陣 (*Singular matrix*)，不能逆轉，故並無相逆之柔度矩陣存在。當記式 15-2 製作時，桿件無需支承條件，因求某一單位變位單獨產生情形下之力時，其餘坐標皆在固定不移不動之狀況。然建立柔度矩陣，則桿件之支承狀況須先標明，固與圖 15-1 之無特設支承不合也。

$$[s] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (15-2)$$

15-3 坐標系之轉動轉換

式 15 - 2 之元件勁度矩陣係根據元件本位坐標（桿件坐標）而建立。如有不同方向之數桿相交於一結點，則各桿之本位矩陣必須先轉換至共同坐標系（結構坐標），使元件勁度矩陣皆置於此系統下，以便進一步之集合。

茲考慮平面向量 V （代表力或變位）如圖 15 - 4，其在本位直交坐標 $\bar{X}-\bar{Y}$ 系下之分量為 $\{\bar{V}_x, \bar{V}_y\}$ ，而在共同直交坐標 $X-Y$ 系下之分量為 $\{V_x, V_y\}$ ，設 $\bar{X}$ ， X 兩軸間之交角為 θ 如圖所示，則 $\bar{V}_x$ 與 $\bar{V}_y$ 可以 V_x 與 V_y 為表式如次：

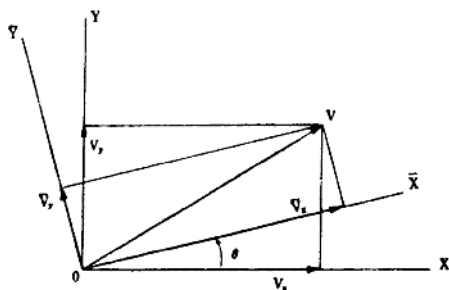


圖 15 - 4

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}$$

或簡作：

$$\{\bar{V}\} = [\theta] \{V\} \quad (15-3)$$

式中 $[\theta]$ 代表從 $X-Y$ 系至 $\bar{X}-\bar{Y}$ 系之轉動矩陣 (Rotation matrix)。反之亦可有：

$$\{V\} = [\theta]^{-1} \{\bar{V}\} \quad (15-4)$$

亦即：

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \end{Bmatrix} \quad (15-5)$$

由此立見：

$$[\theta]^{-1} = [\theta]^T \quad (15-6)$$

故轉動矩陣為正交 (Orthogonal)，從得：

$$\{V\} = [\theta]^T \{\bar{V}\} \quad (15-7)$$

茲將圖 15-1 之桿件示如圖 15-5 (a)，運用式 15-3 可將兩

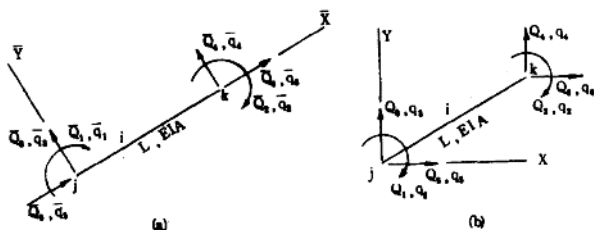


圖 15-5

端力與變位轉換成圖 15-5 (b) 共同坐標下之力與變位，遂有：

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_5 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (15-8)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_6 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (15-9)$$

至於兩端力矩則不受坐標系轉動之影響，故：

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (15-10)$$

將式 15-8 至 15-10 集合後依順序排列得：

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}$$

或簡作：

$$\{\bar{Q}\} = [T] \{Q\} \quad (15-11)$$

式中矩陣 $[T]$ 稱為轉換矩陣 (Transformation matrix)，即將桿端力從本位坐標轉換至共同坐標；反之亦可成立：

$$\{Q\} = [T]^{-1} \{\bar{Q}\} \quad (15-12)$$

又因：

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (15-13)$$

故此轉換矩陣為正交，從得：

$$\{Q\} = [T]^T \{\bar{Q}\} \quad (15-14)$$

上述轉換式雖就桿端力述說，自亦可用於相應端變位之轉換。看圖 15-6 之典型桿件 i ，若兩端之位置坐標分別為 (x_j, y_j) ， (x_k, y_k) ，

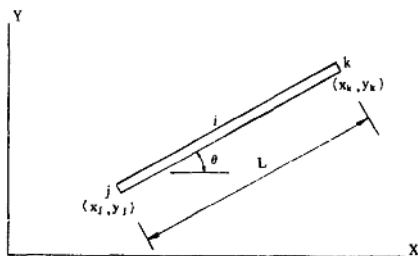


圖 15-6

y_k)，則有：

$$\cos \theta = \frac{x_k - x_j}{L} \quad (15-15)$$

$$\sin \theta = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (15-16)$$

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (15-17)$$

15-4 共同坐標下之元件勁度矩陣

看圖 15-5(a) 斜立之桿，其端點力與變位上方各標以短劃，以代表本位系；運用式 15-1，15-2 得。

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & & & & & \\ & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & & & \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & & \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \end{Bmatrix}$$

對稱

或簡作：

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{s}] \{\bar{q}\} \quad (15-18)$$

式中 $[\bar{s}]$ 為本位坐標下元件勁度矩陣。

由向量轉換式 15-11 得：

$$\{\bar{Q}\} = [T] \{Q\} \quad (15-19)$$

式中 $\{Q\}$ 代表圖 15-5(b) 所示在共同坐標系下之桿端力，同樣在