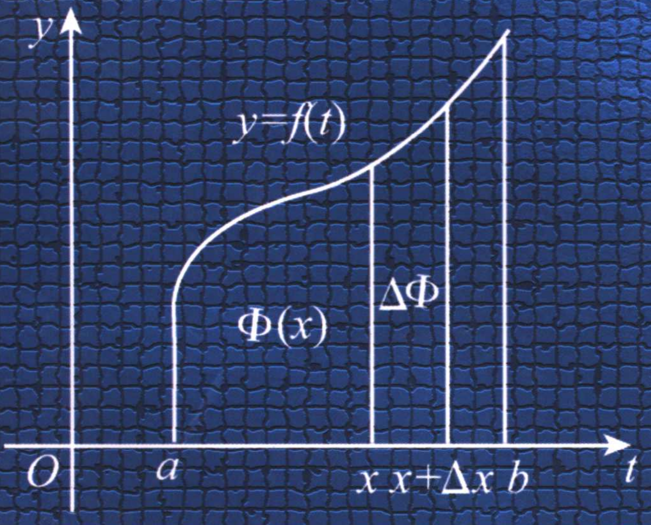
高等职业教育『十一五』规划教材
公共课教材系列

高等数学
(下册·修订版)

李德家 ◎ 主编



科学出版社
www.sciencep.com

●高等职业教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

高　等　数　学

（下　册·修订版）

李德家　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本教材根据高等职业技术教育的特点，参照教育部制定的有关高职高专教育高等数学课程教学的基本要求，按照以应用为目的、以必须够用为原则编写，力求培养学生的数学思维，提高学生解决问题的能力. 本套教材分上下两册，本书为下册，主要内容包括向量与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换及其应用、线性代数、概率与数理统计.

本书从实际问题出发，引入数学概念，阐述数学理论与数学思想，最终使读者形成利用数学知识解决实际问题的能力，并逐步引入数学建模来分析问题. 全书采用模块化设计，适应不同专业选用.

本教材适合各类高职高专院校作教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册·修订版)/李德家主编. —北京：科学出版社，2005
(高等职业教育"十一五"规划教材·公共课教材系列)
ISBN 7-03-014743-X

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 130871 号

责任编辑：王 彦 韩 洁/责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2006 年 12 月修 订 版 印张：13 1/2
2006 年 12 月第四次印刷 字数：290 000
印数：11 001—14 000

定价：20.00 元

本书编写人员名单

主　编　李德家

副主编　潘云明　薛小青　俎冠兴

撰稿人　（按姓氏笔画排序）

王　峥　李德家　周胜来　俎冠兴

董　娟　解心江　潘云明　薛小青

前　言

随着高等职业技术教育的蓬勃发展，特别需要一套适应高职教育特点，突出以应用为目的，以必须够用为原则，加强对学生应用意识及兴趣能力的培养，开发学生的数学思维的高等数学教材.为此，我们参照教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写了本套教材.

在本教材编写的过程中，充分吸收了高职高专教学实践的经验、教训并适应我国教学的实际情况.针对高职学生的特点，教材中突出体现了以下两方面作用:第一，着力培养学生的数学思维方法及数学思想;第二，加强学生数学知识的学习，掌握数学的基础知识和基本的数学能力，并能将数学知识应用于实际工作，解决实际问题.

本教材的特点是:淡化深奥的数学理论，加强对学生的数学思想及方法的培养，突出基础知识和基本技能的培养，通俗易懂，便于教学，便于学生学习。

本套教材分上、下两册，本书是下册，主要内容包括向量与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换及其应用、线性代数、概率与数理统计.在每章节后都配有一定数量的习题与复习题，供教师与学生选用.同时也出版了与本套教材配套的《高等数学同步训练教程》(李德家主编，科学出版社)，对教材内容做了适当扩展，供学生复习提高数学能力之用.

本书可作为高职高专各专业高等数学教材，也可作为工程技术人员掌握相关数学知识之用书.

李德家任主编，潘云明、薛小青、俎冠兴任副主编.参加本书编写的有解心江、李德家、俎冠兴、王峥、董娟、潘云明、薛小青、周胜来.

在编写过程中，得到了各作者所在院校领导的大力支持和协助，得到了科学出版社的热情关怀与指导，在此一并致谢.

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中疏漏和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

目　　录

第 7 章　向量与空间解析几何

解析几何学的产生是数学史上一个划时代的成就. 它通过点和坐标的对应，把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来，使得人们既可用代数方法解决几何问题(这是解析几何学的基本内容)，也可用几何方法解决代数问题. 在学习一元函数微积分的过程中. 我们已经看到平面解析几何的知识是不可缺少的. 同样道理，学习多元函数微积分也离不开空间解析几何的知识. 本章首先建立空间直角坐标系，然后以向量为工具，讨论空间的平面和直线.

7.1　空间点的直角坐标

7.1.1　空间坐标系的概念

为了沟通平面图形与数之间的联系，我们通过平面直角坐标系，建立了平面上的点和实数对之间的一一对应关系，从而能运用代数方法来讨论几何图形问题. 通过建立三维空间的直角坐标系，来表示空间图形和数之间的联系. 在空间选定点 O 作为原点，过点 O 作三条两两垂直的数轴，分别为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 习惯上我们把 x 轴、y 轴置于水平面上，而 z 轴取垂直向上方向(图 7.1).

观看图 7.2，我们可以想象，y 轴和 z 轴是落在纸面上的. 而 x 轴则是垂直于纸面指向我们. 它们的方向满足右手法则. 所谓右手法则，指的是：伸出右手，使拇指与其他四指垂直，当四指从 x 轴的正向的角度后指到 y 轴的正向时，拇指的指向应是 z 轴的正向. 按右手法则确定的坐标系称为右手系. 今后用的坐标系都是右手系. 由任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面 . 三个坐标轴确定了三个坐标面. 包含 x 轴和 y 轴的坐标面称为 xOy 坐标面，另外两个是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面 .

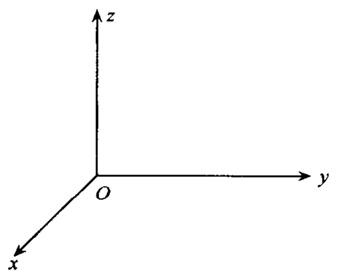


图 7.1

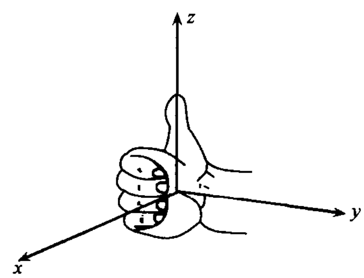


图 7.2

三个坐标面把整个空间分隔成八个部分，每个部分称为一个卦限. xOy 坐标面的上方和下方各有四个卦限．我们把 xOy 平面上的第 1,2,3,4 象限上方的四个卦限依次称为第 1,2,3,4 卦限，下方的四个卦限则依次称为第 5,6,7,8 卦限. 例如含有 x 负半轴、y 正半轴、z 负半轴的卦限是第 6 卦限(图 7.3).

在上面建立的坐标系中，坐标轴、坐标面都是两两垂直的，所以我们称它为空间直角坐标系. 有了坐标系之后，我们来建立空间的点和有序数组之间的对应关系. 设 M 为空间的一个定点，过 M 点作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，并依次交这三条坐标轴于 P、Q、R 三点. 设 P、Q、R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x、y 和 z，那么空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z). 反过来，给定一个有序数组(x,y,z)，我们可依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 P、Q、R. 过 P，Q，R 三点，各作一个平面，使分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，这三个平面的交点就是有序数组(x,y,z)所确定的唯一的一点(见图 7.4).

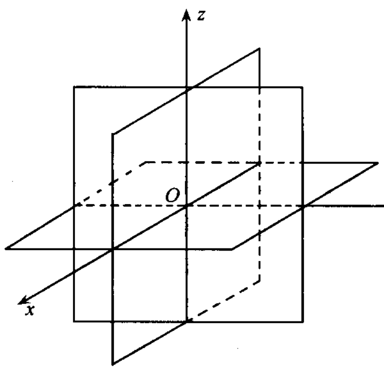


图 7.3

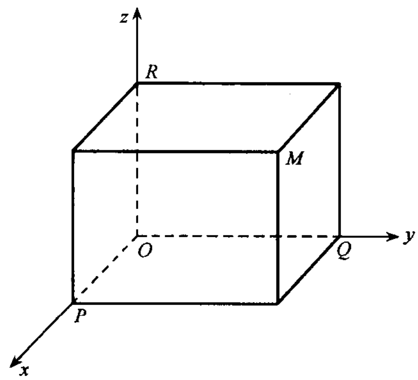


图 7.4

这样，通过空间直角坐标系，我们在空间的点和有序数组(x,y,z)之间建立了一一对应的关系. 有序数组中的 x、y、z 称为点 M 的坐标. 其中 x、y、z 依次称为点 M 的横标、纵标和竖标. 坐标为 x、y、z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

坐标面、坐标轴上的点的坐标有一定的特点. 例如，xOy 坐标面上的点，其竖标 $z=0$；yOz 坐标面上的点，其横标 $x=0$；zOx 坐标面上的点，其纵标 $y=0$. x 轴上的点，其纵标、竖标均为零，即 $y=0,z=0$. 同理，y 轴上的点，$x=0,z=0$；z 轴上的点，$x=0,y=0$. 原点的三个坐标均为零.

点(x,y,z)关于 xOy 坐标面的对称点的坐标是$(x,y,-z)$，关于 x 轴的对称点的坐标为$(x,-y,-z)$. 关于原点的对称点的坐标为$(-x,-y,-z)$. 其余情况可类推.

设 $P(x,y,z)$为空间一点，从点 P 向 xOy 平面作垂线，设垂足为 Q，则易知点

Q 的坐标为$(x,y,0)$. 点 Q 称为点 P 在 xOy 平面上的投影. 同理可知，点$R(0,y,z)$和点 $S(x,0,z)$分别是 P 点在 yOz 平面及在 zOx 平面上的投影.

7.1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 d.

过 M_1、M_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7.5). 显然，

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$$

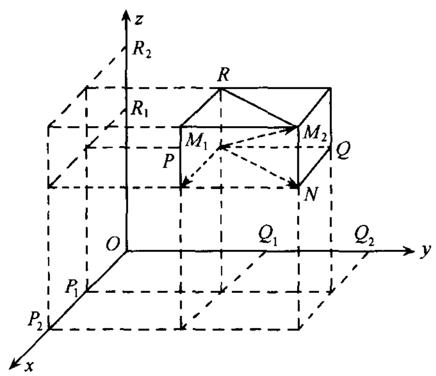


图 7.5

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$
$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$
$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{7.1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，点 $M\ (x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 7.1　在 z 轴上求一点 M，使 M 到 $A(1,0,2)$，$B(1,-3,1)$两点的距离相等.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上，可设 M 点的坐标为$(0,0,z)$. 根据题意，有

$$|MA| = |MB|$$

即

$$\sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0+3)^2 + (z-1)^2}$$

两边去根号,解得 $z=-3$,所求的点为 $M(0,0,-3)$.

习题 7.1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在卦限:

$A(1,-2,3)$;$B(2,3,-4)$;$C(2,-3,-4)$;$D(-2,-3,1)$;$E(-2,3,1)$.

2. 落在三个坐标面和三个坐标轴上的点各有什么特征?指出下列各点的位置的特殊性:$A(5,0,0)$;$B(0,-3,0)$;$C(0,0,4)$;$D(1,2,0)$;$E(1,0,2)$.

3. 求点(a,b,c)关于各坐标面、各坐标轴和坐标原点的对称点的坐标($a\cdot b\cdot c>0$).

4. 自点(a,b,c)分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标($a\cdot b\cdot c>0$).

5. 已知 A,B,C 三点的坐标. 求三角形 ABC 的边长,确定它们是否是等腰三角形、直角三角形.

(1) $A(2,1,0)$, $B(3,3,4)$, $C(5,4,3)$;

(2) $A(5,5,1)$, $B(3,3,2)$, $C(1,4,4)$.

7.2 向量及其运算

7.2.1 向量的概念

在现实生活中,我们遇到的量通常有两种类型. 一类是"数量"(也称标量),另一类是"向量"(矢量). 有的量在取定测量单位之后,用一个实数就可以表示出来,如温度、体积、长度、质量等,这种量都是数量. 另外,有的量不但有大小,还带有方向,要描述一个质点的位移,只指出质点经过的距离是不明确的,还要同时指出它移动的方向才算完整. 类似的量还有速度、加速度、力、力矩、电场强度等,它们虽然各有不同的物理意义,但都是既有大小又有方向的量,我们把这类量称为向量. 为区别于数量,通常用一个黑斜体字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{f}$ 等.

由于向量具有大小和方向两个要素,而具备这两个要素的最简单的几何图形是有向线段,因此我们通常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的指向表示向量的方向. 两个有向线段,只要它们的指向相同,长度相等,即使处在不同的位置,它们仍然表示同一个向量. 所以一个有向线段只能表示一个向量,起点不同而大小、指向均相同的有向线段都表示同一个向量.

图 7.6 是一个平面图形. 图上的有向线段虽然位置各不相同,但它们表示同一个向量,它们有一个共同的特点:每个有向线段的终点可由始点先向右(沿 x 轴正

方向)移动三个单位,再向上(沿 y 轴正方向)移动两个单位而得到.

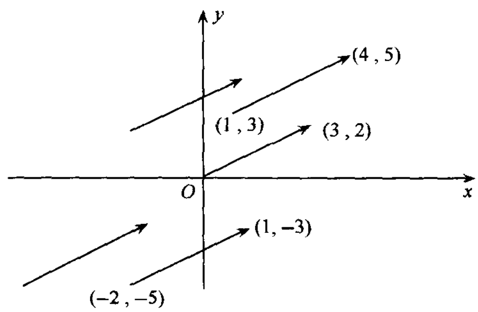


图 7.6

定义 7.1　一个二元有序实数组(a,b)称为一个二维向量.二维向量的全体记作 $\boldsymbol{V}_2$;一个三元有序实数组(a,b,c)称为一个三维向量.三维向量的全体记作 $\boldsymbol{V}_3$,其中实数 a、b、c 称为向量的分量.

下面的定义建立了二维向量与平面上的点,三维向量与空间的点之间的联系.

定义 7.2　若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$为平面上两点,则二维向量$\boldsymbol{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$就称为由有向线段$\overrightarrow{AB}$所表示的向量.类似地,若 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,则三维向量$\boldsymbol{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$就称为有向线段$\overrightarrow{AB}$所表示的向量.

向量$\boldsymbol{v}$ 的大小(也就是表示$\boldsymbol{v}$ 的任一有向线段的长度)称为$\boldsymbol{v}$ 的模,记作$|\boldsymbol{v}|$.给定向量$\boldsymbol{v}=(a,b)$,我们有

$$|\boldsymbol{v}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

模等于零的向量称为零向量.显然(0, 0)是二维向量空间中唯一的零向量,我们把它记作 $\mathbf{0}$,即 $\mathbf{0}=(0,0)$.零向量的方向可以认为是任意的.

三维向量的情形也可类似地讨论.

例 7.2　已知 $A(1,0,2)$,$B(2,-1,1)$是空间两点,求向量$\overrightarrow{AB}$和它的模.

解　$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ -1-0,1-2)=(1,-1,-1)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

7.2.2　向量的线性运算

定义 7.3　设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.向量$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

定义 7.4　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$c$ 为实数.向量(ca_1,ca_2,ca_3)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 c 的乘积,记作 $c\cdot\boldsymbol{a}=(ca_1,ca_2,ca_3)$.向量的加法运算和数乘运算统称为向量的线性运算.

在V_3中，有三个单位向量扮演着重要角色，它们是$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$. 方向依次与x轴、y轴、z轴的正向相同.

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)\\&=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)\\&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这说明任意一个三维向量都可由$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$线性表示. 我们称$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为V_3中的一组标准基.

例 7.3 $\boldsymbol{a}=(3,0,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,5)$. 求$|\boldsymbol{a}|$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(3,0,4)+(1,-2,5)=(4,-2,9)\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(3,0,4)-(1,-2,5)=(2,2,-1)\\3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}&=3(3,0,4)+5(1,-2,5)\\&=(9,0,12)+(5,-10,25)=(4,10,-13)\end{aligned}$$

例 7.4 设$\boldsymbol{a}=(1,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,5)$，求

(1) 与$\boldsymbol{a}$方向相同的单位向量$\boldsymbol{e}$.

(2) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$在标准基$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$下的表示形式.

解 (1) $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{(1,1,3)}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}(1,1,3)$

(2) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1,1,3)-2(-2,1,5)=(5,-1,-7)=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$

7.2.3 向量的数量积

定义 7.5 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，称$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的对应分量乘积之和为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的数量积，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

数量积也可称为“点积”或“内积”.

7.2.4 向量方向角和方向余弦

非零向量$\boldsymbol{a}$和三个坐标轴正向的夹角α,β,γ称为$\boldsymbol{a}$的方向角. 三个方向角的余弦值$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为$\boldsymbol{a}$的方向余弦. 其中

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}|}=\frac{(a_1,a_2,a_3)\cdot(1,0,0)}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}$$

同样，有

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|};\quad\cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

例 7.5　已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦、方向角．

解

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}}{6},\quad \beta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3},\quad \gamma=\arccos\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$$

7.2.5 向量的向量积

两个向量还可做所谓“向量积”运算，其运算结果是一个向量而不是一个数. 为区别于数量积运算，我们用“×”号作为“向量积”运算的符号. 但读者要特别注意：数量积运算在向量空间 $\boldsymbol{V}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_3$ 中均可定义，而“向量积”运算仅仅定义在 $\boldsymbol{V}_3$ 中.

定义 7.6　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，定义为由下式规定的向量

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

为了使定义便于记忆，我们把定义向量积用标准正交基 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示，改写成行列式的形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

例 7.6　若 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,7,-5)$ 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 7 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 7 & -5\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -5\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

习题 7.2

1. 求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

(1) $\boldsymbol{a}=(1,0,3)$，$\boldsymbol{b}=(0,0,1)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(0,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,-3)$.

2. 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

(1) $\boldsymbol{a}=(-1,-2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,8,-6)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(2,+3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-3,1)$.

3. 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(1) $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$；

(2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$.

4. 证明$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

7.3 曲面及其方程

7.3.1 曲面方程的概念

类似于平面解析几何中的曲线，在空间解析几何中，一个曲面可被看成是具有某种几何性质的点的轨迹. 如果有一个曲面 S 和一个三元方程 $F(x, y, z)=0$，它们满足下面两个条件：

(1) 曲面上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$.

(2) 不在 S 上的任一点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z)=0$，那么，曲面 S 就称为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形，而 $F(x, y, z)=0$ 称为曲面 S 的方程. 建立了空间曲面及其方程的联系之后，我们就可以通过方程的解析性质来研究曲面的几何性质了.

空间解析几何研究的基本问题是：

(1) 已知曲面 S 上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程.

(2) 已知曲面的方程，研究曲面的几何形状.

7.3.2 几种常见曲面

1. 旋转曲面

定义 7.7 平面上的一条曲线绕着同一平面上的一条定直线旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面，这条定直线称为旋转曲面的轴.

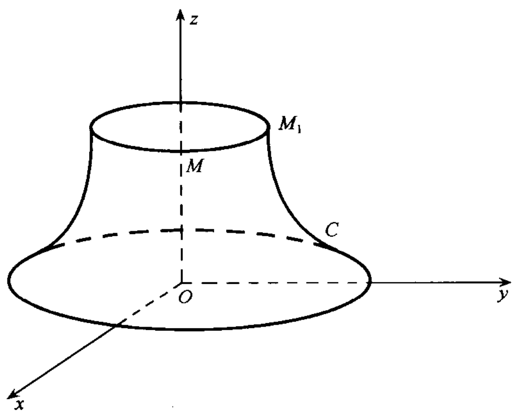


图 7.7

如图 7.7 在 yOz 坐标面上有曲线 C，它的方程为 $F(y,z)=0$. 把这条曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，它的方程是

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程是

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

xOy 坐标面上的曲线绕 x 轴或绕 y 轴旋转；xOz 坐标面上的曲线绕 x 轴或绕 z 轴旋转都可用类似的方法推出曲面的方程.

例 7.7　将 xOz 坐标面上 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 的椭圆分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解　绕 x 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{b^2}=1$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

即

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

这两种曲面都叫做旋转椭球面.

例 7.8　直线 L 绕另一条与 L 相交的定直线旋转一周，所得的旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha(0<\alpha<\pi/2)$ 称为圆锥面的半顶角，试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程.

解　在 yOz 平面上，与 z 轴相交于原点，与 z 轴夹角为 α 的直线方程为

$$z=ky\qquad(k=\cot\alpha)$$

此直线绕 z 轴旋转所生成的圆锥面方程为

$$z=k(\pm\sqrt{x^2+y^2})$$

也可写成

$$z^2=k^2(x^2+y^2)\qquad(k=\cot\alpha)$$

2. 柱面

一条动直线沿着一条已知曲线（不与动直线同在一平面内）运动，且在运动过程中，始终平行于一条定直线，则此动直线所形成的曲面叫做柱面. 动直线叫做母

线.已知曲线叫做准线(见图 7.8).

我们这里只讨论母线平行于坐标轴的柱面.

设有一个不含 z 的方程,例如

$$x^2+y^2=R^2$$

表示的是母线平行于 z 轴的圆柱面的方程.

一般地,在空间解析几何中,不含 z 而仅含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面;同理,不含 x 而仅含 y,z 的方程表示母线平行 x 轴的柱面;不含 y 而仅含 x,z 的方程表示母线平行于 y 轴的柱面.

例如,$y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,xOy 坐标面上的抛物线 $y^2=2x$ 是它的一条准线.这个柱面称为抛物柱面(见图 7.9).

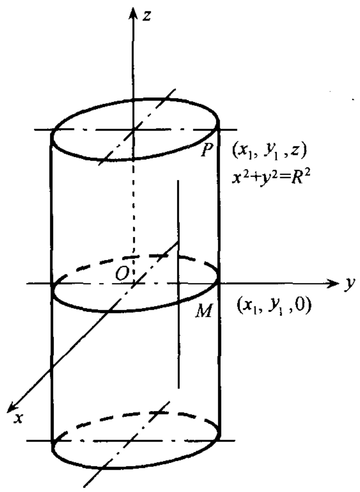


图 7.8

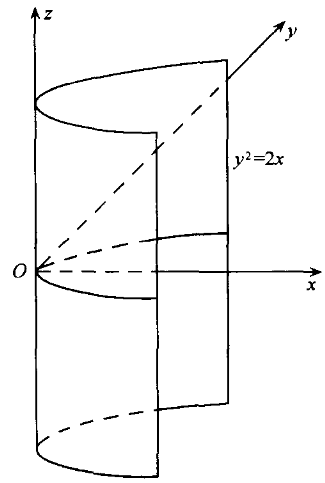


图 7.9

下面再举一些常见的母线平行于 z 轴的柱面.

椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

双曲柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

3. 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,b>0,c>0)$$