

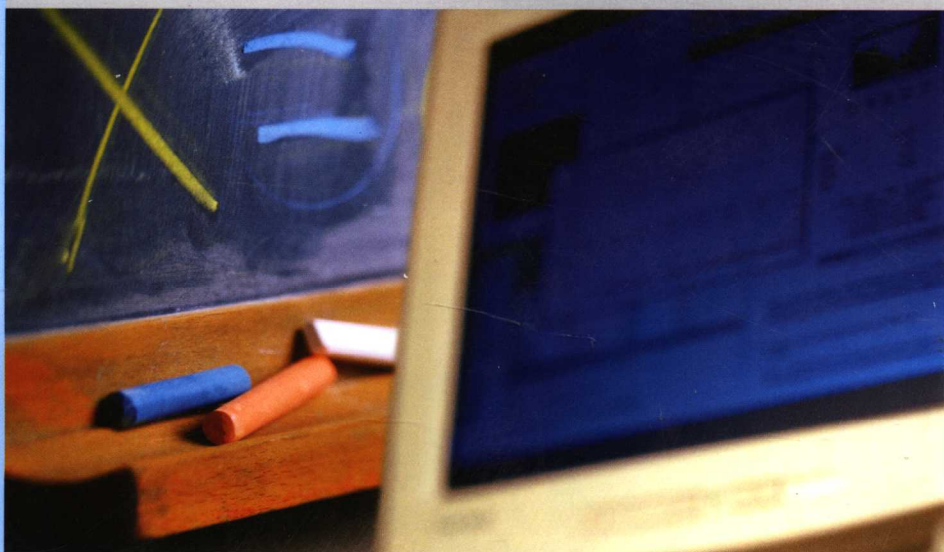
小学教师教育本科段教材

问题解决 与数学思考

WENTI JIEJUE YU SHUXUE SIKAO

首都师范大学初等教育学院 组编

郜舒竹 编著 ▶



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

小学教师教育本科段教材

问题解决 与数学思考

WENTI JIEJUE YU SHUXUE SIKAO

首都师范大学初等教育学院 组编

郜舒竹 编著



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

问题解决与数学思考/郜舒竹编著. —北京: 首都师范大学出版社, 2007. 1

小学教师教育本科段教材

ISBN 978-7-81064-908-7

I. 问… II. 郜… III. ①教学研究—师范大学—教材 ②小学—教学研究 IV. G622.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 005313 号

WENTI JIEJUE YU SHUXUE SIKAO

问题解决与数学思考

郜舒竹 编著

责任编辑 刘小峰

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100037

电 话 68418523 (总编室) 68982468 (发行部)

网 址 cnuph.com.cn

E-mail master @ cnuph.com.cn

北京嘉实印刷有限公司印刷

全国新华书店发行

版 次 2007 年 2 月第 1 版

印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷

开 本 787mm×1 092mm 1/16

印 张 13.25

字 数 222 千

定 价 20.00 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

《小学教师教育本科教材》编委会

编委会主任 谢维和

编委会副主任 王万良 吴凤臣

编委(以汉语拼音字母为序)

陈惠国 陈树杰 傅作梅 高富勤

郜舒竹 黄建平 林立 刘晓玫

吕丹妮 王长纯 王万良 王小华

王云峰 王智秋 谢维和 徐玉珍

赵淑文 朱宝清 范希运 吴登云

序 言

在我国基础教育的改革与发展中，小学教师培养模式的改革恐怕算是最具有挑战的方面和领域之一。一方面，它面临着学历层次提高的要求；另一方面，它也需要适应新的课程标准的改革；同时，小学一线教师的培养机构也在经历着由中等师范院校向大学的转变。所有这些都要求小学教师培养过程中的各个环节和因素都相应地进行改革与调整。在这些环节和因素中，教材的重新建设则是一个非常关键的方面。由首都师范大学初等教育学院组织编写的高等教育自学考试初等教育专业（独立本科段）的新教材，集中了各个方面研究和实践的经验和成果，适应新形势的要求与挑战，经过反复的打磨，形成的一套不仅能够满足高等教育自学考试需要，而且同样适应高等学校小学教师培养和培训的系列教材。它是我国第一套适合于高等教育自学考试初等教育专业本科阶段学习教材，因而是小学教师培养模式建设和教学创新的一项非常有意义的措施，是提高小学教师培养质量和水平的一个重要因素，也是该专业主考学校首都师范大学初等教育学院给所有小学教师提供的宝贵的教育资源。

当然，作为高等教育自学考试用书，这套教材在编写过程中，始终坚持了以考生为本的基本原则。在熟悉和了解小学教师的实际与小学教师参加自学考试的特点的基础上，在掌握和认识高等教育自学考试规律和基本要求的实践中，这套教材在整体结构的安排，各本书的体例，章节的顺序，以及内容的组织、文字的写作等方面，均充分考虑了高等教育自学考试的考生的实际需要和特点。同时，这套教材不仅在形式上考虑了小学教师考生的学习特点和实际，而且，在内容上也结合了当前小学教师面临新课程标准要求的实际需要，包括整个书目的选择、教学目标的制定，以及教学内容的安排等，都在一定程度上体现了当前基础教育，特别是小学教育改革与发展的要求。而在这些方面，我个人感到比较突出的主要有以下几个方面。

第一，重视小学教师研究能力的培养与训练。

与以往中小学教材不同的是，这套教材在强调小学教师在教材教法方面

的学习与训练以外,还非常重视小学教师对于各个主要学科的教学研究。例如,这套教材中将过去比较传统的小学语文、英语和教学教材教法的课程,分别拓展为《小学语文教学研究》、《小学英语教学研究》和《小学数学教学研究》,由此突出了小学教师培养和训练中研究能力的锻炼和提高。这与当前中小学教师队伍建设和新课程的要求是非常一致的。如果说,过去我们常常将学科知识、教育教学的知识与能力,以及道德修养三个方面作为合格教师的基本条件,那么,随着时代的发展和教育的改革与变化,研究能力也将越来越成为一个合格教师的必要条件。不会研究课程、教材和学生的教师,绝对不是一个合格的教师。而这套教材正是非常敏锐地看到了这一点,并且在教材体系上进行了这样的改革与创新,应该说,这种改革是非常必要和及时的。这里需要特别说明的是,有的人也许会认为,小学这样简单的教学还需要什么研究吗?如果我们这样来看这个问题,这样认识小学教师的工作,那真是极大的误解。根据教育学的基本理论和个体成长的规律,小学阶段的儿童的成长对他一辈子的影响都是十分关键的,而在这个阶段的教育也是最复杂的,我们甚至可以认为,它可能比在中学和大学的教育对个体的成长都更加重要。因为,正是在这个阶段,儿童开始形成了他的各种习惯,特别是对学习和外部世界和社会的基本态度。这种习惯和态度对于他而言,将是一辈子的事情。从发展心理学的角度看,小学阶段的儿童所经历的发展阶段也是比较复杂的,其中的变化也是非常丰富的。因此,它对于教师的研究能力的教学水平的要求也是非常高的。特别是要求教师能够结合教学,对儿童和青少年本身,包括他们的成长规律、学习规律与特点等,进行深入细致的探讨和研究。

第二,注重培养和提高教师的素养。

大量实践证明,中小学教师不仅需要具有比较丰富的学科知识和理论,掌握熟练的教学技能,而且,也需要具备非常高的综合素养。这种综合素养往往是看不见,摸不着的,但是,它又常常是在各个方面发挥作用的。它是一种显性的知识,更是一种隐性的知识。它体现在一个教师的观念之中,也常常表现在教师的思想和方法中。这套教材非常清楚地看到了这种需要,因而也加强了这个方面的建设。例如,《数学的观念、思想和方法》一书,正是比较充分地体现这个特点和取向。而且,历史类的教材也是帮助教师形成这种综合素养的非常有效的途径,包括中外教育史和中国文学史。这里需要特别提出的是,小学教师的培养与中学教师的培养模式是有所不同的,培养规格也是不同的。一般而言,小学教师往往是一种全科性的培养,而中学教

师则更多是一种专科性的培养，因而两者的知识和理论结构是不同的。作为小学教师，由于学生的特点不同，往往需要具有更加全面的知识、理论和能力，从这个角度看，这种综合性的素养常常是十分重要的。如何全面地掌握各个学科的知识，特别是融会贯通地应用这些不同的知识，了解各个学科知识和理论之间的关系，对于小学教师来说，可能比单纯某一个方面的学科知识更加重要。

第三，适应新课程的特点和要求。

我国目前正在进行和实施的中小学新课程改革和新的课程标准的建设，对于我们过去的课程和教材都是一个新的挑战，它要求在课程建设和教材编写方面相应的进行调整和改革。在这次新课程标准的建设中，比较突出的特点就是非常关注青少年学生的需要，体现了以学生为本的思想和原则：增加了综合活动实践课。这对于我们许多小学教师来说，也是一个新的挑战。现在这套教材正是非常及时地抓住了这种变化，特别加强了这个方面的建设。例如，《小学生综合实践活动》的教材，以及《小学生心理发展与心理健康》的教材正是反映了这种新的要求，适应了新的课程标准对小学教师的要求，也为小学教师应对这种挑战提供了非常直接的帮助和支持。应该说，这种综合实践活动课的建设是一项非常需要研究和探讨的课程。而且，小学的综合实践活动与中学的综合实践活动课又是有所不同的。如何抓住小学综合实践活动的特点，的确不是一件容易的事情。而丛书的编写者大胆地进行了这个方面的尝试，并且产生了比较好的效果，这一点是值得鼓励和赞赏的。

显然，希望在一个简短的序言中将这套教材的各个方面都详细地进行介绍是不可能的。但是，作为一个关注我国基础教育改革与发展的教育工作者，欣喜地看到它的出版，进而借这个机会表达自己的一点想法和体会，也算是一种参与吧！这里，我还要特别感谢北京市教育委员会和北京市高等教育自学考试委员会的领导、支持和非常具体的指导帮助。我也要感谢首都师范大学的领导，特别是首都师范大学初等教育学院的领导在组织编写这套教材中所付出的辛勤劳动和大量科学细致与认真的组织工作。当然，我一定要感谢这套丛书的各位编写者的努力，以及首都师范大学出版社领导、本套书的责任编辑，没有他们的智慧和踏实的工作，没有他们的大力支持，整套教材的出版也是不可能的。

但是，在最后我还应该说明的是，一套教材无论如何的出色，也总是有它的不足的。它不可能囊括小学教师所应该具有的所有知识、理论和素质。也不可能完全反映所有小学教师教育研究的全部观点与看法。更加重要的

是，它不可能完全代替教师本身的教学实践和工作，更不能取消教师本人的创新。一套教材的真正的效果，还应该取决于教师的教学工作，依靠教师对教材的研究和应用。如果说，教材只是一种教学资源，那么，这些资源能否真正发挥比较大的作用，产生更大的效益，还需要依靠教师本身的实践。

谢维和

2004年4月27日

于励耘楼

前言

本书作为本科小学教育专业《问题解决与数学思考》课程的教材，旨在提高读者问题解决与数学思考的实际能力，不过多涉及理论方面的内容^①。为了说明本书的编写思路，借此前言先简要介绍数学思考的含义以及问题解决与数学思考的关系。

数学思考实际上是在问题解决中进行的。英国学者 Leone Burton (1984)^② 指出了在问题解决中进行数学思考的4个核心过程：第一是特殊化 (Specializing)，指的是遇到一个相对复杂的问题，首先研究这个问题的诸多具体情况，目的是便于理解和解决，进而寻求解决问题的一般规律；第二是猜想 (Conjecturing)，通过诸多具体问题的解决，发现它们之间的联系，总结出一般性的结论或规律，这种未经证明的结论或规律即称为猜想；第三是一般化 (Generalizing)，问题解决之后，把相应的结论或方法推广到更为广泛的范围，这种过程就是一般化；第四是确认 (Convincing)，一般性的结论需要得到认可，在数学中也称为证明。

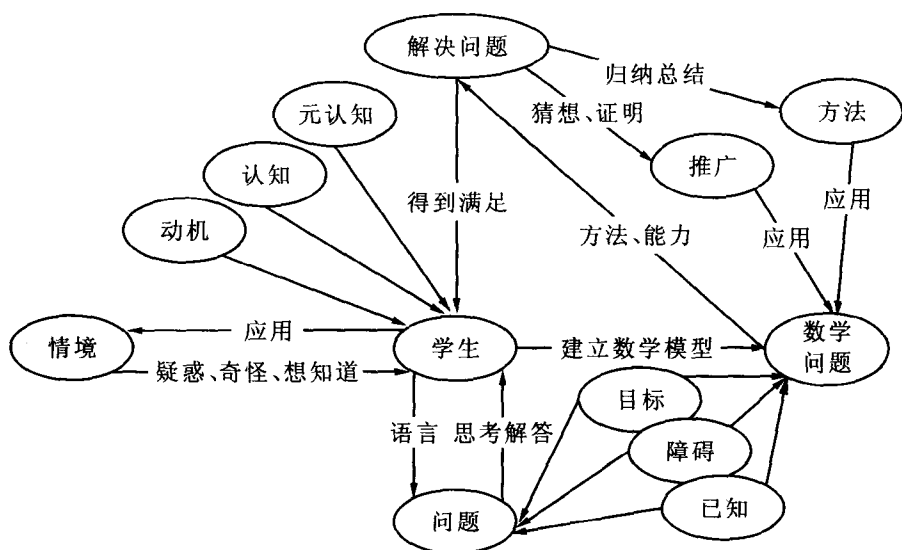
依据这样的认识，本书内容力图实现问题解决与数学思考过程的有机融合，书中例题的分析与解决将遵循以下的模式。

问题提出→问题转化→问题解决→问题推广→结论证明→应用

这一模式是从数学角度建构的，如果融入心理学中关于动机、认知、元认知等理论，问题解决与数学思考的过程可以用以下图示粗略地表示出来。

① 理论方面的内容可参见：郅舒竹主编，数学的观念、思想和方法，北京：首都师范大学出版社，2004.4，第7章、第8章。

② Journal for Research in Mathematics Education. 1984, Vol. 15, No. 1, 35~49.



从上图的最左侧开始，问题源于“情境”的刺激；情境中得到的具体问题需要转化为数学问题；数学问题以及问题的解决是通过数学思考不断循环的过程，就是说问题的解决会带来新的问题；最后把研究的结果应用于情境中去。

为了突出问题解决和数学思考能力方面的因素，书中例题的解决尽量回避较多的数学知识和数学符号，大部分例题的解决只需要小学范围内的数学知识^①。为了便于查阅，书后列有全部“例题与思考题索引”。建议读者先从索引中的问题做起，对每一个问题给出自己的思考和解答，然后再去阅读正文。总之，问题解决与数学思考能力的提高并非一日之功，仅靠“读”是远远不够的，必须要亲自“做”，即亲自“在头脑中做数学^②”。

本书能够作为培养各级各类小学教师的数学能力的教育与培训教材，也可以作为研究小学数学教学的参考用书，还可以作为数学竞赛的培训教材。

本书得以顺利出版，在此要感谢首都师范大学初等教育学院、首都师范大学出版社的支持与帮助。

部舒竹

① 这些问题并不意味着容易。

② 英译是 Doing mathematics in mind.

目 录

第 1 章 数学思考与问题解决的要素	1
1.1 概念、判断、推理	1
1.2 特殊化、猜想、证明	6
1.3 错误结论的产生	9
1.4 判断与语言	11
1.5 异中求同、同中求异	14
1.6 反驳	21
1.7 趣题欣赏	24
第 2 章 整数问题	28
2.1 回归历史	28
2.2 自然数的表达	36
2.3 两位数	43
2.4 三位数	48
2.5 质数	55
2.6 分与合	61
2.7 余数	65
第 3 章 分数问题	70
3.1 分数	70
3.2 倍与率	75
3.3 行车走路问题	80
3.4 上山、下山问题	87
第 4 章 面积问题	95
4.1 三角形的中位线	95
4.2 整体与局部	100
4.3 旋转的线段	108

第 5 章 游戏问题	111
5.1 扑克牌游戏	111
5.2 数字图案	117
5.3 反其道而行之	126
5.4 称球问题	130
5.5 击瓶游戏	134
第 6 章 解题研究	139
6.1 基本概念	139
6.2 方法的来源	142
6.3 推广与化归	149
6.4 算术的威力	154
6.5 联系实际	157
例题与思考题索引	172

第 1 章 数学思考与问题解决的要素

本章导读

- ◆ 正确的思维具有什么样的规律?
- ◆ 错误的结论是怎样产生的?
- ◆ 思维与语言是什么样的关系?
- ◆ 怎样进行证明?
- ◆ 怎样进行反驳?
- ◆ “聪明”具有什么样的特征?

1.1 概念、判断、推理

在现实生活中，经常会遇到这样一些情况：

有些人说的话前言不搭后语，讲了半天别人也不知他在说什么；有的人说话条理清晰，使人听起来自然、明了。

有的文章概念含混，观点模糊，令人捉摸不透；有的文章结构严谨，分析透彻，论证有说服力。

有的人处理复杂问题时，好像遇到一团乱麻，茫然无措；有的人则善于思考，环环紧扣，层层深化，把问题处理得有条不紊。

就存在的问题，究其原因，因素很多，其中重要的一条是未掌握推理与判断的规律。当人们的思维活动违背了推理与判断的一般规律时，言谈举止就会出现这样或那样的问题。

事实上，数学思考离不开推理与判断，可以这样说，逻辑推理的能力是数学思考的基础。

人的思维主要有 3 种形式：一种是认识事物的本质属性，这种思维形式称为“抽象 (Abstraction)”；所谓概念就是抽象的产物，是构成人们思维

活动的细胞。另一种是对某种对象有所肯定或否定的思维形式，称为“判断 (Judgement)”。判断是建立在概念的基础之上的，没有概念就没有判断。第三种是推理。“推理 (Reasoning)”指的是由一个或几个已知判断 (前提) 推出未知判断 (结论) 的思维形式。

例 1.1 A, B, C, D 这 4 个人分别要到甲、乙、丙、丁 4 个单位去办事，已经知道甲单位星期一不接待，乙单位星期三不接待，丙单位星期四不接待，丁单位只在星期二、星期四和星期六接待，星期日 4 个单位都不办公。一天，他们 4 个人在一起议论哪一天去办事。

A 说：你们可别像我前天那样，在人家不接待的日子去，白跑一趟。

B 说：我今天必须去，明天人家就不接待了。

C 说：我今天不能去，因为今天人家不接待。

D 说：我从今天起，连着 4 天，无论哪天去都行。

根据以上条件，请推断一下，4 个人分别去哪一个单位办事。

分析 为了解决这个问题，首先要把每个单位的接待日期弄清楚，列出以下表格。

单位 星期	甲	乙	丙	丁
星期一	不接待	接待	接待	不接待
星期二	接待	接待	接待	接待
星期三	接待	不接待	接待	不接待
星期四	接待	接待	不接待	接待
星期五	接待	接待	接待	不接待
星期六	接待	接待	接待	接待
星期日	不接待	不接待	不接待	不接待

下面根据每个人说的话进行推理。

先分析 D 说的话：“我从今天起，连着 4 天，无论哪天去都行。”从表中发现，能有连续 4 天都接待的单位只有甲单位，所以 D 一定是去甲单位，而且可以推出，今天不是星期二就是星期三。

再分析 C 说的话：“我今天不能去，因为今天人家不接待。”从表中看出，星期二每个单位都接待，所以今天不是星期二，只能是星期三。从表中还可以看出，星期三不接待的单位有乙单位和丁单位。

再分析 B 说的话：“我今天必须去，明天人家就不接待了。”从表中看出，星期三接待的单位只有甲和丙，而已知 D 去甲单位了，所以 B 一定是去丙单位。

最后分析 A 说的话：“你们可别像我前天那样，在人家不接待的日子去，白跑一趟。”由于今天是星期三，前天就是星期一，星期一不接待的单位是甲和丁，已知 D 去甲单位，所以 A 只能是去丁单位。

现在已经推出，今天是星期三，A 去丁单位，B 去丙单位，D 去甲单位，因此推出 C 去乙单位。将这些结果列成下表。

单位	甲	乙	丙	丁
人	D	C	B	A

这个问题到现在就圆满地解决了，回顾一下整个推理过程。

首先读懂问题中的用词，诸如什么叫“接待”和“不接待”，“星期三的前天是星期一”等，这个环节称为“明确概念”。

接下来是将已知的一些条件列成表格，目的是使之一目了然，这是推理的前提，对它们的熟悉程度，决定着下面的推理是否顺利，这个环节可以称为“熟悉事实”。

再接下来是分析每个人说的话（这也是条件）与表中所列出事实的关系。例如，如果孤立地分析 D 说的话，什么也得不出来，结合表中的事实，就可以推出 D 去甲单位的结论，这个环节称为“发现联系”。

有了以上环节，下面就可以保证尽可能多地、合情合理地推出结论。这里要注意，有些结论可能不是题目所要求的结论，但是它可能成为下面推理非常有用的条件。例如，从 C 说的话，并不能推出 C 去哪一个单位，只推出今天是星期三这个结论，这个结论不是题目所要求的，但是这个结论在下面确定 B 去丙单位时却起了关键的作用。

有了明确的概念，才会正确的判断，也才可能有正确的推理。

在逻辑上，把诸如“条件”和“结论”这样的叙述称为“判断”，判断有真的，也有假的。因此，如何检验一个判断是真还是假，就至关重要，以下内容中将详细介绍检验的方法。

例 1.2 A, B, C, D 这 4 个人分别要到甲、乙、丙、丁 4 个单位去办事，已知甲单位星期二和星期四不接待，乙单位星期三和星期六不接待，丙单位星期一和星期五不接待，丁单位星期四和星期五不接待，星期日 4 个单位都不办公。一天，他们 4 个人在一起谈起哪天去办的事。

A 说：有一天不是星期日，我和 D 一起去，结果这两个单位在这一天都不接待。

B 说：今天和明天我都不能去，因为我去的单位不接待。

C 说：明天我和 D 一起去。

D 说：还是后天 B，C 和我一起去吧。

根据以上条件，请推断出每个人去哪一个单位。

分析 首先将每个单位接待与不接待的日期用下表表示出来。

单位 星期	甲	乙	丙	丁
星期一	接待	接待	不接待	接待
星期二	不接待	接待	接待	接待
星期三	接待	不接待	接待	接待
星期四	不接待	接待	接待	不接待
星期五	接待	接待	不接待	不接待
星期六	接待	不接待	接待	接待
星期日	不接待	不接待	不接待	不接待

先分析 B 说的话：“今天和明天我都不能去，因为我去的单位不接待。”从这句话知道，B 去的单位应该具有连续两天不接待的条件，观察上表发现，有连续两天不接待的单位可以是乙、丙和丁，这时面临 3 个判断。

判断 1：B 去丙单位，今天是星期日。

判断 2：B 去丁单位，今天是星期四。

判断 3：B 去乙单位，今天是星期六。

这 3 个判断中有一个而且只能有一个是正确的，检验出哪一个是正确的，是进一步推理的关键。那么怎样确定哪一个判断是正确的呢？

可以采用一种称为“假设”的方法。所谓假设的方法，就是在不知道某判断是否正确的时候，先认为它是正确的，以此为前提（条件）进行推理，看一看推理的结论是否正确。如果正确，说明这个判断是真的，如果推理的结论不正确，说明这个判断是假的。

先假设判断 2 是正确的，也就是说：B 去丁单位，今天是星期四。在这个前提条件下分析 D 说的话：“还是后天 B，C 和我一起去吧。”由于今天是星期四，所以后天就是星期六。从表中看到，星期六甲、丙和丁 3 个单位都

接待，而乙单位不接待，又知 B 去丁单位，则 D 和 C 分别去甲和丙这两个单位，所以 A 只能去乙单位了。再分析 C 说的话：“明天我和 D 一起去。”明天是星期五。从表中发现，星期五甲和丙这两个单位不同时接待，这就出现了条件和结论互相矛盾的情况，这个矛盾产生的原因是假设判断 2 正确，也就说明判断 2 不正确。检验出了判断 2 不正确，就说明判断 1 或判断 3 是正确的。

假设判断 3 是正确的，也就是说：B 去乙单位，今天是星期六。再分析 C 的话：“明天我和 D 一起去。”但明天是星期日，所有单位星期日都不办公。这时，条件与结论互相矛盾，说明判断 3 是不正确的。

现在知道判断 1 是正确的，也就是说：B 去丙单位，今天是星期日。在这个前提条件下，做进一步的推理。

D 说：“还是后天 B、C 和我一起去吧。”由于今天是星期日，所以后天是星期二，从表中看出，星期二有乙、丙和丁 3 个单位接待，只有甲单位不接待，这说明 A 去甲单位。

A 说：“有一天不是星期日，我和 D 一起去，结果这两个单位在这一天都不接待。”由于 D 只能去乙和丁这两个单位之一，从表中看出，甲单位和乙单位除星期日以外，没有同一天不接待的日子，而甲单位和丁单位在星期四都不接待，这说明 D 去丁单位，从而 C 就去乙单位了。

这个问题的解决中，遇到了“三中选择”的情况，也就是从三个未知真假的判断中确定哪个为真，哪个为假，采取的办法是“假设为真，推出矛盾”。

思考题 1.1

1. 简要叙述“概念”、“判断”和“推理”的基本含义。
2. 举例说明“思考问题”的基本过程。
3. 当判断一个未知真假的时候，可以采取什么样的思维方式？举例说明。
4. 甲、乙、丙、丁 4 个学生坐在同一排的相邻座位上，座位号是 1 号至 4 号。一个人说了 3 句话：“（1）乙坐在丙的旁边；（2）甲坐在乙和丙之间；（3）乙的座位不是 3 号。”后来知道这个人说的 3 句话都是假话，问每个座位上坐的是哪位学生？
5. 甲、乙、丙、丁 4 个学生坐在同一排的相邻座位上，座位号是 1 号至 4 号。已知：（1）甲和乙不相邻；（2）丙和丁不相邻；（3）甲的座位号比乙的座位号大，比丙的座位号小。问每位学生分别坐在几号座位上？