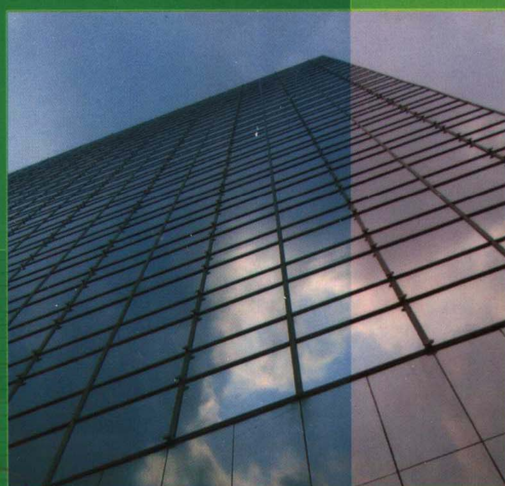
高等学校独立学院教材

大学数学教程

(下册)

南京大学金陵学院
陈　仲 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校独立学院教材

大学数学教程

（下　册）

南京大学金陵学院
陈　仲　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是高等学校独立学院本科理工类专业"大学数学"课程的教材. 全书分上、下两册,上册包含极限与连续、导数与微分、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学;下册包含多元函数积分学、级数、微分方程、线性代数.

本书是编者多年从事"大学数学"课程建设的成果. 全书将大学数学作为一个整体,由浅入深,循序渐进,既突出数学基础,又注重直观理解,并适当地渗透现代数学的思想和方法,部分教学内容作了更新和优化. 本书难易适度,语言简洁明了.

本书可供独立学院、二级学院、师范学院作为教材,也可供各类大学生作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 下册/陈仲编著. —北京:高等教育出版社,2007.7

ISBN 978-7-04-021790-2

Ⅰ. 大… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071193 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 吴文信
版式设计 余 杨 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年7月第1版
印　　张	18.75	**印　　次**	2007年7月第1次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	19.90元

物料号　21790-00

目　　录

第六章　多元函数积分学

第七章　级　　数

第八章　微分方程

第九章　线性代数

第六章　多元函数积分学

在第三章中，我们用“分割取近似，求和取极限”的方法定义了定积分．并用微元法解决了平面图形的面积、变力作功等几何与物理上的应用题．在这一章，我们用同样的方法研究与多元函数有关的积分问题．由于多元函数比一元函数复杂，其定义域可能是平面区域、空间立体区域，还可以是空间的曲线或曲面，所以多元函数积分学包含着二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等，下面我们来逐一研究．

§6.1　二重积分

一、二重积分的定义

以 xy 平面上一个有界闭域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)\ (\geqslant 0)$ 为顶，侧面是一柱面（它以 D 的边界 ∂D 为准线，母线平行于 z 轴），它们围成的柱体 Ω 称为**曲顶柱体**．我们来定义曲顶柱体的体积．

将区域 D 任意地分割为 n 个子域 $D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，D_i 的面积为 $\Delta\sigma_i$，D_i 的直径记为 d_i，并记

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\},$$

称 λ 为**分割的模**．以子域 $D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的边界为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面将曲顶柱体 Ω 分割为 n 个瘦长条形的曲顶柱体 Ω_i，在每一个子域 D_i 上任取点 (x_i,y_i)，以 D_i 为底，以函数值 $f(x_i,y_i)$ 为高，作平顶柱体（图 6.1），用它的体积 $\Delta V_i=f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 近似代替 Ω_i 的体积．n 个平顶柱体体积之和

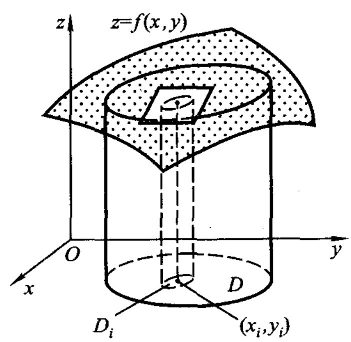


图 6.1

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i \tag{1}$$

是曲顶柱体 Ω 的体积的近似值.

令分割的模 $\lambda \to 0$,我们用和式(1)的极限来定义曲顶柱体 Ω 的体积,即

$$V(\Omega) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

若区域 D 为一块平面薄片,此薄片的厚度相对于 D 的大小是微小的,可忽略不计,就像很薄的纸片一样. 设 $z = \rho(x, y)$ 是薄片 D 的质量面密度函数,为了求平面薄片 D 的总质量,可以像定义曲顶柱体体积一样,仍用"分割取近似,求和取极限",将平面薄片 D 的质量定义为

$$m(D) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

抽去上述实例的几何或物理意义,我们有下面定义.

定义 6.1.1　(二重积分) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$,D 为有界闭域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义. 将区域 D 任意地分割为 n 个子域 $D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,$D_i$ 的面积记为 $\Delta\sigma_i$,在每个 D_i 上任取点 (x_i, y_i),作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$. 若分割的模 $\lambda \to 0$ 时,此和式的极限存在,且此极限值与分割的方式无关,与每个区域 D_i 上点 (x_i, y_i) 的选取无关,则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**,记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{def}} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i,$$

并称 $f(x,y)$ 为**被积函数**,称 D 为**积分区域**,称 $\mathrm{d}\sigma$ 为**面积微元**.

当函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上二重积分存在时,称 f 在 D 上**可积**,记为 $f \in I(D)$.

当 $f \in I(D)$ 时,由二重积分的定义可以证明 $f \in B(D)$(证明从略).

根据二重积分的定义,曲顶柱体的体积可表示为

$$V(\Omega) = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma;$$

平面薄片 D 的质量可表示为

$$m(D) = \iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

与定积分可积性条件相对应的,我们有下面定理.

定理 6.1.1　设 $D \subset \mathbf{R}^2$,D 为有界闭域,若 $f \in C(D)$,则 $f \in I(D)$.

定理 6.1.2　设 $D \subset \mathbf{R}^2$,D 为有界闭域,$f \in B(D)$,f 的间断点分布在 D 内有限条光滑曲线上,则 $f \in I(D)$.

二、二重积分的性质

二重积分具有与定积分完全相同的性质. 假设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的有界闭域,下列二重积分的被积函数皆可积,则有

性质 1 (线性) 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则

$$\iint_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 2 (可加性) 用曲线将 D 分成两部分 D_1 与 D_2,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 (保号性) 设 $\forall(x,y)\in D$,恒有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

上述三条性质可直接应用二重积分的定义,或采用特殊的分割再应用二重积分的定义给予证明,这里从略. 这里对于性质 3 作两点推论.

推论 1 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint_D|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

推论 2 设 $\forall(x,y)\in D$, $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,则

$$m\leqslant\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M,$$

这里 σ 为区域 D 的面积.

下面继续研究二重积分的性质,我们将其写成定理的形式.

定理 6.1.3 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭域,设 $f(x,y)\in C(D)$,$f(x,y)\geqslant 0$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$$

的充要条件是 $\exists(\xi,\eta)\in D$,使得 $f(\xi,\eta)>0$.

定理 6.1.4 (二重积分中值定理) 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭域,$f\in C(D)$,则 $\exists(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma,$$

这里 σ 为区域 D 的面积.

这两个定理的证明与第三章中定理 3.2.1 与定理 3.2.2 的证明几乎完全一样,此不赘述.

奇函数或偶函数在对称区间$[-a,a]$上的定积分性质,也可推广到二重积分.

定理 6.1.5　设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的有界闭域，D 关于 $x=0$ 对称，$f\in I(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\displaystyle\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }x\text{ 为偶函数},\\ 0, & f\text{ 关于 }x\text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

这里 D_1 是 D 中 $x\geqslant 0$ 的部分.

证　因 $f\in I(D)$，二重积分应与区域 D 的分割无关，与点 (x_i,y_i) 的选取无关. 现将 D 分割为 $2n$ 个小区域 $D_1,D_2,\cdots,D_{2n}$，其中 D_1 与 D_2，D_3 与 D_4，$\cdots$，D_{2n-1} 与 D_{2n} 关于 $x=0$（即 y 轴）对称，在区域 $D_i(i=1,2,\cdots,2n)$ 上取点 (x_i,y_i)，使得 $x_{2i-1}=-x_{2i}$，$y_{2i-1}=y_{2i}(i=1,2,\cdots,n)$. 应用二重积分的定义，

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma&=\lim_{\lambda\to 0}\Big(\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2i-1})\Delta\sigma_{2i-1}+\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i},y_{2i})\Delta\sigma_{2i}\Big)\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(-x_{2i},y_{2i})+f(x_{2i},y_{2i})\Big)\Delta\sigma_{2i}\\&=\begin{cases}\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}0\Delta\sigma_{2i}=0, & \text{条件 }A,\\ \displaystyle 2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i},y_{2i})\Delta\sigma_{2i}=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{条件 }B.\end{cases}\end{aligned}$$

这里条件 A 表示 f 关于 x 为奇函数，条件 B 表示 f 关于 x 为偶函数.　□

若将定理 6.1.5 的条件改为 D 关于 $y=0$ 对称，函数 f 关于 y 为奇函数或偶函数，则有与定理 6.1.5 相对应的结论.

例 1　设 D 为 $y=x$，$x=-1$，$y=1$ 所围区域，求

$$\iint_{D_1}(x\sin y+y\sin x)\,\mathrm{d}\sigma.$$

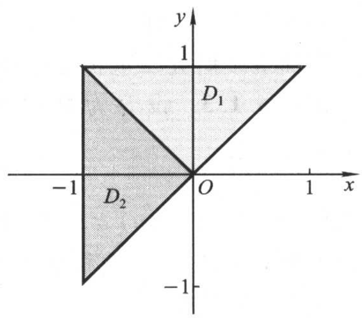


图 6.2

解　用直线 $y=-x$ 将 D 分为 D_1 与 D_2（图 6.2），则 D_1 关于 $x=0$ 对称，D_2 关于 $y=0$ 对称，

$$\text{原式}=\iint_{D_1}(x\sin y+y\sin x)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x\sin y+y\sin x)\,\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $x\sin y+y\sin x$ 关于 x 为奇函数，$x\sin y+y\sin x$ 关于 y 亦是奇函数，所以上式两个二重积分皆等于 0，故原式 $=0+0=0$.

三、含参变量的定积分

第三章中,我们曾重点讲授变上(下)限定积分概念.现在来研究被积函数含参变量的定积分,形式为

$$\sigma(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad 与 \quad \sigma(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

这里两个含参变量 x 的定积分,积分变量是 y,在对 y 积分时,始终将 x 视作常数(即参数),不管它是在被积函数中,还是在上、下限中,就像求偏导数 $f_y'(x,y)$ 时,对变量 y 求导,始终将 x 视作常数一样.

例 2 求含参变量 x 的定积分 $\int_x^{x^2}\sin xy\mathrm{d}y$.

解 将 x 视为常数,应用 N-L 公式得

$$\int_x^{x^2}\sin xy\mathrm{d}y=-\frac{1}{x}\cos xy\Big|_x^{x^2}=\frac{1}{x}(\cos x^2-\cos x^3).$$

关于含参变量的定积分,有下列定理.

定理 6.1.6 设 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$,函数 $f(x,y)\in C(D)$,函数 $\varphi_1(x)\in C[a,b]$,$\varphi_2(x)\in C[a,b]$,则含参变量 x 的定积分

$$\sigma(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上连续,即 $\sigma(x)\in C[a,b]$.

定理 6.1.7 (莱布尼茨公式)在定理 6.1.6 的条件下,进一步假设 $\varphi_1(x)\in D[a,b]$,$\varphi_2(x)\in D[a,b]$,$f_x'(x,y)\in C(D)$,则 $\sigma(x)\in D[a,b]$,且有

$$\sigma'(x)=\varphi_2'(x)f(x,\varphi_2(x))-\varphi_1'(x)f(x,\varphi_1(x))+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x'(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

这里两个定理的证明方法超出本课程的教学要求,故从略.

例 3 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2}\sin xy\mathrm{d}y$.

解 直接应用莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}
原式&=2x\sin x^3-\sin x^2+\int_x^{x^2} y\cos xy\mathrm{d}y\\
&=2x\sin x^3-\sin x^2+\frac{1}{x}\left(y\sin xy\Big|_x^{x^2}-\int_x^{x^2}\sin xy\mathrm{d}y\right)\\
&=3x\sin x^3-2\sin x^2+\frac{1}{x^2}\cos xy\Big|_x^{x^2}\\
&=3x\sin x^3-2\sin x^2+\frac{1}{x^2}(\cos x^3-\cos x^2).
\end{aligned}$$

四、二重积分的计算（累次积分法）

设 $D\subset\mathbf{R}^2$，D 为有界闭域，$f(x,y)\in C(D)$，故 $f\in I(D)$. 按二重积分的定义，二重积分的值与区域的分割无关. 在直角坐标下，我们常用平行于 x 轴与平行于 y 轴的直线将 D 分割为 n 个子域 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$，这些子域除部分可能是曲边梯形外皆为矩形域，其面积 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$，因而在直角坐标下，面积微元 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，我们称 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为**直角坐标下的面积微元**，并将二重积分记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

现在研究二重积分(2)在直角坐标下的计算. 我们将二重积分(2)看做是以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)(\geqslant 0)$ 为顶的曲顶柱体 Ω 的体积，下面分两种情况讨论.

1）设闭域 D 可表示为

$$D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

这里 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（图 6.3）. 任取 $x\in[a,b]$，过点 $(x,0,0)$ 作平面 Π 垂直于 x 轴，该平面 Π 截曲顶柱体 Ω 的截面是平面 Π 上的曲边梯形 $MNPQ$（图 6.4），它可表示为

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant z\leqslant f(x,y),\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\},$$

这里将 x 视为参数. 该曲边梯形的面积为含参变量 x 的定积分

$$\sigma(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

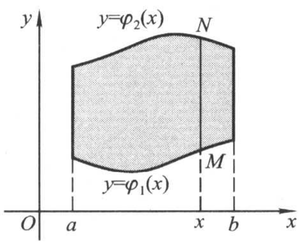


图 6.3

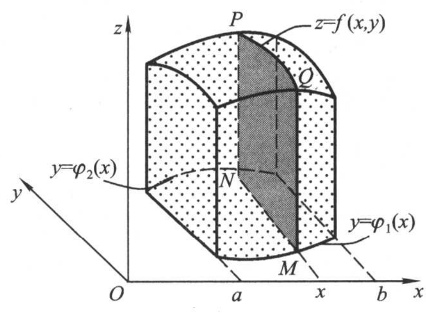


图 6.4

由定理 6.1.6 可知 $\sigma(x)\in C[a,b]$. 应用横截面面积可求的立体体积公式即得

$$V(\Omega)=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\sigma(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\tag{3}$$

习惯上,常将(3)式右端写为下列与其等价的形式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\tag{4}$$

此式右端称为函数 $f(x,y)$ **先对 y,后对 x 的累次积分**. (4)式便是将二重积分化为先对 y,后对 x 的累次积分的计算公式.

2) 设闭域 D 可表示为

$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

这里 $\psi_1(y),\psi_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续(图 6.5). 曲顶柱体 Ω 介于 $y=c,y=d$ 这两个平面之间, $\forall y\in[c,d]$,我们过点 $(0,y,0)$ 作垂直于 y 轴的平面去截立体,横截面的面积为含参变量 y 的定积分

$$\sigma(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

这里将 y 视为参数,且 $\sigma(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 应用横截面面积可求的立体体积公式即得

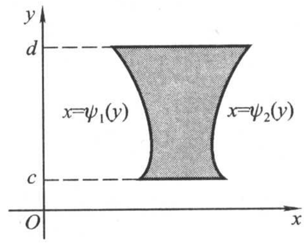


图 6.5

$$V(\Omega)=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\sigma(y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\tag{5}$$

习惯上,常将(5)式右端写为下列与其等价的形式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x,\tag{6}$$

此式右端称为函数 $f(x,y)$ **先对 x,后对 y 的累次积分**. (6)式便是将二重积分化为先对 x,后对 y 的累次积分的计算公式.

积分次序的选取还要考虑被积函数 $f(x,y)$ 对哪个变量先积分比较方便.

特别地,当区域 D 是矩形区域

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

时,上述公式(4)与(6)都可以应用,此时有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

仅当 D 为矩形区域时,这里的累次积分的所有上、下限都是常数.

最后指出,在推导上述两个公式时,我们将积分区域 D 都作了一定限制. 如

果 D 的形状比较复杂,我们可用平行于坐标轴的直线将 D 分割成若干子域,在每一个子域上可以按公式(4)或(6)化为累次积分进行计算,然后应用二重积分对区域的可加性即可.

例 4　计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $y=x, x=1, y=0$所围区域.

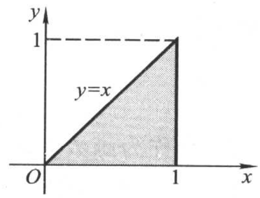


图 6.6

解　对于积分区域 D(图 6.6),原式按两种次序化为累次积分都可以. 但观察一下被积函数不难看出,采用先对 y,后对 x 的累次积分次序较好,计算要简便得多.

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x x^2\sin xy\mathrm{d}y = \int_0^1 x\left(-\cos xy\right)\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x(1-\cos x^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sin x^2\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1-\sin 1).$$

例 5　计算二重积分 $\iint\limits_D |\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里 D 为 $y+x=\pi, x=0, y=0$ 所围区域.

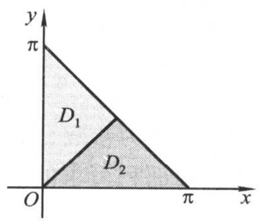


图 6.7

解　这里被积函数中有绝对值,为了消去绝对值,我们用 $y=x$ 将 D 分割为 D_1 与 D_2(图 6.7),在区域 D_1 上 $-\pi\leqslant x-y\leqslant 0$,在区域 D_2 上 $0\leqslant x-y\leqslant\pi$. 于是

$$原式 = \iint\limits_{D_1} -\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2}\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\pi-x}\sin(x-y)\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\pi-y}\sin(x-y)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\Big|_{y=x}^{y=\pi-x}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\Big|_{x=y}^{x=\pi-y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2y\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

下面我们来考虑二重积分中另一重要的议题,即改变累次积分次序的问题. 给定一个累次积分,譬如先对 x,后对 y 积分,我们要从这个累次积分的四个上、下限推出积分区域 D,然后改变积分次序,变为先对 y,后对 x 的累次积分,并确

定这个累次积分的四个新的上、下限.

例 6 改变累次积分 $\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dy$ 的次序.

解 由 $-x^2 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 1$ 所表示区域 D 如图 6.8所示. 要改变积分次序,用 x 轴将 D 分割为上、下两部分 D_1 与 D_2,这是因为图形 D 左边的曲线是两条方程不同的曲线 $x=y$ 和 $x=\sqrt{-y}$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy\int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

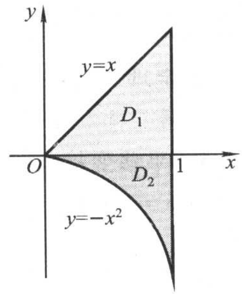


图 6.8

例 7 计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2}\,dx$.

解 由 $y\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{y}, 0\leqslant y\leqslant 1$ 所表示的区域如图 6.9所示,由于 e^{x^2} 先对 x 积分时,原函数求不出,所以必须改变积分次序.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} e^{x^2}\,dy = \int_0^1 e^{x^2}(x-x^3)\,dx \\ &\xlongequal{x^2=t} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-t)e^t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\,d(e^t) \\ &= \frac{1}{2}\left((1-t)e^t\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t\,dt\right) = \frac{1}{2}e-1.\end{aligned}$$

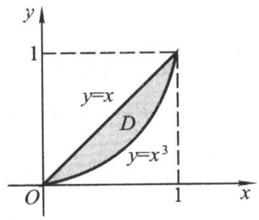


图 6.9

五、二重积分的计算(换元积分法)

换元积分法是计算定积分的最常用,也是最重要的计算方法. 现在来介绍二重积分的换元积分法. 首先讲一般的换元公式,然后重点讲极坐标换元积分法.

定理 6.1.8 (换元公式) 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的有界闭域,$f(x,y)$ 在 D 上连续,函数 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ 在 uv 平面上的有界闭域 D' 上具有连续的一阶偏导数,使得 D' 与 D 的点一一对应,并且**雅可比**[①]**行列式**

$$J(u,v) \xlongequal{\text{def}} \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v)\in D',$$

则有换元公式

① 雅可比(Jacobi,1804—1851),德国数学家.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma=|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 称为**新坐标下的面积微元**.

此定理的证明从略.

计算二重积分常用的换元变换有平移变换与极坐标变换.

1. 平移变换

令 $x=u+a, y=v+b, a, b$ 为常数，则

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(u+a,v+b)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2. 极坐标变换

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则

$$J(\rho,\theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho,$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta, \tag{7}$$

这里 $|J(\rho,\theta)|=|\rho|=\rho$，所以在应用极坐标换元公式(7)计算二重积分时，要记住被积表达式中 $\rho\geqslant 0$ 的限制.

在具体计算时，还要将(7)右端的二重积分化为极坐标下的累次积分. 下面分三种情况进行讨论.

1) 原点 $O\notin$ 闭域 D. 设 D 位于射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$ 之间，$\forall\theta\in(\alpha,\beta)$，过原点作极角为 θ 的射线 L，L 与 D 的边界交于两点，一点在曲线 $\rho=\rho_1(\theta)$ 上，一点在曲线 $\rho=\rho_2(\theta)$ 上（图 6. 10），且 $\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho, \tag{8}$$

这里右端是先对 ρ 后对 θ 的累次积分.

若 D 位于两个圆 $\rho=r_1, \rho=r_2(0<r_1<r_2)$ 之间，$\forall\rho\in(r_1,r_2)$，以原点 O 为中心作半径为 ρ 的圆 Γ，Γ 与 D 的边界交于两点，一点在曲线 $\theta=\theta_1(\rho)$ 上，一点在曲线 $\theta=\theta_2(\rho)$ 上（图 6. 11），且 $\theta_1(\rho)\leqslant\theta_2(\rho)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\rho\int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\theta, \tag{9}$$

这里右端是先对 θ，后对 ρ 的累次积分.

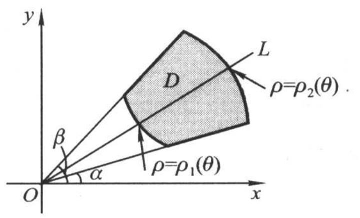


图 6.10

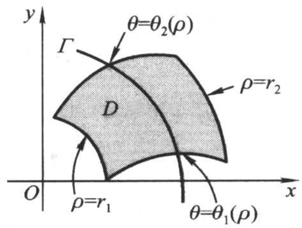


图 6.11

2）原点 $O\in\partial D$，即 O 是 D 的边界点. 设 D 位于两条射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 之间，$\forall\,\theta\in(\alpha,\beta)$，过原点 O 作极角为 θ 的射线 L，L 与 D 的边界交于两点，一点为原点 O，一点在曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 上（图 6.12），则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho,\tag{10}$$

这里右端是先对 ρ，后对 θ 的累次积分.

若 D 位于原点与圆 $\rho=r$ 之间，$\forall\,\rho\in(0,r)$，以原点为中心作半径为 ρ 的圆 Γ，Γ 与 D 的边界交于两点，一点在曲线 $\theta=\theta_1(\rho)$ 上，一点在曲线 $\theta=\theta_2(\rho)$ 上（图 6.13），且 $\theta_1(\rho)\leqslant\theta_2(\rho)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^r \mathrm{d}\rho\int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\theta,\tag{11}$$

这里右端是先对 θ，后对 ρ 的累次积分.

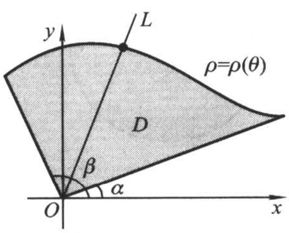


图 6.12

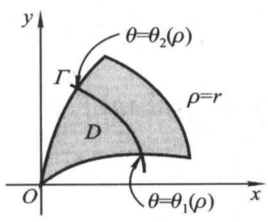


图 6.13

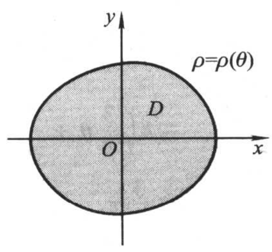


图 6.14

3）原点 O 是 D 的内点，设 D 的边界曲线的方程为 $\rho=\rho(\theta)$（图 6.14），则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho,\tag{12}$$

这里右端是先对 ρ，后对 θ 的累次积分.