普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

线性代数

（理工类多学时）

赵 辉 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

线性代数

（理工类多学时）

赵 辉 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据高等学校非数学专业线性代数课程教学基本要求及考研大纲编写而成.全书共6章,包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容.本书具有层次清晰,结构严谨,阐述深入浅出、循序渐进等特点.并结合考研的实际情况,精选了大量相关的例题和习题,书末附有部分习题参考答案及提示,同时每章末给出了各章总结.

本书可作为高等院校理工类、经管类、农林类等相关专业的教学用书或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:理工类多学时/赵辉主编. —北京:科学出版社,2007
(普通高等教育"十一五"规划教材.大学数学全程解决方案系列)

ISBN 978-7-03-019275-2

Ⅰ.线… Ⅱ.赵… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第117323号

责任编辑:李鹏奇 王 静 杨 然 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:张克忠 / 封面设计:卢秋红

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年8月第一次印刷 印张:14 1/2
印数:1—7 000 字数:270 000

定价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学全程解决方案系列》编委会

《大学数学全程解决方案系列》序

目前，高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多，其中不乏一些优秀教材，它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内，为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说，不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异，由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下，我想，这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果，充分挖掘区域内的教学资源，增加区域内教师的交流与互动，优化创新和谐的教研氛围，培育更加适应本地区高校的优秀教材，科学出版社在广泛调研的基础上，组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师，拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材，并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议. 在这次会议上，大家推荐我作为这套丛书的编委会主任，盛情难却，我想，若能和大家共同努力，团结协作，认真领会教育部的有关精神，凭借科学出版社的优秀品牌，做出一套大学数学类的优秀教材，也的确是一件有意义的事情.

为此，我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流，希望在以下方面有所突破：

在教学内容上，有较大创新，紧跟时代步伐，从知识点讲述，到例题、习题，都要体现时代的特色.

在教学方法上，充分体现各学校的优秀教学成果，集中黑龙江地区优秀的教学资源，力求代表最好的教学水平.

在教学手段上，充分发挥先进的教学理念，运用先进的教学工具，开发立体化的教学产品.

在教材设计上，节约课时，事半功倍（比如在教材上给学生预留较大的自主空间，让有进一步学习愿望的学生能够自主学习；开发的课件让老师节约课时，精心设计的练习册，让老师节约更多的检查作业的时间）.

在教学效果上，满足对高等数学有不同要求的教师、学生，让教师好用，让学生适用.

如今，这套丛书终于要面世了，今年秋季有《微积分（经管类）》、《线性代数（经

管类)》、《线性代数(理工类多学时)》、《线性代数(理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版.但我想,尽管我们的初衷是美好的,教材中必定还会存在这样那样的问题,敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持,科学出版社高等教育出版中心,哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力,在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　　言

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的非数学专业线性代数课程教学基本要求及全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的内容和要求编写而成的.适合各高等院校理工类、经管类、农林类等相关专业使用.

在编写的过程中,我们力求教材的内容、体系符合新形势下的高等教育教学内容和课程体系改革的总体目标,同时也注意适应高校扩招以后实际的教学情况,并兼顾许多学生报考硕士研究生的要求,吸取了国内外许多优秀教材的精华,并融入了作者多年来在线性代数教学中积累的实际教学经验.

由于线性代数概念、定理较多且抽象,逻辑严密,方法灵活,综合性强,学生在刚开始学习时会觉得较容易,但随着内容的逐渐深入,一段时间后便会觉得抽象难懂.建议在一定的教学阶段及时总结有关概念、定理和方法,并利用习题课和实际问题增强学生的感性认识.本教材全书内容所需学时为 48～60 学时.对于某些对线性代数要求较低的专业,可适当删减部分内容和略去某些定理的证明过程,相应减少习题课,因此本教材也适用于学时为 32～40 学时的线性代数课程.

本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等.全书共分 6 章,第 1 章由姚丽丽编写,第 2、3 章由赵辉编写,第 4、5 章由王俊明编写,第 6 章由姚慧丽编写.全书由赵辉主持编写、负责统稿,王俊明、姚慧丽、姚丽丽为副主编共同完成了本书的编写工作.哈尔滨工业大学的王勇教授仔细审阅了本书,并提出了许多宝贵意见.在本教材的编写过程中得到了哈尔滨理工大学教务处和应用数学系的大力支持,应用数学系主任计东海教授为本书的出版做了大量的指导性工作,作者在此一并深表感谢.

由于水平所限,书中不妥之处在所难免,殷切地希望广大读者批评指正、不吝赐教,以便不断改进和完善.

编　者

2007 年 5 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

科学研究、工程技术和经济活动中有许多问题可归结为线性方程组.行列式正是由研究线性方程组产生的,并成为一种重要的数学工具,它在自然科学、社会科学的许多领域里都有着广泛的应用.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

1.1　二阶与三阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用第一个方程的 a_{22} 倍减去第二个方程的 a_{12} 倍,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

同理可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.3}$$

为了便于记忆,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称它为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元.把 a_{11},a_{22} 的连线称为二阶行列式的主对角线,把 a_{12},a_{21} 的连线称为副对角线,那么二阶行列式的值就等于主对角线上元的乘积减去副对角线上元的乘积.

有了二阶行列式,方程组(1.1.1)的解可表示成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

类似地,在解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

中,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称其为三阶行列式.其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为三阶行列式的第 i 行第 j 列上的元素.

引入三阶行列式后,三元一次方程组(1.1.5)当 $D\neq 0$ 时,有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

行列式 D 称为方程组(1.1.5)的系数行列式.

例 1.1.1　解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=-1, \\ x_1-2x_2+x_3=-4, \\ 3x_1+x_2+3x_3=2. \end{cases}$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-12+9-5-30-2-9=-49,$$

由于 $D\neq0$,故方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -5\\ -4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=49,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & -5\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=-98,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-49,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{49}{-49}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-98}{-49}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-49}{-49}=1.$$

利用二阶和三阶行列式,使二元和三元线性方程组解的公式便于记忆和使用,人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式,并利用 n 阶行列式来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,使它的解有便于记忆的简洁形式. 为了得到 n 阶行列式的概念,需要首先讨论由 n 个正整数组成的全排列的性质.

1.2 n阶行列式

1.2.1 排列与逆序

定义 1.2.1 由 n 个不同的正整数组成的一个有序数组,称为一个 n 元排列.

例如,13245,21453 都是 5 元排列.

n 元排列是 n 个不同元素的全排列,因此 n 元排列总共有 $n!$ 个.

在所有 n 元排列中,有一个 n 元排列中的数是按从小到大的顺序排列而成的,称它为自然排列或标准排列. 除此之外,其余的排列或多或少会出现较大的数排在较小的数之前的情况. 比如在 5 元排列 15423 中,5 排在 2 之前,4 排在 3 之前,为此给出下述定义:

定义 1.2.2 在 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,如果一个大的数排在一个小的数之前,就称这两个数构成一个逆序. 这个排列中所有逆序的总个数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数是奇数的排列称为奇排列.

根据逆序数的定义,我们可以得到逆序数的计算方法有两种:①$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=$ j_1 后面比 j_1 小的数的个数$+j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数$+\cdots+j_{n-1}$后面比 j_{n-1}小的数的个数;②$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_2$ 前面比 j_2 大的数的个数$+j_3$ 前面比 j_3 大的数的个数$+\cdots+j_n$ 前面比 j_n 大的数的个数.

例 1.2.1 求下列排列的逆序数:

(1) 4321576;　　(2) $n(n-1)\cdots21$.

解 (1) 在排列 4321576 中,

4 前面没有数,因此逆序数为 0;

3 前面有 1 个比它大的数,因此逆序数为 1;

2 前面有 2 个比它大的数,因此逆序数为 2;

1 前面有 3 个比它大的数,因此逆序数为 3;

5 前面没有数比它大,因此逆序数为 0;

7 前面没有数比它大,因此逆序数为 0;

6 前面有 1 个比它大的数,因此逆序数为 1;

因此这个排列的逆序数

$$\tau(4321576)=0+1+2+3+0+0+1=7.$$

(2) 仿(1)可得 $\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.2.3 在一个排列中,将某两个元素对调位置而其余元素保持不变的操作称为对换.

例如,在排列 1234 中对换 2 和 3,得到新排列 1324. 排列 1234 为标准排列,因此其逆序数为 0,它是一个偶排列. 而 1324 的逆序数是 1,这是一个奇排列. 实际上我们可以证明这个结论对一般的排列也是正确的. 即有:

定理 1.2.1 对换一次改变排列的奇偶性.

证 (1) 对换的两数相邻.

设排列为

$$a_1a_2\cdots a_lijb_1b_2\cdots b_m,$$

其逆序数为 τ_1,将相邻两数 i 和 j 对换,得到新排列

$$a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_m.$$

记该排列的逆序数为 τ_2,于是当 $i>j$ 时,$\tau_2=\tau_1-1$,而当 $i<j$ 时,$\tau_2=\tau_1+1$,故一次相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 一般情形.

设排列为

$$a_1a_2\cdots a_lib_1\cdots b_mjc_1\cdots c_p, \tag{1.2.1}$$

将 i 与 j 对换,得新排列

$$a_1a_2\cdots a_ljb_1\cdots b_mic_1\cdots c_p. \tag{1.2.2}$$

排列(1.2.2)可看作是由排列(1.2.1)把 i 依次与 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 对换,即作 m 次相邻对换得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1\cdots b_mijc_1\cdots c_p \tag{1.2.3}$$

后,再将排列(1.2.3)中 j 依次与 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻对换得到. 这样由排

列(1.2.1)经 $2m+1$ 次相邻对换可得排列(1.2.2)，于是由(1)知，排列(1.2.2)与排列(1.2.1)的奇偶性不同.

由于标准排列的逆序数为 0，故由定理 1.2.1 我们有：

推论 1.2.1　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

由于 n 个不同元素的全排列总数为 $n!$，故由定理 1 我们还有：

推论 1.2.2　在 n 个不同元素的全排列中，奇偶排列各占一半，均为$\frac{n!}{2}$个.

1.2.2　n 阶行列式的定义

仔细观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

不难发现如下规律：

(1) 三阶行列式的右端是形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的 6 个乘积项的代数和，且每项均为来自不同行不同列的三个数的乘积. 这里第一个下标(行标)排成自然顺序 1 2 3，而第二个下标(列标)组成 3 元排列 $j_1j_2j_3$，当 $j_1j_2j_3$ 取遍由 1,2,3 构成的所有三元排列时，它正好对应上式右端的 6 个乘积项.

(2) 每个乘积项前面都带有一定的符号，它是由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定的. 当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，带负号；当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，带正号.

因而，三阶行列式可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 的所有排列求和.

根据上述规律，我们给出 n 阶行列式的定义：

定义 1.2.4　由 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，共

有 $n!$ 项. 把每一项这 n 个元素的行标按自然顺序排列后，当列标所成排列是偶排列时，对应项取正号，是奇排列时，对应项取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 元排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

当 $n=2,3$ 时，由此定义得到的二、三阶行列式与用对角线法则求得的结果一致. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值符号相混淆.

例 1.2.2 (1) 在六阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号?

(2) 写出四阶行列式中带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项.

解 (1) 适当调整该项元素位置，使 6 个元素的行标按自然顺序排列，即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，则列标排列为 431265，其逆序数 $\tau(431265)=6$，故该项前应取正号.

(2) 由行列式的定义可知，包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其列标排列的逆序数分别为 $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$. 又所求项带负号，故取列标为奇排列的 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

例 1.2.3 证明

(1) $$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) $$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 (1) 我们关心的是 D_1 的展开式中可能不为零的项. 由于第 n 行除 a_{nn} 外其余元素都为零，所以行列式通项中第 n 个元只能取 a_{nn}，而第 $n-1$ 个元 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 不能取 $a_{n-1,n}$，这是因为展开式的每项不能存在两个同列元，故只能选取 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-2,n-2}$，$\cdots$，依此类推第一行只能选取 a_{11}，从而

$$D_1 = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 类似于(1)中推理，行列式 D_2 的展开式中可能不为零的项也只有一项，即

$$D_2=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{nn}.$$

行列式 D_1 主对角线以下的元素全为 0,因而称它为上三角形行列式.同样地,将主对角线以上的元素全为 0 的行列式称为下三角形行列式.上三角形行列式与下三角形行列式统称为三角形行列式.主对角线以外全为 0 的行列式称为对角行列式.无论是三角形行列式还是对角行列式,它们的值都等于主对角线上元素的乘积.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

第二个行列式中,未写出的元素都为 0.

例 1.2.4 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义可知,此行列式的非零项只有两项,即 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$,故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a\cdot a\cdot\cdots\cdot a+(-1)^{\tau(23\cdots n1)}b\cdot b\cdot\cdots\cdot b$$

$$=a^n+(-1)^{n-1}b^n.$$

定理 1.2.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},\tag{1.2.4}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 元排列.

证 由乘法交换律及定理 1.2.1 推知,式(1.2.4)经过 s 次互换,两个因子的次序变成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n}, \tag{1.2.5}$$

其中，$l_1l_2\cdots l_n$ 是一个 n 元排列，同时行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 分别经过 s 次对换变到 $12\cdots n$ 与 $l_1l_2\cdots l_n$，它们的奇偶性分别改变了 s 次，总共改变了偶数 $2s$ 次，故

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(l_1l_2\cdots l_n)}=(-1)^{\tau(l_1l_2\cdots l_n)}.$$

这说明式(1.2.4)是行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项.

由定理 1.2.2，行列式中项的因子顺序也可按列标的自然顺序排列. 即有下述推论：

推论 1.2.3　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 元排列，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

1.3　行列式的性质

由行列式的定义可知，对于低阶行列式以及零元较多的行列式，用定义计算是可行的. 但当 n 较大时，应用行列式定义计算是很繁琐且困难的. 因此必须讨论行列式的性质，以便利用行列式的性质简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.3.1　行列式与它的转置行列式相等.

证　令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则由行列式的定义和推论 1.2.3 可得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

性质 1.3.1 说明，行列式的行和列的地位是对称的，因而凡对行成立的性质对