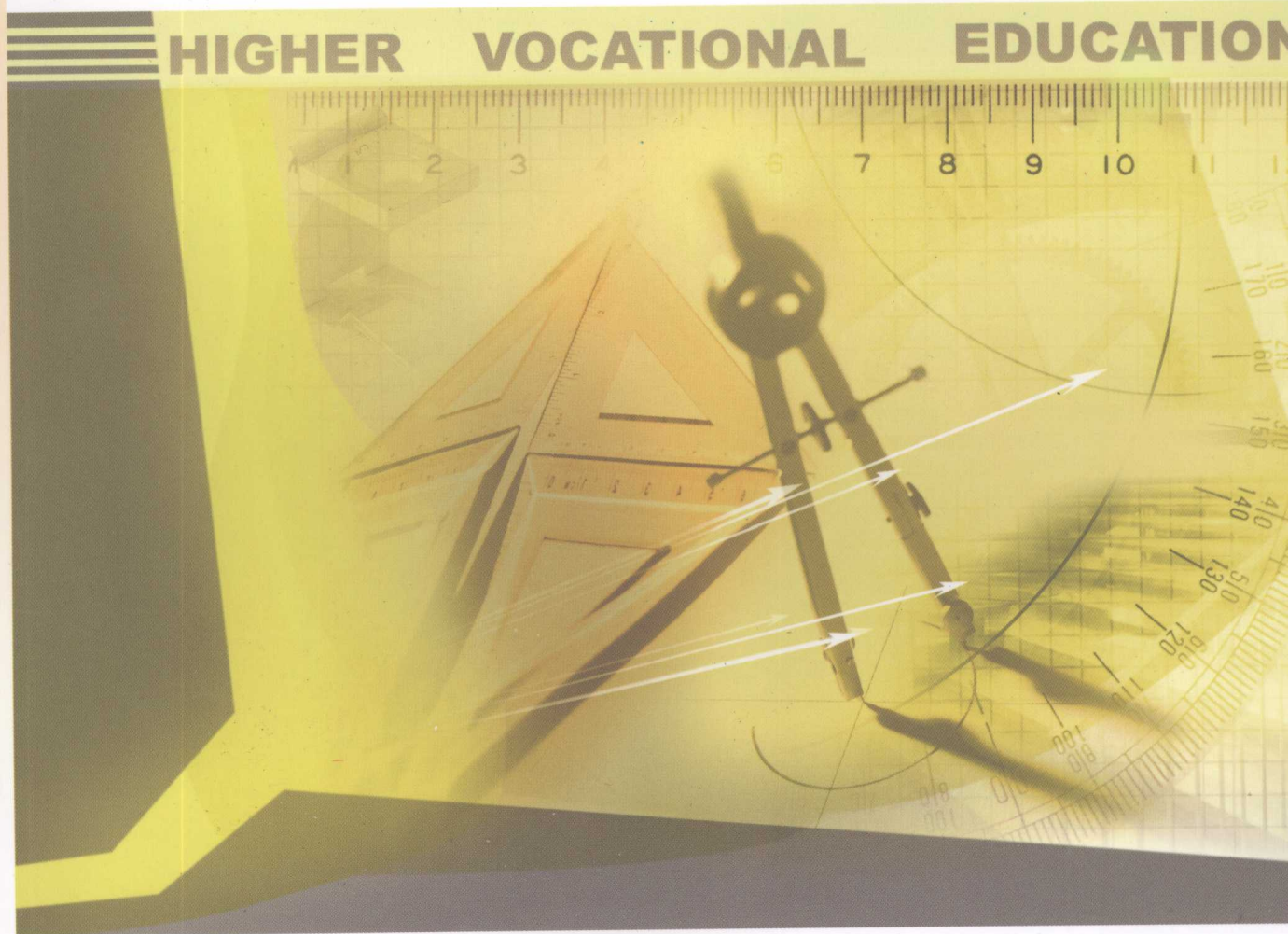


教育部高等职业教育基础课规划教材

新编高等数学教程

● 中国高等教育学会 组编

● 葛云飞 主编



科学出版社

www.sciencep.com

教育部高等职业教育基础课规划教材

新编高等数学教程

中国高等教育学会 组编

葛云飞 主编

张桦 肖新义 张丹
副主编

张慧颖 赵英丽 朱广恩

科学出版社

北京

内 容 简 介

为适应 21 世纪对高等职业技术应用型人才的新要求,提升高等数学在技能和职业指导中作用,我们编写了这本具有高职特色的高等数学教材。

本书作为教育部高等职业教育基础课规划教材之一,创新点在于把学法融入读本中,把培养学生的职业精神和职业意识写进了数学教材中,突显每章节的技术性内容。

本书包括一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、向量与空间解析几何、几何级数、常微分方程、数学建模、数学软件 Mathematica 九个知识模块,全部学完学时不少于 120 学时。前二个知识模块学完后,就可以根据专业选择所需数学知识模块。本书注重对综合知识的应用,突出一定升学应试能力,对参加“专升本”考试具有一定指导意义。

本书可作为高职高专理工类和财经类各专业的通用教材,也可作为其他各专业的参考资料,同时,也可作为普通高等专科学校和成人高校的通用教材。

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学教程/中国高等教育学会组编. —北京:科学出版社,2007
(教育部高等职业教育基础课规划教材)

ISBN 978-7-03-018987-5

I. 新… II. 中… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 070167 号

责任编辑:沈力匀 王 超/责任校对:赵 燕
责任印制:吕春珉/封面设计:李 亮

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2007 年 8 月第一次印刷 印张:30
印数:1—5 000 字数:717 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62135235 (VF02)

前 言

数学的发展,特别是计算机技术的应用,促进科学技术的迅速发展;现代科学技术的发展越来越需要数学的帮助.现代数学,已经不仅是指导人们进行精确数量分析、复杂计算和问题解决的知识和理论,而且它本身已经成为一门技术——数学技术.计算机不过是“数学的心脏加上机械的外壳”,它是一种数学技术的载体.

为了适应 21 世纪人才发展的市场需要,配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展,为了满足高等职业教育发展的需要,提升高等职业技术人员的综合能力和素质,以培养应用型、实用型人才的需要.本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,在认真总结全国高职高专数学教改经验的基础上,结合高等职业院校学生及教师的实际情况,我们编写了这本《新编高等数学教程》.

本书具有以下特点:

(1) 体现高职特色.教材立足于高职高专开设两个学期高等数学课程的各个专业,是理工和财经类专业的基础课,根据各专业对数学的要求,贯彻“理解概念、强化应用和适用”的教学原则,强化基础知识,基本思想,突出本质.以教师好用,学生好学为编写出发点.突现高职特色、明确技能要求,教材的讲解和阐述充分考虑数学知识服务于专业需要,从学生的实际出发,不拔高、不刻意追求知识系统,立足以专业“够用、实用”为基本编写原则.

(2) 突出人文化、生活化.教材合理设置章节的时间性,语言追求“人文”化,对学生具有激励和开发作用,以数学概念生活化,引导学生想学数学、乐学数学为编写主线.教材适时溶入新的知识和信息,提高数学趣味性,具有现实性和前瞻性.

(3) 有机整合,加强职业指导.教材有机整合数学知识,提高数学教学的职业指导能力,在指导就业和和工作能力上有较大的突破,这也是本书的一大亮点.

(4) 寓教于乐,赏心悦目.教材设置教师与学生的互动环节,让学生参与到教学中,通过:想一想栏目,解决学生学习中疑难问题,消除学生怕上数学课的念头,提高了教材的亲合力.

(5) 难易适中,统筹兼顾.通过案例分析解决数学知识与专业知识的结合问题,增强数学知识的应用能力.在每一节习题设置上难度低于例题难度,与教师讲课进度高度一致;没有出现教师需要补充知识学生才能做的练习题.在综合习题的设置上,考虑的是知识综合运用和以后升本和自学的需要,难度与例题持平.

本书在于保证数学知识的系统性和严密性的基础上,增强数学的概括性和应用性,把技术性写进应用数学的读本中,每一章给出学法指导和综合训练,能使学生轻松整合本章知识,增强了学生内化数学知识的速度.并能使数学知识与专业知识有机整合,具有浓厚的职业特色.

本书包括一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、

向量与空间解析几何、无穷级数、常微分方程、数学建模、数学软件 Mathematica 九个知识模块,全部学完学时不少于 120 学时.前二个知识模块学完后,就可以根据专业选择所需数学知识模块.本书注重对综合知识的应用,突出一定升学应试能力,对参加“专升本”考试具有一定指导意义.

参加本书编写的有河南经贸职业学院的葛云飞(第 10 章、第 11 章)、张桦(第 4 章、第 5 章)、张丹(第 7 章、第 8 章);河南农业职业学院的朱广恩(第 1 章、第 2 章 2.1、2.2 节)、赵英丽(第 2 章 2.3 节、第 3 章);周口职业技术学院的肖新义(第 6 章、第 9 章 9.1、9.2 节);河南交通职业技术学院的张慧颖(第 9 章 9.3、9.4 节、第 12 章).主编葛云飞教授统稿、修改、总成和定稿,并改写了部分章节内容.

本书的编写得到了科学出版社的大力支持和帮助,对本书提出了许多宝贵的意见和建议,并组织专家进行修改和审定.审稿的同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此一并表示衷心感谢.

由于编者的水平有限,书中一定存在不妥之处,希望同仁和广大读者批评和指正.

目 录

第 1 章 极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的表示	3
1.1.3 函数的性质	4
1.1.4 函数的运算	5
1.1.5 初等函数	5
习题 1.1	7
1.2 极限的概念	7
1.2.1 数列的极限	7
1.2.2 函数的极限	9
1.2.3 关于极限的定理	11
1.2.4 无穷小量与无穷大量	11
习题 1.2	13
1.3 极限的运算	13
1.3.1 极限运算法则	13
1.3.2 两个重要极限	19
1.3.3 无穷小量的比较	23
习题 1.3	25
1.4 函数的连续性	27
1.4.1 函数连续的概念	27
1.4.2 连续函数的运算	28
1.4.3 闭区间上连续函数的性质	30
1.4.4 函数的间断点	31
习题 1.4	32
学法指导	33
综合习题一	35
第 2 章 导数与微分	38
2.1 导数的概念	38
2.1.1 案例分析	38

2.1.2	导数的概念	39
2.1.3	可导与连续	41
2.1.4	常用函数的导数	42
习题 2.1		44
2.2	导数的运算	44
2.2.1	导数的四则运算法则	44
2.2.2	反函数求导法则	46
2.2.3	复合函数的求导法则	47
2.2.4	三个常用函数求导方法	49
2.2.5	导数基本公式及求导法则	52
2.2.6	高阶导数	53
习题 2.2		56
2.3	函数的微分及应用	57
2.3.1	引例分析	57
2.3.2	微分的概念	58
2.3.3	微分的几何意义	59
2.3.4	微分的运算法则	59
2.3.5	微分的运算	60
2.3.6	微分在近似计算中应用	61
习题 2.3		63
学法指导		64
综合习题二		66
第 3 章	导数的应用	68
3.1	微分中值定理	68
3.1.1	拉格朗日中值定理	68
3.1.2	罗尔中值定理	70
3.1.3	柯西中值定理	71
习题 3.1		72
3.2	洛必达法则	72
3.2.1	$\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限	72
3.2.2	可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 $0 \cdot \infty$ 型与 $\infty - \infty$ 型的极限	74
3.2.3	1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型的极限	76
习题 3.2		78

3.3 函数的单调性与极值	79
3.3.1 函数的单调性	79
3.3.2 函数的极值	81
3.3.3 函数的最值	84
习题 3.3	87
3.4 函数图形的凹向与拐点	88
3.4.1 曲线的凹向性	88
3.4.2 曲线的拐点	90
3.4.3 曲线的渐近线	91
3.4.4 描绘函数图形	93
习题 3.4	94
3.5 导数在实际问题中的应用	95
3.5.1 导数在经济分析中的应用	95
3.5.2 导数在工程技术中的应用	97
习题 3.5	102
学法指导	103
综合习题三	104
第 4 章 不定积分	107
4.1 不定积分的概念与性质	107
4.1.1 不定积分的概念	107
4.1.2 不定积分的性质	109
4.1.3 基本积分公式	110
习题 4.1	112
4.2 不定积分的积分法	112
4.2.1 直接积分法	112
4.2.2 换元积分法	113
4.2.3 分部积分法	119
习题 4.2	122
4.3 有理函数的积分	123
4.3.1 有理函数的概念	123
4.3.2 简单有理函数的积分	125
4.3.3 可化为有理函数的积分	127
习题 4.3	129
学法指导	130
综合习题四	131

第 5 章 定积分	134
5.1 定积分的概念与性质	134
5.1.1 实例分析	134
5.1.2 定积分的概念	136
5.1.3 定积分的几何意义	137
5.1.4 定积分的性质	138
习题 5.1	140
5.2 定积分的积分法	140
5.2.1 变上限定积分	141
5.2.2 微积分基本公式	143
5.2.3 定积分的积分法	144
习题 5.2	148
5.3 定积分的应用	149
5.3.1 定积分应用的微元法	149
5.3.2 定积分求平面图形的面积	150
5.3.3 定积分求立体的体积	153
5.3.4 定积分在物理上的应用	156
5.3.5 定积分在经济中的应用	158
习题 5.3	159
5.4 广义积分	160
5.4.1 无穷区间上的广义积分——无穷积分	160
5.4.2 无界函数的广义积分——瑕积分	162
习题 5.4	165
学法指导	165
综合习题五	167
第 6 章 向量与空间解析几何	171
6.1 空间直角坐标系与向量	171
6.1.1 空间直角坐标系	171
6.1.2 向量	173
习题 6.1	178
6.2 向量的数量积与向量积	178
6.2.1 两向量的数量积	178
6.2.2 两向量的向量积	181
习题 6.2	184

6.3 空间的平面与直线	184
6.3.1 平面方程	184
6.3.2 直线方程	188
6.3.3 直线与平面之间的夹角	192
习题 6.3	194
6.4 空间的曲面与曲线	195
6.4.1 曲面方程	195
6.4.2 曲线方程	196
6.4.3 柱面方程	197
6.4.4 旋转曲面方程	198
6.4.5 常见的二次曲面	199
习题 6.4	201
学法指导	202
综合习题六	204
第 7 章 多元函数的微分学	207
7.1 二元函数的极限与连续	207
7.1.1 二元函数的概念	207
7.1.2 二元函数的极限	210
7.1.3 二元函数的连续	211
习题 7.1	213
7.2 二元函数偏导数与全微分	213
7.2.1 偏导数	213
7.2.2 全微分	217
习题 7.2	220
7.3 复合函数与隐函数的微分法	220
7.3.1 复合函数的微分法	220
7.3.2 隐函数的微分法	224
习题 7.3	227
7.4 多元函数的极值	227
7.4.1 多元函数的极值	227
7.4.2 多元函数的最值	230
7.4.3 条件极值	231
习题 7.4	233
学法指导	233
综合习题七	235

第 8 章 多元函数的积分学	238
8.1 二重积分的概念与性质	238
8.1.1 引例分析	238
8.1.2 二重积分的概念	239
8.1.3 二重积分的性质	240
习题 8.1	243
8.2 二重积分的计算与应用	243
8.2.1 直角坐标系下计算二重积分	243
8.2.2 极坐标系下计算二重积分	248
8.2.3 二重积分的应用	251
习题 8.2	254
8.3 曲线积分的概念与计算	254
8.3.1 第一类曲线积分——对弧长的曲线积分	255
8.3.2 第二类曲线积分——对坐标的曲线积分	258
习题 8.3	266
学法指导	266
综合习题八	268
第 9 章 无穷级数	272
9.1 无穷级数的概念与性质	272
9.1.1 无穷级数的概念	272
9.1.2 无穷级数的性质	275
习题 9.1	277
9.2 数项级数的敛散性	277
9.2.1 正项级数及其敛散性	277
9.2.2 任意项级数及其敛散性	282
习题 9.2	285
9.3 幂级数及其敛散性	286
9.3.1 函数项级数的概念	286
9.3.2 幂级数及其收敛性	286
习题 9.3	292
9.4 函数展开成幂级数	293
9.4.1 泰勒级数	293
9.4.2 函数展开成幂级数	294
习题 9.4	299
学法指导	299

综合习题九	301
第 10 章 常微分方程	304
10.1 微分方程的概念与可分离变量的微分方程	304
10.1.1 微分方程的概念	304
10.1.2 微分方程的解	305
10.1.3 可分离变量的微分方程	306
习题 10.1	309
10.2 齐次微分方程	309
10.2.1 齐次微分方程的概念	309
10.2.2 齐次微分方程的解法	310
习题 10.2	314
10.3 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	315
10.3.1 一阶线性微分方程	315
10.3.2 可降阶的高阶微分方程	318
习题 10.3	323
10.4 二阶常系数线性微分方程	324
10.4.1 二阶常系数线性微分方程的概念	324
10.4.2 二阶常系数线性微分方程解的性质	324
10.4.3 二阶常系数齐次线性微分方程	325
10.4.4 二阶常系数非齐次线性微分方程	327
习题 10.4	330
学法指导	331
综合习题十	333
第 11 章 数学建模	336
11.1 数学模型与数学建模	336
11.1.1 模型与数学模型	336
11.1.2 数学建模的意义	336
11.1.3 数学建模的一般程序	339
习题 11.1 (略)	340
11.2 初等数学模型	341
11.2.1 生日相重问题	341
11.2.2 货包运输问题	341
11.2.3 讨价还价中的数学问题	342
11.2.4 架设电力线路问题	343
习题 11.2	344

11.3	微分方程模型	345
11.3.1	水瓶保温测试问题	345
11.3.2	油画年代的鉴定	346
11.3.3	人口模型	347
11.3.4	第二宇宙速度	348
	习题 11.3	350
11.4	数学规划模型	350
11.4.1	运输方案制定与线性规划	350
11.4.2	动态规划和网络问题	353
11.4.3	统筹法和工序安排优化问题	354
	习题 11.4	355
11.5	随机模型	356
11.5.1	得分问题	356
11.5.2	彩票中的随机模型	357
11.5.3	期望寿命	361
	习题 11.5	363
	学法指导	363
	综合习题十一	364
第 12 章 数学软件 Mathematica		365
12.1	Mathematica 概述	365
12.1.1	Mathematica 简介	365
12.1.2	Mathematica 的基本用法	365
12.1.3	数 运算符 函数 变量 表达式	366
12.1.4	Mathematica 的代数运算	369
	习题 12.1	371
12.2	Mathematica 在高等数学中的应用	371
12.2.1	求函数的极限	371
12.2.2	求函数的导数与微分	372
12.2.3	求积分	372
12.2.4	解微分方程	373
12.2.5	求偏导数	374
12.2.6	计算二重积分	375
12.2.7	幂级数运算	375
12.2.8	矩阵的运算	376
12.2.9	解线性方程组	378
12.2.10	解线性规划	379

习题 12.2	380
12.3 Mathematica 输入模板的使用	382
习题 12.3	385
12.4 Mathematica 作函数图像	386
12.4.1 二维图形的绘制	386
12.4.2 三维图形的绘制	390
习题 12.4	392
学法指导	392
综合习题十二	394
附录 A 常用函数及其图形	397
附录 B 数学常用公式	400
附录 C 习题答案与提示	405
参考文献	464

第 1 章 极限与连续

函数是刻画事物变化过程中变量相依关系的数学模型,是数学的基本概念之一.高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.极限是研究高等数学的重要工具.连续则是函数的一个重要性质,连续函数是高等数学研究的主要对象.

本章在总结中学已有函数知识的基础上,介绍高等数学最基本的概念——极限,进而介绍无穷大量与无穷小量的概念、性质和极限的运算法则、函数连续性等基本知识,为后继知识的学习奠定坚实的基础.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

我们在考察某些现象时,往往会遇到几个变量.而这些变量并不是孤立存在的,它们具有某种相互依赖的关系,看下面的实例.

例 1.1 某工厂每天生产产品 A 的件数为 x , 工厂设备固定成本为 1600 元, 生产每件产品所花的人工费和使用原材料费共为 6 元, 那么日产量 x 与日生产的成本 C 之间的对应关系式为 $C=1600+6x$, 假定该厂日产量最多为 350 件, 那么, 当产量 x 在数集 $\{0, 1, 2, \dots, 350\}$ 上任意取定一个数值时, 按上式 C 就有一个确定的数值与它相对应, 这种对应关系正是函数的实质.

下面给出函数的定义

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于任意 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f , 总有唯一确定的数值与其对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

数集 D 称为该函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时, 因变量 y 按照法则 f 所对应的数值, 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$.

当自变量 x 遍取定义域 D 的每个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

例 1.2 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{25 - x^2} + \ln \sin x$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} + \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

解 (1) 要使函数 y 有定义, 必须同时满足两个条件: 偶次根式的被开方式大于或等于零; 对数函数的真数应大于零, 即

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

这不等式组的解为 $-5 \leq x < -\pi$ 或 $0 < x < \pi$.

于是, 所求函数的定义域为 $D = \{x | -5 \leq x < -\pi \text{ 或 } 0 < x < \pi\}$.

也可以用区间表示为 $[-5, -\pi) \cup (0, \pi)$.

(2) 要使函数 y 有定义, 必须同时满足: 分母不为零且偶次根式的被开方式非负, 反正弦函数符号内的式子绝对值小于或等于 1. 即

$$\begin{cases} 3-x^2 > 0 \\ \left| \frac{x}{2} - 1 \right| \leq 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

故 不等式组的解为 $0 \leq x < \sqrt{3}$.

因此 所给函数的定义域为 $[0, \sqrt{3})$.

也可以表示为 $D = \{x | 0 \leq x < \sqrt{3}\}$.

例 1.3 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, 求 $f(1)$ 、 $f[f(1)]$ 、 $f(a^2)$ 、 $f(x+1)$ 、 $f[f(x)]$.

分析 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 的对应规律为: $f(\quad) = (\quad)^2 - 2(\quad) + 3$.

解 $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$;

$$f[f(1)] = f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3;$$

$$f(a^2) = (a^2)^2 - 2a^2 + 3 = a^4 - 2a^2 + 3;$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2;$$

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= [f(x)]^2 - 2f(x) + 3 = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 3 \\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 6. \end{aligned}$$



想 (1) 函数 $y = f(2x+1)$ 的自变量是 x 还是 $2x+1$? 已知 $f(x)$ 的定义域, 如何求函数 $f(2x+1)$ 的定义域?

(2) 已知函数 $f(3x-2)$ 表达式和定义域, 怎样求函数 $f(x)$ 的表达式和定义域?

函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围, 而函数值 y 又是由对应规则 f 来确定的, 所以函数实质上是由其定义域 D 和对应规则 f 所确定的, 通常把函数的定义域和对应规则称为函数的两个要素. 也就是说, 只要两个函数的定义域相同, 对应规则也相同, 就称这两个函数为相同的函数, 与变量符号无关. 如 $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$, 就是相同的函数.

函数由解析式给出时, 其定义域是使解析式有意义的一切实数. 为此, 求函数的定义域时应遵守以下原则:

- (1) 代数式中分母不能为零;
- (2) 偶次根式内表达式非负;
- (3) 对数中真数表达式大于零;
- (4) 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x$, 要满足 $|x| \leq 1$;
- (5) 两函数代数和的定义域, 应是两函数定义域的公共部分;
- (6) 对于表示实际问题的解析式, 还应该保证符合实际意义.

1.1.2 函数的表示

在中学时, 我们知道函数可以用表格、图像和解析式三种方法表示, 在高等数学中下列函数常常用到.

1. 隐函数

如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 当 x 在某集合 D 内任意取定一个值时, 相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 内确定了一个函数. 这个函数称为隐函数. 例如方程 $e^x + xy - 1 = 0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系, 它是一个隐函数.



注意 通常把形如 $y = f(x)$ 的函数, 称为显函数. 对有些隐函数可以通过一定的运算, 把它转化为显函数, 例如 $e^x + xy - 1 = 0$ 可以化成显函数

$$y = \frac{1 - e^x}{x}, \text{ 但有些隐函数却不可能化成显函数, 例如 } e^x + xy - e^y = 0.$$

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内, 其对应关系用不同的公式表示的函数, 称为分段函数.

$$\text{如, } f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \ln x & 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \text{ 就是一个定义在区间 } (-\infty, 5] \text{ 上的分段函数.}$$

3. 参数方程确定的函数

由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in I)$ 来表示变量 x 与 y 之间的依赖关系的函数, 称为参数方程确定的函数.

例如, 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 可以确定函数 $y = \sqrt{1 - x^2} (x \in [-1, 1])$,

或者说, 函数 $y = \sqrt{1 - x^2} (x \in [-1, 1])$ 可以用参数方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 表示.