

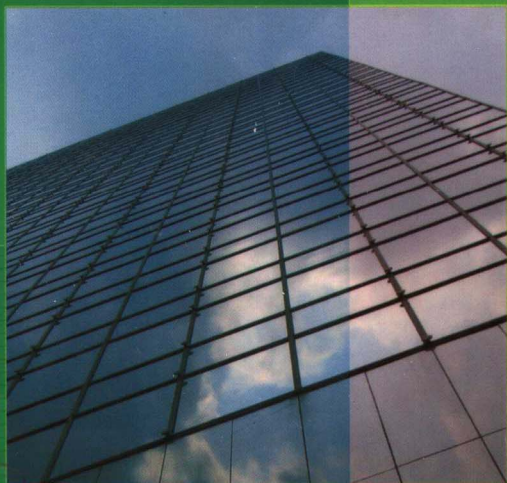
■ 高等学校独立学院教材

大学数学教程

(下册)

■ 南京大学金陵学院

陈 仲 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013/447

:2

2007

高等学校独立学院教材

大学数学教程

(下 册)

南京大学金陵学院

陈 仲 编著

高等教育出版社

内容简介

本书是高等学校独立学院本科理工类专业“大学数学”课程的教材. 全书分上、下两册, 上册包含极限与连续、导数与微分、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学; 下册包含多元函数积分学、级数、微分方程、线性代数.

本书是编者多年从事“大学数学”课程建设的成果. 全书将大学数学作为一个整体, 由浅入深, 循序渐进, 既突出数学基础, 又注重直观理解, 并适当地渗透现代数学的思想和方法, 部分教学内容作了更新和优化. 本书难易适度, 语言简洁明了.

本书可供独立学院、二级学院、师范学院作为教材, 也可供各类大学生作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 下册/陈仲编著. —北京: 高等教育出版社, 2007. 7

ISBN 978 - 7 - 04 - 021790 - 2

I. 大… II. 陈… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071193 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 吴文信
版式设计 余 杨 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京新丰印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2007 年 7 月第 1 版
印 张	18.75	印 次	2007 年 7 月第 1 次印刷
字 数	350 000	定 价	19.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21790-00

目 录

第六章 多元函数积分学

- § 6.1 二重积分** (1)
- 一、二重积分的定义(1) 二、二重积分的性质(3)
- 三、含参变量的定积分(5) 四、二重积分的计算(累次积分法)(6)
- 五、二重积分的计算(换元积分法)(9) 习题 6.1(13)
- § 6.2 三重积分** (15)
- 一、三重积分的定义与性质(15)
- 二、三重积分的计算(累次积分法)(16)
- 三、三重积分的计算(换元积分法)(20)
- 习题 6.2(24)
- § 6.3 重积分的应用** (25)
- 一、立体的体积(25) 二、曲面的面积(27)
- 三、质心(28) 习题 6.3(29)
- § 6.4 曲线积分** (30)
- 一、空间曲线的弧长(30) 二、第一型曲线积分(31)
- 三、第二型曲线积分(35) 习题 6.4(39)
- § 6.5 曲面积分** (41)
- 一、第一型曲面积分(41) 二、双侧曲面(44)
- 三、第二型曲面积分(46) 习题 6.5(52)
- § 6.6 格林公式·斯托克斯公式·高斯公式** (53)
- 一、格林公式(53) 二、斯托克斯公式(58)
- 三、高斯公式(61) 习题 6.6(64)
- § 6.7 场论初步** (65)
- 一、哈密顿算子(66) 二、散度(67) 三、旋度(67)
- 四、无旋场·势函数(68) 习题 6.7(69)

第七章 级 数

- § 7.1 数项级数** (71)
- 一、级数的基本概念(71) 二、正项级数(73)
- 三、任意项级数(78) 习题 7.1(81)

§ 7.2 幂级数	(83)
一、幂级数的收敛半径与收敛域(83)	
二、幂级数的性质(87)	
三、初等函数的幂级数展开式(89)	
四、幂级数的和函数(92)	
习题 7.2(95)	
§ 7.3 傅里叶级数	(96)
一、傅里叶系数与傅里叶级数(96)	
二、狄利克雷收敛定理(98)	
三、 Δ 函数在 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数(101)	
四、正弦级数与余弦级数(102)	
习题 7.3(104)	
第八章 微分方程	
§ 8.1 微分方程基本概念	(105)
习题 8.1(108)	
§ 8.2 一阶微分方程	(108)
一、解的存在与惟一性(109)	
二、变量可分离的微分方程(110)	
三、齐次微分方程(111)	
四、一阶线性微分方程(112)	
五、全微分方程(114)	
六、解微分方程的变量代换法(116)	
习题 8.2(119)	
§ 8.3 二阶微分方程	(120)
一、可降阶的二阶方程(121)	
二、二阶线性方程解的性质(123)	
三、二阶常系数线性方程(125)	
四、特殊的二阶变系数线性方程·欧拉方程(132)	
习题 8.3(135)	
§ 8.4 高于二阶的微分方程	(136)
一、方程 $y^{(n)} = f(x)$ ($n \geq 3$)(136)	
二、方程 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (137)	
三、高阶线性方程解的性质(137)	
四、高阶常系数线性齐次方程(138)	
习题 8.4(139)	
§ 8.5 微分方程的应用	(140)
一、一阶微分方程的应用(140)	
二、二阶微分方程的应用(143)	
习题 8.5(145)	
§ 8.6 Δ微分方程的数值解	(146)
一、欧拉方法(146)	
二、霍恩方法(147)	
三、龙格-库塔方法(148)	

第九章 线性代数

§ 9.1 行列式	(150)
一、 n 阶行列式的定义(150)	
二、行列式的性质(153)	

三、行列式的计算(157) 习题 9.1(160)	
§ 9.2 矩阵	(162)
一、矩阵概念(162) 二、矩阵的运算(164) 三、可逆矩阵(169)	
四、矩阵的初等变换(174) 五、矩阵的秩(182)	
六、分块矩阵(184) 习题 9.2(189)	
§ 9.3 向量	(192)
一、向量组的线性相关性(192) 二、向量组间的关系(199)	
三、向量组的秩与矩阵的秩(200) 四、向量空间(203)	
五、规范正交基·施密特正交规范化方法(208)	
六、正交矩阵·正交变换(210) 习题 9.3(213)	
§ 9.4 线性方程组	(215)
一、高斯消元法(216) 二、线性方程组解的性质(218)	
三、线性方程组无解、有惟一解与有无穷多解的判定(218)	
四、线性方程组解的结构(223) 习题 9.4(229)	
§ 9.5 矩阵的对角化	(232)
一、特征值与特征向量(232) 二、相似变换·相似矩阵(237)	
三、矩阵的对角化(239) 四、实对称矩阵的对角化(244)	
习题 9.5(246)	
§ 9.6 二次型	(248)
一、二次型的矩阵表示(248) 二、合同变换·合同矩阵(249)	
三、二次型的标准形与规范形(251) 四、化二次型为标准形(255)	
五、正定二次型(259) 六、 Δ 二次曲面方程的化简(261)	
习题 9.6(266)	
§ 9.7 Δ线性空间与线性变换	(267)
一、线性空间的定义(267) 二、线性空间的基与维数(269)	
三、线性变换(272) 习题 9.7(275)	
习题答案与提示	(277)

第六章 多元函数积分学

在第三章中,我们用“分割取近似,求和取极限”的方法定义了定积分.并用微元法解决了平面图形的面积、变力作功等几何与物理上的应用题.在这一章,我们用同样的方法研究与多元函数有关的积分问题.由于多元函数比一元函数复杂,其定义域可能是平面区域、空间立体区域,还可以是空间的曲线或曲面,所以多元函数积分学包含着二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等,下面我们来逐一研究.

§ 6.1 二重积分

一、二重积分的定义

以 xy 平面上一个有界闭域 D 为底,以曲面 $z=f(x,y)$ (≥ 0) 为顶,侧面是一柱面(它以 D 的边界 ∂D 为准线,母线平行于 z 轴),它们围成的柱体 Ω 称为曲顶柱体.我们来定义曲顶柱体的体积.

将区域 D 任意地分割为 n 个子域 D_i ($i=1,2,\dots,n$), D_i 的面积为 $\Delta\sigma_i$, D_i 的直径记为 d_i ,并记

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\},$$

称 λ 为分割的模.以子域 D_i ($i=1,2,\dots,n$) 的边界为准线,作母线平行于 z 轴的柱面,这些柱面将曲顶柱体 Ω 分割为 n 个瘦长条形的曲顶柱体 Ω_i ,在每一个子域 D_i 上任取点 (x_i, y_i) ,以 D_i 为底,以函数值 $f(x_i, y_i)$ 为高,作平顶柱体(图 6.1),用它的体积 $\Delta V_i = f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$ 近似代替 Ω_i 的体积. n 个平顶柱体体积之和

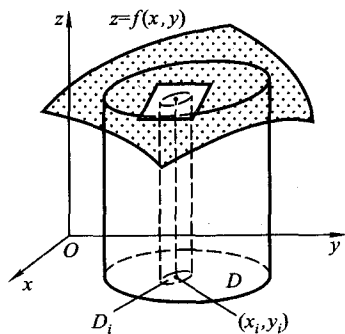


图 6.1

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i \quad (1)$$

是曲顶柱体 Ω 的体积的近似值.

令分割的模 $\lambda \rightarrow 0$, 我们用和式(1)的极限来定义曲顶柱体 Ω 的体积, 即

$$V(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

若区域 D 为一块平面薄片, 此薄片的厚度相对于 D 的大小是微小的, 可忽略不计, 就像很薄的纸片一样. 设 $z = \rho(x, y)$ 是薄片 D 的质量面密度函数, 为了求平面薄片 D 的总质量, 可以像定义曲顶柱体体积一样, 仍用“分割取近似, 求和取极限”, 将平面薄片 D 的质量定义为

$$m(D) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

抽去上述实例的几何或物理意义, 我们有下面定义.

定义 6.1.1 (二重积分) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$, D 为有界闭域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有定义. 将区域 D 任意地分割为 n 个子域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 在每个 D_i 上任取点 (x_i, y_i) , 作和式 $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$. 若分割的模 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和式的极限存在, 且此极限值与分割的方式无关, 与每个区域 D_i 上点 (x_i, y_i) 的选取无关, 则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i,$$

并称 $f(x, y)$ 为被积函数, 称 D 为积分区域, 称 $d\sigma$ 为面积微元.

当函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上二重积分存在时, 称 f 在 D 上可积, 记为 $f \in I(D)$.

当 $f \in I(D)$ 时, 由二重积分的定义可以证明 $f \in B(D)$ (证明从略).

根据二重积分的定义, 曲顶柱体的体积可表示为

$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y) d\sigma;$$

平面薄片 D 的质量可表示为

$$m(D) = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$

与定积分可积性条件相对应的, 我们有下面定理.

定理 6.1.1 设 $D \subset \mathbf{R}^2$, D 为有界闭域, 若 $f \in C(D)$, 则 $f \in I(D)$.

定理 6.1.2 设 $D \subset \mathbf{R}^2$, D 为有界闭域, $f \in B(D)$, f 的间断点分布在 D 内有有限条光滑曲线上, 则 $f \in I(D)$.

二、二重积分的性质

二重积分具有与定积分完全相同的性质. 假设 D 为 \mathbf{R}^2 的有界闭域, 下列二重积分的被积函数皆可积, 则有

性质 1 (线性) 设 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

性质 2 (可加性) 用曲线将 D 分成两部分 D_1 与 D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 3 (保号性) 设 $\forall (x, y) \in D$, 恒有 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

上述三条性质可直接应用二重积分的定义, 或采用特殊的分割再应用二重积分的定义给予证明, 这里从略. 这里对于性质 3 作两点推论.

推论 1 $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$

推论 2 设 $\forall (x, y) \in D$, $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M,$$

这里 σ 为区域 D 的面积.

下面继续研究二重积分的性质, 我们将其写成定理的形式.

定理 6.1.3 设 D 为 \mathbf{R}^2 上的有界闭域, 设 $f(x, y) \in C(D)$, $f(x, y) \geq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma > 0.$$

的充要条件是 $\exists (\xi, \eta) \in D$, 使得 $f(\xi, \eta) > 0$.

定理 6.1.4 (二重积分中值定理) 设 D 为 \mathbf{R}^2 上的有界闭域, $f \in C(D)$, 则 $\exists (\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma,$$

这里 σ 为区域 D 的面积.

这两个定理的证明与第三章中定理 3.2.1 与定理 3.2.2 的证明几乎完全一样, 此不赘述.

奇函数或偶函数在对称区间 $[-a, a]$ 上的定积分性质, 也可推广到二重积分.

定理 6.1.5 设 D 为 \mathbf{R}^2 的有界闭域, D 关于 $x=0$ 对称, $f \in I(D)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

这里 D_1 是 D 中 $x \geq 0$ 的部分.

证 因 $f \in I(D)$, 二重积分应与区域 D 的分割无关, 与点 (x_i, y_i) 的选取无关. 现将 D 分割为 $2n$ 个小区域 D_1, D_2, \dots, D_{2n} , 其中 D_1 与 D_2, D_3 与 D_4, \dots, D_{2n-1} 与 D_{2n} 关于 $x=0$ (即 y 轴) 对称, 在区域 $D_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 上取点 (x_i, y_i) , 使得 $x_{2i-1} = -x_{2i}, y_{2i-1} = y_{2i} (i=1, 2, \dots, n)$. 应用二重积分的定义,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2i-1}) \Delta\sigma_{2i-1} + \sum_{i=1}^n f(x_{2i}, y_{2i}) \Delta\sigma_{2i} \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(f(-x_{2i}, y_{2i}) + f(x_{2i}, y_{2i}) \right) \Delta\sigma_{2i} \\ &= \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 0 \Delta\sigma_{2i} = 0, & \text{条件 A,} \\ 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{2i}, y_{2i}) \Delta\sigma_{2i} = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{条件 B.} \end{cases} \end{aligned}$$

这里条件 A 表示 f 关于 x 为奇函数, 条件 B 表示 f 关于 x 为偶函数. \square

若将定理 6.1.5 的条件改为 D 关于 $y=0$ 对称, 函数 f 关于 y 为奇函数或偶函数, 则有与定理 6.1.5 相对应的结论.

例 1 设 D 为 $y=x, x=-1, y=1$ 所围区域, 求

$$\iint_{D_1} (x \sin y + y \sin x) d\sigma.$$

解 用直线 $y = -x$ 将 D 分为 D_1 与 D_2 (图 6.2), 则 D_1 关于 $x=0$ 对称, D_2 关于 $y=0$ 对称,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_1} (x \sin y + y \sin x) d\sigma + \\ &\quad \iint_{D_2} (x \sin y + y \sin x) d\sigma. \end{aligned}$$

由于 $x \sin y + y \sin x$ 关于 x 为奇函数, $x \sin y + y \sin x$ 关于 y 亦是奇函数, 所以上式两个二重积分皆等于 0, 故原式 $= 0 + 0 = 0$.

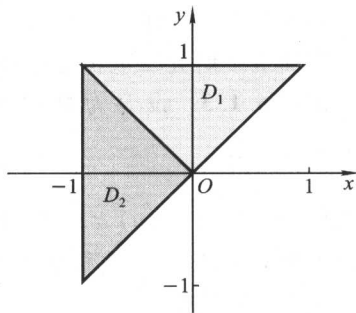


图 6.2

三、含参变量的定积分

第三章中,我们曾重点讲授变上(下)限定积分概念.现在来研究被积函数含参变量的定积分,形式为

$$\sigma(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{与} \quad \sigma(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

这里两个含参变量 x 的定积分,积分变量是 y ,在对 y 积分时,始终将 x 视作常数(即参数),不管它是在被积函数中,还是在上、下限中,就像求偏导数 $f'_y(x, y)$ 时,对变量 y 求导,始终将 x 视作常数一样.

例 2 求含参变量 x 的定积分 $\int_x^{x^2} \sin xy dy$.

解 将 x 视为常数,应用 N-L 公式得

$$\int_x^{x^2} \sin xy dy = -\frac{1}{x} \cos xy \Big|_x^{x^2} = \frac{1}{x} (\cos x^2 - \cos x^3).$$

关于含参变量的定积分,有下列定理.

定理 6.1.6 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 函数 $f(x, y) \in C(D)$, 函数 $\varphi_1(x) \in C[a, b]$, $\varphi_2(x) \in C[a, b]$, 则含参变量 x 的定积分

$$\sigma(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

在 $[a, b]$ 上连续,即 $\sigma(x) \in C[a, b]$.

定理 6.1.7 (莱布尼茨公式) 在定理 6.1.6 的条件下,进一步假设 $\varphi_1(x) \in D[a, b]$, $\varphi_2(x) \in D[a, b]$, $f'_x(x, y) \in C(D)$, 则 $\sigma(x) \in D[a, b]$, 且有

$$\sigma'(x) = \varphi_2'(x)f(x, \varphi_2(x)) - \varphi_1'(x)f(x, \varphi_1(x)) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f'_x(x, y) dy.$$

这里两个定理的证明方法超出本课程的教学要求,故从略.

例 3 求 $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sin xy dy$.

解 直接应用莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2x \sin x^3 - \sin x^2 + \int_x^{x^2} y \cos xy dy \\ &= 2x \sin x^3 - \sin x^2 + \frac{1}{x} \left(y \sin xy \Big|_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \sin xy dy \right) \\ &= 3x \sin x^3 - 2 \sin x^2 + \frac{1}{x^2} \cos xy \Big|_x^{x^2} \\ &= 3x \sin x^3 - 2 \sin x^2 + \frac{1}{x^2} (\cos x^3 - \cos x^2). \end{aligned}$$

四、二重积分的计算 (累次积分法)

设 $D \subset \mathbf{R}^2$, D 为有界闭域, $f(x, y) \in C(D)$, 故 $f \in I(D)$. 按二重积分的定义, 二重积分的值与区域的分割无关. 在直角坐标下, 我们常用平行于 x 轴与平行于 y 轴的直线将 D 分割为 n 个子域 $D_i (i=1, 2, \dots, n)$, 这些子域除部分可能是曲边梯形外皆为矩形域, 其面积 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$, 因而在直角坐标下, 面积微元 $d\sigma = dx dy$, 我们称 $dx dy$ 为直角坐标下的面积微元, 并将二重积分记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

现在研究二重积分(2)在直角坐标下的计算. 我们将二重积分(2)看做是以 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y) (\geq 0)$ 为顶的曲顶柱体 Ω 的体积, 下面分两种情况讨论.

1) 设闭域 D 可表示为

$$D = \{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \},$$

这里 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 (图 6.3). 任取 $x \in [a, b]$, 过点 $(x, 0, 0)$ 作平面 Π 垂直于 x 轴, 该平面 Π 截曲顶柱体 Ω 的截面是平面 Π 上的曲边梯形 $MNPQ$ (图 6.4), 它可表示为

$$\{ (x, y) \mid 0 \leq z \leq f(x, y), \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \},$$

这里将 x 视为参数. 该曲边梯形的面积为含参变量 x 的定积分

$$\sigma(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

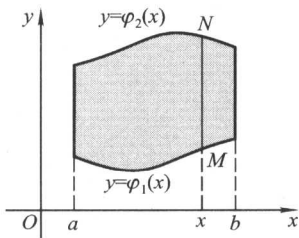


图 6.3

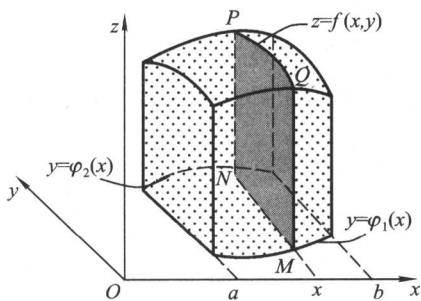


图 6.4

由定理 6.1.6 可知 $\sigma(x) \in C[a, b]$. 应用横截面面积可求的立体体积公式即得

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \sigma(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

习惯上,常将(3)式右端写为下列与其等价的形式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (4)$$

此式右端称为函数 $f(x, y)$ 先对 y , 后对 x 的累次积分. (4) 式便是将二重积分为先对 y , 后对 x 的累次积分的计算公式.

2) 设闭域 D 可表示为

$$D = \{ (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d \},$$

这里 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续(图 6.5). 曲顶柱体 Ω 介于 $y = c, y = d$ 这两个平面之间, $\forall y \in [c, d]$, 我们过点 $(0, y, 0)$ 作垂直于 y 轴的平面去截立体, 横截面的面积为含参变量 y 的定积分

$$\sigma(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

这里将 y 视为参数, 且 $\sigma(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. 应用横截面面积可求的立体体积公式即得

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \sigma(y) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

习惯上,常将(5)式右端写为下列与其等价的形式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (6)$$

此式右端称为函数 $f(x, y)$ 先对 x , 后对 y 的累次积分. (6) 式便是将二重积分为先对 x , 后对 y 的累次积分的计算公式.

积分次序的选取还要考虑被积函数 $f(x, y)$ 对哪个变量先积分比较方便.

特别地, 当区域 D 是矩形区域

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

时, 上述公式(4)与(6)都可以应用, 此时有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

仅当 D 为矩形区域时, 这里的累次积分的所有上、下限都是常数.

最后指出, 在推导上述两个公式时, 我们将积分区域 D 都作了一定限制. 如

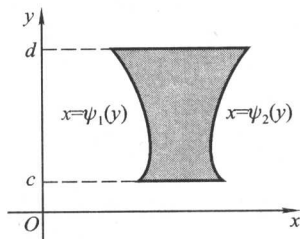


图 6.5

果 D 的形状比较复杂,我们可用平行于坐标轴的直线将 D 分割成若干子域,在每一个子域上可以按公式(4)或(6)化为累次积分进行计算,然后应用二重积分对区域的可加性即可.

例 4 计算二重积分 $\iint_D x^2 \sin xy dx dy$, 其中 D 为 $y=x, x=1, y=0$ 所围区域.

解 对于积分区域 D (图 6.6), 原式按两种次序化为累次积分都可以. 但观察一下被积函数不难看出, 采用先对 y , 后对 x 的累次积分次序较好, 计算要简便得多.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 \sin xy dy = \int_0^1 x \left(-\cos xy \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x(1 - \cos x^2) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sin 1). \end{aligned}$$

例 5 计算二重积分 $\iint_D |\sin(x-y)| dx dy$, 这里 D 为 $y+x=\pi, x=0, y=0$ 所围区域.

解 这里被积函数中有绝对值, 为了消去绝对值, 我们用 $y=x$ 将 D 分割为 D_1 与 D_2 (图 6.7), 在区域 D_1 上 $-\pi \leq x-y \leq 0$, 在区域 D_2 上 $0 \leq x-y \leq \pi$. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_1} -\sin(x-y) dx dy + \iint_{D_2} \sin(x-y) dx dy \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\pi-x} \sin(x-y) dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\pi-y} \sin(x-y) dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) \Big|_{y=x}^{y=\pi-x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) \Big|_{x=y}^{x=\pi-y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2y) dy \\ &= 2 \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

下面我们来考虑二重积分中另一重要的议题, 即改变累次积分次序的问题. 给定一个累次积分, 譬如先对 x , 后对 y 积分, 我们要从这个累次积分的四个上、下限推出积分区域 D , 然后改变积分次序, 变为先对 y , 后对 x 的累次积分, 并确

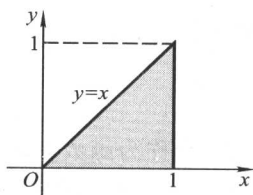


图 6.6

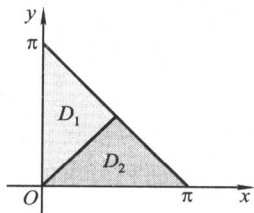


图 6.7

定这个累次积分的四个新的上、下限.

例 6 改变累次积分 $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^x f(x, y) dy$ 的次序.

解 由 $-x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ 所表示区域 D 如图 6.8 所示. 要改变积分次序, 用 x 轴将 D 分割为上、下两部分 D_1 与 D_2 , 这是因为图形 D 左边的曲线是两条方程不同的曲线 $x=y$ 和 $x=\sqrt{-y}$. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{-y}}^1 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

例 7 计算累次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2} dx$.

解 由 $y \leq x \leq \sqrt[3]{y}, 0 \leq y \leq 1$ 所表示的区域如图 6.9 所示, 由于 e^{x^2} 先对 x 积分时, 原函数求不出, 所以必须改变积分次序.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_{x^3}^x e^{x^2} dy = \int_0^1 e^{x^2} (x - x^3) dx \\ &\stackrel{x^2=t}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} (1-t) e^t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) d(e^t) \\ &= \frac{1}{2} \left((1-t) e^t \Big|_0^1 + \int_0^1 e^t dt \right) = \frac{1}{2} e - 1. \end{aligned}$$

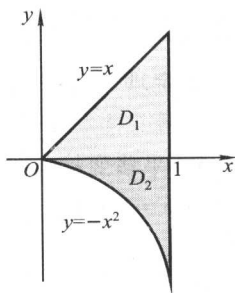


图 6.8

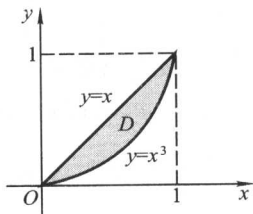


图 6.9

五、二重积分的计算 (换元积分法)

换元积分法是计算定积分的最常用, 也是最重要的计算方法. 现在来介绍二重积分的换元积分法. 首先讲一般的换元公式, 然后重点讲极坐标换元积分法.

定理 6.1.8 (换元公式) 设 D 为 \mathbf{R}^2 的有界闭域, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 函数 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ 在 uv 平面上的有界闭域 D' 上具有连续的一阶偏导数, 使得 D' 与 D 的点一一对应, 并且雅可比^①行列式

$$J(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D',$$

则有换元公式

^① 雅可比 (Jacobi, 1804—1851), 德国数学家.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

其中 $d\sigma = |J(u, v)| du dv$ 称为新坐标下的面积微元.

此定理的证明从略.

计算二重积分常用的换元变换有平移变换与极坐标变换.

1. 平移变换

令 $x = u + a, y = v + b, a, b$ 为常数, 则

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u + a, v + b) du dv.$$

2. 极坐标变换

令 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 则

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta, \quad (7)$$

这里 $|J(\rho, \theta)| = |\rho| = \rho$, 所以在应用极坐标换元公式(7)计算二重积分时, 要记住被积表达式中 $\rho \geq 0$ 的限制.

在具体计算时, 还要将(7)右端的二重积分化为极坐标下的累次积分. 下面分三种情况进行讨论.

1) 原点 $O \notin$ 闭域 D . 设 D 位于射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 之间, $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$, 过原点作极角为 θ 的射线 L , L 与 D 的边界交于两点, 一点在曲线 $\rho = \rho_1(\theta)$ 上, 一点在曲线 $\rho = \rho_2(\theta)$ 上(图 6.10), 且 $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho, \quad (8)$$

这里右端是先对 ρ 后对 θ 的累次积分.

若 D 位于两个圆 $\rho = r_1, \rho = r_2 (0 < r_1 < r_2)$ 之间, $\forall \rho \in (r_1, r_2)$, 以原点 O 为中心作半径为 ρ 的圆 Γ , Γ 与 D 的边界交于两点, 一点在曲线 $\theta = \theta_1(\rho)$ 上, 一点在曲线 $\theta = \theta_2(\rho)$ 上(图 6.11), 且 $\theta_1(\rho) \leq \theta_2(\rho)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{r_1}^{r_2} d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta, \quad (9)$$

这里右端是先对 θ , 后对 ρ 的累次积分.

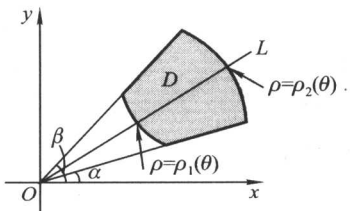


图 6.10

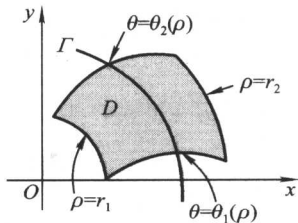


图 6.11

2) 原点 $O \in \partial D$, 即 O 是 D 的边界点. 设 D 位于两条射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) 之间, $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$, 过原点 O 作极角为 θ 的射线 L , L 与 D 的边界交于两点, 一点为原点 O , 一点在曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 上 (图 6.12), 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho, \quad (10)$$

这里右端是先对 ρ , 后对 θ 的累次积分.

若 D 位于原点与圆 $\rho = r$ 之间, $\forall \rho \in (0, r)$, 以原点为中心作半径为 ρ 的圆 Γ , Γ 与 D 的边界交于两点, 一点在曲线 $\theta = \theta_1(\rho)$ 上, 一点在曲线 $\theta = \theta_2(\rho)$ 上 (图 6.13), 且 $\theta_1(\rho) \leq \theta_2(\rho)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^r d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta, \quad (11)$$

这里右端是先对 θ , 后对 ρ 的累次积分.

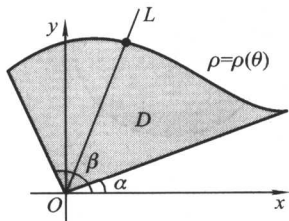


图 6.12

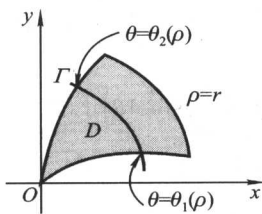


图 6.13

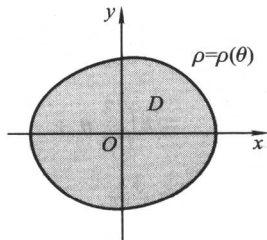


图 6.14

3) 原点 O 是 D 的内点, 设 D 的边界曲线的方程为 $\rho = \rho(\theta)$ (图 6.14), 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho, \quad (12)$$

这里右端是先对 ρ , 后对 θ 的累次积分.