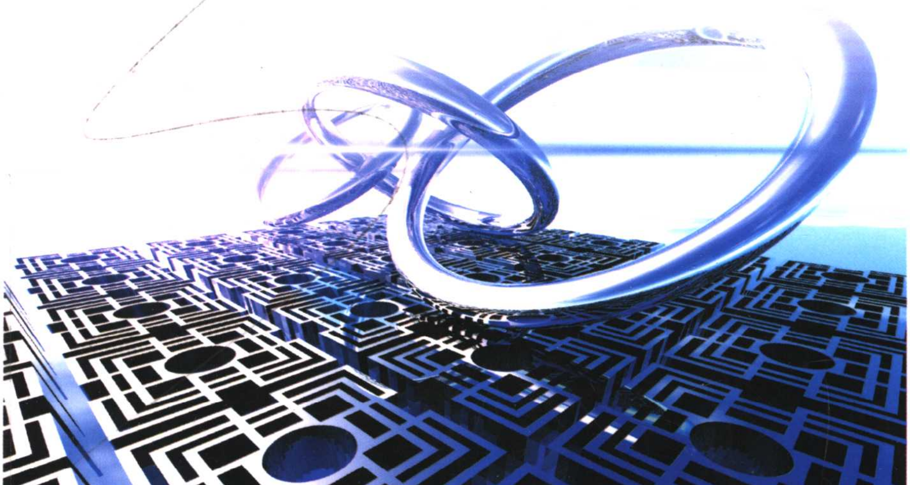
高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

线性代数简明教程

马元生 ◎ 主　编
张宇萍　叶留青　梁显丽 ◎ 副主编
黄宝健 ◎ 主　审



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

线性代数简明教程

马元生　主　编
张宇萍　叶留青　梁显丽　副主编
黄宝健　主　审

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以教材应为学生服务，应能起到教的作用为宗旨，本着在教材中落实对学生素质能力培养的意愿，在教学方法上力图改变数学课“定义、定理、证明、举例”的教学模式，采取了以提出问题，研究解决问题为主线，自然地引出各个概念和定理的方式进行讲述，不仅降低了学习难度，而且会使学习者有参与讨论、研究、发现之感。同时本书附录介绍了线性代数在电路、化学、力学、经济和生态等诸多方面的应用。

本书介绍了线性代数的基本知识，可作为普通高校、成教、自考理工类及经管类专业的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/马元生主编. —北京：科学出版社，2007
(高等教育“十一五”规划教材·公共课教材系列)
ISBN 978-7-03-019088-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. 马… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 085466 号

责任编辑：万国清 王彦 / 责任校对：赵燕
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 7 月第一次印刷 印张：12 1/4
印数：1—3 000 字数：274 000

定价：18.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62147541(VP04)

前言

在接触本书正文之前，作者愿借此机会向诸位读者、同仁表叙自己对教材的一点认识、共同探讨几个问题。

1. 教材为谁而写？教材为谁服务？教材，特别是基础课教材应该不应该尽量让学生看懂？

2. 在对待数学知识内容的抽象性，严谨性问题上，采取怎样的做法？怎样处理较为适宜？

3. 在教材中能不能落实培养学生的素质和能力？

4. 本书对“线性相关性理论”作了较多的处理，力图“软化”，使学生容易理解。但处理的是否恰当？

5. 线性代数的应用问题。

教材不同于专著。专著的聆读对象是在某一知识领域中具有或达到某种水平的人。他们在一起讨论研究问题，惯用的术语、概念不必解释，所讨论的问题的起点也比较高，问题也比较专、深。而教材就不同了，教材是教师和学生进行教学活动的基本依据。教材蕴涵了专业教学计划为培养目标设计的知识结构中相应的知识。学生要学到教材中的知识只有两种途径，一是上课听老师讲，二是课下自己看书。而在大学里一门课程一个学期大约70学时左右，学生在课堂上与老师见面，课后就很少有机会再见到老师。所以大学生大部分时间是自己看书。这就需要我们编写的教材具有“教”的功能，能够起到“教”的作用。教材是为广大学生服务的，所以教材，特别是基础课的教材，既要保证科学性，又要写得尽量让学生看懂。因此在教材的写法上，内容的处理上，编著者都应当为学生着想，为学生考虑。这也是以“学生为本”的一个体现。

数学内容抽象，结构严谨，数学课难懂，数学书难读是学生普遍的反应。数学内容抽象、结构严谨是由数学研究的对象和研究方法所决定的。培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力也是设置数学课的目的之一。但是作者认为，教师不宜在课堂上一味地强调数学的抽象、严谨。对待抽象的概念、定义，应当尽可能地讲出它的工程背景或学科背景。

这样,概念、定义就有了出处、来源。虽然它还是抽象的,但是学生就会理解它,认为它的出现是应该的,合理的。这样就拉近了学生和知识之间的距离。对待严谨要分场合,看需要。如果在思考问题,特别是带有探索性的,试验性的研究问题时,不能太严谨,否则就束缚了自己的思维,找不到新的思路。当你降低了严谨性而发现了某种因果关系,要把它作为一般规律时,则需要严谨地论证,或实验求证。而我们教师在课堂上是用较多地时间讲分析思考,试图找到问题的解决方法,所以不宜太强调严谨。伟大的数学家欧拉,经过研究、探索,得到了下面的等式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

但是欧拉却证明不了。直到欧拉去世后三十多年,才为后来的数学家所证明。这就是一个光辉的范例。发现和证明对我们都重要,但是发现的意义更大。如果太强调严谨,就会影响人们的发散性思维。就会与即将遇到的新发现,新发明不缘而散。

1995 年在武汉召开的全国高等教育工作会议上,强调了对学生素质、能力的培养。这项工作如何落实,如何实现都是难事。问题在于广大教师的教育观念的转变上,人们往往认为教育就是"传道、授业、解惑"。教学就是教师在教学过程中,向学生传授知识,解学生之惑,这当然是正确的。如果将教师解学生之惑,转变为教师教给学生解惑的方法,传授解惑的本领就好了。素质和能力说到底就是发现问题,研究解决问题的能力。"解惑"需要知识,但有了知识不一定就能解惑。还需要会研究、会思考、会设计设想实验。把教学的着眼点从放在讲知识、转变到讲这个知识是怎么来的,怎样去运用这个知识,怎样去发现新知识,这就是素质、能力的教育。作者以这种认识,在线性代数的教学中积极探索,力图改变数学课那种"定义、定理、证明、举例"的讲课模式。而是以提出问题、研究、解决问题为主线,引出相应的概念或定理。让学生看到这些概念和定理形成的过程。限于作者的水平,这项工作做的并不到位,但教学效果有了明显的提高,学生学习的积极性也有所提高。编写教材仍然按这种思想方法、模式进行。不是人为的,派生的先写出定义,定理,再进行解释说明或证明。而是通过对研究、解决问题过程的分析、归纳、提炼,形成概念或定理的雏形,再引出概念和定理。眼下的这本教材,就是这样孕育而出。作者的这些粗浅认识,不周之处希望各位同仁批评指正,以期有所进步。本书注重对概念的理解和结论的运用,不拘泥于理

论的严谨求证。许多概念和定理都是从问题解决的过程中顺势引出。对于一些定理的由来及正确性已是明显的事实，如果再进行证明就成重复赘述的情形，便未给出证明。

纵观浩如烟海的线性代数教材，关于线性相关性理论体系的写法可分为两类：一类是以北京大学的《高等代数》(1978年出版)中的线性相关性理论体系为框架；另一类是1999年同济大学《线性代数》(第三版)用矩阵的秩讨论相关性问题的写法。两种写法各有优缺点。作者觉得后者较为学生容易学习、掌握。但是，一开始就以矩阵的子式的方式提出矩阵的秩的定义，显得有些突然。本书在矩阵的秩的提出方式上，做了一些尝试性的工作，希望广大同仁提出宝贵意见。由于相关性理论抽象，理论性强、内容多，本书在内容的展开上尽量不做横向展开，把握主线尽快完成。

在众多地线性代数教材中，能够联系工程实践，写出线性代数的应用的书实在太少。作者有幸阅读了 David C. Lay 写的《线性代数及其应用》一书，使作者受益匪浅。为了说明线性代数在工程实践中的应用，作者从该书中摘取了20个例子。这些例子反映了线性代数在电路，化学，经济，生态等诸多方面的应用。这些内容集中在本书的附录中。

本书内容涵盖了理工科院校传统的线性代数课程的全部知识。基于作者上述的思想认识，在写法上注意了起点低、深入浅出、循序渐进、重在分析诱导理解知识的内涵，淡化逻辑的严密认证，所以写得通俗易懂。本书不仅适合普通本科院校的学生，而且对高职高专的学生也很适宜。如果讲授48学时则可以讲完全部内容。如果讲授36学时，则可删去第3.5节、第5.3节到第5.5节4个小节，内容仍衔接自然，自成体系。

参加本书编写的有马元生教授(西安思源学院，原西安大学教授)、张宇萍副教授(西安工业大学)、叶留青副教授(焦作师范学院)、梁显丽(内蒙古农业大学职业技术学院)、蒋永锋(西安思源学院)、白莉(西安思源学院)和郭元春(西安思源学院)。

本书得以问世与科学出版社的万国清、王彦等老师们的关心是分不开的，他们认真地审阅了原稿并提出宝贵意见，在此谨向他们致以挚厚的谢意。

目　录

第一章 行 列 式

§1.1 二阶、三阶行列式

对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1\text{-}2) \end{cases}$$

可以用消元法求解. 可由

$$a_{22}(1-1) + (-a_{12})\cdot(1-2)$$

消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1-3}$$

可由

$$(-a_{21})\cdot(1-1) + a_{11}\cdot(1-2)$$

消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{1-4}$$

式(1-3)及(1-4)中有 4 处为两个数的乘积与两个数乘积的差，为了找出方程组的解与方程组的系数及常数项之间的关系，即要求得解的公式，引入符号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1-5}$$

称作二阶行列式，当式(1-3)及(1-4)中 x_1, x_2 的系数构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，可解出

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

于是我们得到结论：二元一次方程组当其系数行列式不等于零时有唯一解，且可用行列式表示，x_1,x_2 表示式中的分母是方程组的系数行列式，而分子分别是将系数行列式的第一列，第二列换为方程组的常数列所得到的行列式. 如果以符号 D，D_1,D_2 记相应的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则有

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1.1.1 求$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=3 \end{cases}$的解.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3-6}{-1}=3$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3-2}{-1}=-1$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

我们用消元法解之，并引入三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

会得到与二元一次方程组类似的结论. 即当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 D_1,D_2,D_3 是分别将系数行列式 D 中的第一、二、三列换为方程组的常数列所得到的行列式.

我们看到当二元、三元一次方程组的系数行列式不等于零时，用二阶、三阶行列式可以分别表示方程组的解. 也就是求得了二元、三元一次方程组的公式解. 那么对于含 n 个未知量，n 个方程的方程组是否有公式解呢？为此在下一节引入 n 阶行列式并介绍它的性质和计算方法，为寻求一般的 n 元线性方程组的公式解作准备.

§1.2 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，我们先研究一下三阶行列式与二阶行列式有什么关系.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1-6}$$

由上式我们看到一个三阶行列式可以化为三个二阶行列式乘以系数后的代数和. 我们分析一下其中每个二阶行列式与它前面的系数之间的关系. 容易发现其前面的系数的位置不在二阶行列式的元素所在的行、列之内，如第一项.

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

系数 a_{11} 位于原系数行列式的第一行第一列，而 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中的元素为系数行列式中第二、三行；第二、三列的元素，其他两项也是如此. 我们引入行列式的元素 a_{ij} 的余子式的概念.

划去三阶行列式的第 i 行，第 j 列，剩下的元素位置不变构成的行列式 M_{ij} 称为 a_{ij} 的余子式($i=1,2,3$；$j=1,2,3$).

例 1.2.1 写出行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 各元素的余子式.

解 $M_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$,

$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$,

$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

利用余子式的概念，式(1-6)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{1-7}$$

为进一步规范化，可以将式(1-7)右端各项用加号连接，即

$$\begin{aligned} & a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ & = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} \\ & = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \end{aligned}$$

我们再引入概念：

称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为三阶行列式元素 a_{ij}的代数余子式，将它记为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (i = 1,2,3;j = 1,2,3)$$

则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1-8}$$

我们称式(1-8)为行列式按第一行的展开式，同理会有按第二行、第三行的展开式. 一般有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \qquad (i = 1,2,3) \tag{1-9}$$

我们注意到式(1-8)的左端是三阶行列式，而右端中的 A_{i1}，A_{i2}，A_{i3}是二阶行列式冠以相应的正、负号. 按式(1-8)可以用二阶行列式来计算三阶行列式，或者说可以用二阶行列式来定义三阶行列式. 仿此我们可以用三阶行列式来定义四阶行列式. 用四阶行列式来定义五阶行列式，……由此我们给出 n 阶行列式的定义如下

定义 1.2.1

称 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-10}$$

为一个 n 阶行列式($n\geqslant 2$).

其中 A_{i1}，A_{i2}，…，A_{in}分别为 D 的第 i 行元素 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}的代数余子式(与三阶情形相仿).

例 1.2.2 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三行展开}} 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$+\left[1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$=[-(1-3)-(2-1)]+[(1-3)-(1-2)]$$
$$=(2-1)+(-2+1)=1-1=0$$

我们规定，由元素 a_{11} 构成的一阶行列式等于其自身，$|a_{11}|=a_{11}$. 那么当 $n=2$ 时，按式(1-10)有
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
与(1-10)式是一致的.

例 1.2.3 解方程$\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

解 $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=x^2-3x=x(x-3)=0$
$$x_1=0,\quad x_2=3$$

例 1.2.4 a、b 满足什么条件时有
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$
$$=0+a^2+b^2=0$$

所以 $a=b=0$ 时原行列式等于零.

例 1.2.5　计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{33}A_{33}=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}$$

所以有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.5 中的行列式称作上三角形行列式，它等于其主对角线(行列式中从左上角到右下角的对角线)上的元素的连乘积.

从行列式的定义式(1-10)可看出，行列式最终是一个数，即行列式有数值意义，它是按某种特定规则计算得到的数值. 同时由式(1-10)也可看出，按定义计算较高阶的行列式是很麻烦的，因此有必要讨论行列式的性质，利用性质简化行列式的计算.

§1.3　行列式的性质

我们以二阶行列式为例不加证明地叙述行列式的性质.

性质 1　行列式的行和列互换后，行列式的值不变(亦称作行列式经转置其值不变).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的. 因此凡是有关行的性质和结论，对于列也同样成立. 所以对下三角形行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似(1-10)式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-11}$$

式(1-11)应理解为行列式按第 j 列展开，即等于第 j 列各元素与其对应的代数余子式乘积的和.

例 1.3.1　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三列展开}} 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5$

性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1.3.2　计算 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解　$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$

或 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) = 0$

性质 2 可理解为数 k 乘以行列式，等于用 k 乘行列式的某一行中的各元素. 或行列式中某行有公因子可以提到行列式的外边.

性质 3　互换行列式的两行，则行列式变号.

例 1.3.3　计算$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6-4=2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$

推论 1　行列式中有两行相同,则行列式等于零.

推论 2　行列式中有两行成比例,则行列式等于零.

性质 4
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1.3.4　计算$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-9=-1$

或$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2+1 & 3+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0+(2-3)=-1$

性质 5　将行列式某行的 k 倍加到另一行,行列式的值不变.

例 1.3.5　计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$

或$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+(-3)\cdot 1 & 4+(-3)\cdot 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2$

推论　行列式中若有零行,则行列式等于零.

例 1.3.6　已知
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

求$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$的值.

解 按性质 5 可有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

上述行列式的性质对于行列式的列也同样成立.

行列式的计算,主要是利用行列式的性质将其化为三角形行列式,或使其中的某行(或列)出现较多的零,然后再按此行(列)展开.因此在计算过程中要对行列式的行或列进行一些处理.我们用 r_i 表示行列式的第 i 行.用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换行列式的第 i 行和第 j 行.kr_j 表示用数 $k(k \neq 0)$乘以第 j 行的各元素.用 $r_i + kr_j$ 表示将第 j 行的 k 倍加到第 i 行.类似符号 $c_j, c_j \leftrightarrow c_i, c_j + kc_i$ 表示列及对列相应的处理.

例 1.3.7 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{的值.}$$

解 $D \xlongequal[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24$

例 1.3.8 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 容易发现 D 中各行元素的和相等,若将第二、三、四列加到第一列,则第一列可提出公因子再行化简.

$$D \xlongequal{c_1 + (c_2 + c_3 + c_4)} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$