

启迪思维 拓展视野 培养能力

第二版

小学华罗庚金杯赛

XIAOXUE

HUALUOGENG

JINBEISAI

PEIXUN JIAOCHENG

培训教程

包善贤 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

小学华罗庚金杯赛培训教程

小学华罗庚金杯赛培训教程（全真模拟）

华罗庚金杯赛培训教程·初中篇

初中华罗庚金杯赛培训教程（全真模拟）

ISBN 978-7-308-04322-9



9 787308 043229 >

定价：14.00 元

小学华罗庚金杯赛培训教程

顾 问	李德君		
主 编	包善贤		
副主编	刘宝柱	包善英	谢克文
编 委	(按姓氏笔画排列)		
	于秀梅	王月兰	王丽萍
	包芳萍	史艳华	边喜庭
	刘树海	赵体国	赵晓燕
	姜桂琴	姚福山	曹 慧
	潘丽萍	薛 利	魏国权

浙 江 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

小学华罗庚金杯赛培训教程 / 包善贤主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2005. 7(2007 重印)
ISBN 978-7-308-04322-9

I. 小... II. 包... III. 数学课—小学—教学参考资料
IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076069 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

责任编辑 傅百荣

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 11.25

字 数 226 千字

版 印 次 2007 年 4 月第 2 版 2007 年 4 月第 3 次印刷

印 数 10001—14000

书 号 ISBN 978-7-308-04322-9

定 价 14.00 元



前 言

华罗庚教授 1910 年 11 月 12 日生于江苏金坛. 他通过刻苦自学, 在数论、代数、矩阵几何学、典型群、多个复变函数论、调和分析与应用数学等领域作出卓越贡献, 成为享有国际声誉的杰出数学家.

为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神, 学习他勤奋工作、献身科学的优秀品质, 培养中小学生对钻研数学的兴趣, 开发智力, 普及数学基础知识, 在纪念华罗庚教授逝世一周年时, 中国少年报社、中央电视台、中国优选法统筹法与经济数学研究会等单位于 1986 年举办全国第一届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛(以下简称“华杯赛”). “华杯赛”最初是二至三年举办一届, 从 2004 年开始每年举办一届, 参赛对象是小学高年级和初一学生. 第一届至第八届“华杯赛”分初赛、复赛和决赛三个阶段进行. 从第九届开始分初赛、决赛和全国总决赛三个阶段进行. 第十届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛在 2005 年 3 月 19 日由中央电视台少儿频道直播试题. 决赛在 2005 年 5 月 15 日举行, 由主试委员会提供试题, 各参赛城市组织比赛、阅卷并评出一、二、三等奖. 全国总决赛在 2005 年 7 月 14 日至 18 日于广东惠州举行, 每个城市可派中、小学生各两名参赛, 评出金、银、铜奖.

“华杯赛”命题原则是: 严格以教学内容为依据, 坚持普及性; 联系实际, 注重趣味性; 反对死记硬背, 倡导新颖性; 通过竞赛, 提高参赛选手和广大参与者的数学素质以及逻辑推理能力; 坚持素质教育, 培养创新精神.

数学与生活、生产、科技和经济有着非常广泛的联系, 在中小学阶段是十分重要的基础课. 首先要学好教科书的内容, 逐步培养解决问题的能力. 开展生动活泼的数学课外活动能激发学生强烈的求知欲, 体会数学的奇妙, 其乐无穷. 平时成绩优秀的学生适当阅读数学课外书, 接触难度不大的竞赛题, 可以扩大知识面, 掌握更多的解题技巧, 决不会增加负担. 数学知识的融会贯通是一种难能可贵的特长, 要鼓励孩子自觉学习. 年幼的数学爱好者可能是未来的数学家. 没有打好数学基础知识的学生, 不宜钻研数学竞赛题, 家长逼着学就是拔苗助长, 结果是适得其反. 数学是一门不嫌贫爱富的学



科,有纸有笔就能研究.自学成才的数学家有不少是肢体残疾和出身贫寒的.

本书难度适中,选自历届“华杯赛”的试题均标明出处.黑龙江大庆第一中学校长武文芳、副校长王翠香、张淑兰、党委书记安英柏、党总支书记潘利以及三所附小、外国语学校的领导给我充分信任和大力支持,华杯赛组委会办公室苗俊魁老师,大庆市教育学院武学春、王利老师,大庆一中外国语学校柳向魁老师给我特别多的帮助,借出书之际一并表示感谢!

谨把此书献给我的恩师:杭州市学军中学退休老校长、92岁高龄的俞芳老师以及褚家珪、何永培、贺元泰、杨寿明老师。

包善贤

2005年7月于杭州



目 录

基 础 篇

第一讲	速算与巧算	(1) 答案(123)
第二讲	有趣的数列	(5) 答案(124)
第三讲	图形的计数	(9) 答案(126)
第四讲	图形的计量	(16) 答案(130)
第五讲	数字游戏	(23) 答案(132)
第六讲	数的整除性	(31) 答案(137)
第七讲	约数和倍数	(35) 答案(138)
第八讲	余数问题	(39) 答案(140)
第九讲	小数和分数	(43) 答案(141)
第十讲	奇偶分析与一笔画	(49) 答案(143)
第十一讲	行程问题	(54) 答案(144)
第十二讲	工程问题	(60) 答案(147)
第十三讲	典型应用题	(65) 答案(149)
第十四讲	方程及定义新运算	(71) 答案(150)

提 高 篇

第十五讲	乘法原理和加法原理	(77) 答案(153)
第十六讲	包含与排除	(83) 答案(154)
第十七讲	抽屉原理	(89) 答案(156)
第十八讲	找规律	(94) 答案(158)
第十九讲	最佳策略	(102) 答案(160)



第二十讲 逻辑推理	(109)答案(163)
-----------------	--------------

模 拟 试 题

初赛模拟试题	(118)答案(166)
决赛模拟试题	(119)答案(167)
全国总决赛模拟试题(一)	(121)答案(169)
全国总决赛模拟试题(二)	(122)答案(171)



基 础 篇

第一讲 速算与巧算



【知识导入】

结合数的特点,恰当利用运算定律、公式和性质,改变运算顺序,使计算变得简单易行.



【典型例题】

例1 计算 $11 + 192 + 1993 + 19994 + 199995$ 所得和数的各位数字之和是多少?
(第5届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛口试题)

解 原式 $= (20 - 9) + (200 - 8) + (2000 - 7) + (20000 - 6) + (200000 - 5) = 222220 - (9 + 8 + 7 + 6 + 5) = 222220 - 35 = 222185$,

各位数字之和是 $2 + 2 + 2 + 1 + 8 + 5 = 20$.

答 所得和的各位数字之和是 20.

例2 计算: $51 \times 0.87 + 8.7 \times 2.9 + 87 \times 0.08 + 0.012 \times 870$.

解 原式 $= 0.87 \times 51 + 0.87 \times 29 + 0.87 \times 8 + 0.87 \times 12 = 0.87 \times (51 + 29 + 8 + 12) = 0.87 \times 100 = 87$.

例3 计算: $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}\right) \times 2\frac{1}{7} = ?$ (第3届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题)

原式 $= \left(\frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{3 \times 3 \times 7}\right) \times \frac{15}{7} = \frac{21 + 18 + 10}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} \times \frac{15}{7} = \frac{49}{2 \times 3 \times 7 \times 7} = \frac{1}{6}$.

例4 数学小组十名同学的某次考试成绩如下:

88, 93, 91, 85, 96, 89, 97, 82, 99, 91.

求这十名同学的总分.

解 $88 + 93 + 91 + 85 + 96 + 89 + 97 + 82 + 99 + 91 = 90 \times 10 - 2 + 3 + 1 - 5 + 6 - 1 + 7 - 8 + 9 + 1 = 900 + 11 = 911$.

点拨: 选取与各数的差较小的数作基准数, 本题基准数选 90, 能简化运算. 基准数



法适用于加数较多,而且所有加数相差不多的情况.

例5 计算: $1 \div (2 \div 3) \div (3 \div 4) \div (4 \div 5) \div (5 \div 6) = ?$ (第2届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛口试题)

解 原式 $= 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = 3.$

例6 计算: $2008 \times 19861986 - 1986 \times 20082008.$

解 原式 $= 2008 \times 1986 \times 10001 - 1986 \times 2008 \times 10001 = 0.$

例7 计算: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9}\right) = ?$

(第6届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛复赛试题)

解 原式 $= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)$
 $\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{11}{10} = 1.1.$

例8 计算: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) -$
 $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$

解 设 $k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, 则

原式 $= (1 + k)\left(k + \frac{1}{8}\right) - \left(1 + k + \frac{1}{8}\right)k = k + k^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}k - k - k^2 - \frac{1}{8}k = \frac{1}{8}.$

例9 计算: $\frac{258 \times 174 - 42}{259 \times 173 + 43}.$

解 原式 $= \frac{258 \times (173 + 1) - 42}{(258 + 1) \times 173 + 43} = \frac{258 \times 173 + 258 - 42}{258 \times 173 + 173 + 43}$
 $= \frac{258 \times 173 + 216}{258 \times 173 + 216} = 1.$

例10 计算: $\frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2000^2 + 2001^2}{2000 \times 2001}.$ (第8届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛试题)

解 因为 $\frac{k^2 + (k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)} + \frac{(k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k} = \frac{k+1-1}{k+1} + 1 + \frac{1}{k} = 1 -$
 $\frac{1}{k+1} + 1 + \frac{1}{k} = 2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$

所以原式 $= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + 2 + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right) = 2 \times 2000 + 1 -$



$$\frac{1}{2001} = 4000 + \frac{2000}{2001} = 4000 \frac{2000}{2001}.$$



【分级训练】

A 级

1. 计算: $29 + 299 + 2999 + 29999 + 299999$.
2. 计算: $(0.5 + 0.25 + 0.125) \div (0.5 \times 0.25 \times 0.125) \times 125$.
3. 计算: $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \cdots + 2005 - 2006 - 2007 + 2008$.
4. 计算: $(33 + 28 + 36 + 31 + 22 + 30 + 35 + 32 + 27 + 33 + 28 + 37) \div 12$.
5. 计算: $\frac{0.00135 \div 0.00025}{(0.372 - 0.349) \div (6.9 \times 0.05)}$.
6. 计算: $25.6 \times 137 - 3.9 \times 128 - 640 \times 2.7$.
7. 计算: $227 \frac{3}{4} \div \left(9 \frac{8}{9} - 3 \frac{1}{4} + 18 \frac{1}{9} - 5.75 \right)$.
8. 计算: $\left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{5} \right) \left(1 + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{1}{7} \right) \left(1 + \frac{1}{8} \right) \left(1 + \frac{1}{9} \right) \left(1 + \frac{1}{10} \right) \left(1 + \frac{1}{11} \right)$.
9. 计算: $20082008 \times 20082007 - 20082009 \times 20082006$.
10. 计算: $\left(\frac{3}{17} + \frac{5}{18} + \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \right) \times \left(\frac{5}{18} + \frac{7}{19} + \frac{9}{20} + \frac{11}{21} \right) - \left(\frac{3}{17} + \frac{5}{18} + \frac{7}{19} + \frac{9}{20} + \frac{11}{21} \right) \times \left(\frac{5}{18} + \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \right)$.

B 级

1. 计算: $31 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 41 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 51 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 61 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + 71 \frac{1}{6} \times \frac{6}{7}$.
2. 计算: $2008 \times 2008 + 2007 \times 2007 - 2008 \times 2007 - 2007 \times 2006$.
3. 计算: $\left(1 \frac{7}{88} + 2 \frac{7}{44} + 4 \frac{7}{22} + 8 \frac{7}{11} \right) \div \left(1 \frac{1}{88} + 2 \frac{1}{44} + 4 \frac{1}{22} + 8 \frac{1}{11} \right)$.
4. 计算: $168 \times 27.5 - 196 \times 16.8 + 32 \times 7.9$.
5. 计算: $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 6 \times 10 \times 14 + 3 \times 9 \times 15 \times 21}{3 \times 5 \times 7 \times 9 + 6 \times 10 \times 14 \times 18 + 9 \times 15 \times 21 \times 27}$.



6. 计算: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

7. 计算:

$$\frac{(2+29)\left(2+\frac{29}{2}\right)\left(2+\frac{29}{3}\right)\left(2+\frac{29}{4}\right)\left(2+\frac{29}{5}\right)\left(2+\frac{29}{6}\right)\left(2+\frac{29}{7}\right)\left(2+\frac{29}{8}\right)}{(2+31)\left(2+\frac{31}{2}\right)\left(2+\frac{31}{3}\right)\left(2+\frac{31}{4}\right)\left(2+\frac{31}{5}\right)\left(2+\frac{31}{6}\right)\left(2+\frac{31}{7}\right)\left(2+\frac{31}{8}\right)}$$

8. 计算: $\frac{1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{6}{7} + 6\frac{7}{8} + 7\frac{8}{9} + 8\frac{9}{10}}{3\frac{1}{3} + 5\frac{1}{2} + 7\frac{3}{5} + 9\frac{2}{3} + 11\frac{5}{7} + 13\frac{3}{4} + 15\frac{7}{9} + 17\frac{4}{5}}$.

9. 计算: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \times \frac{1}{6} - \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7}\right)$.

10. 计算: $20082009 \times 20092008 - 20082008 \times 20092009$.



第二讲 有趣的数列



【知识导入】

按照一定顺序排列的一串数,叫做数列.数列中的第一个数称为首项,记作 a_1 ;最后一个数称为末项,记作 a_n ;数列中数的个数称为项数,记作 n .如果数列从第2项起,后面一项与它前面一项的差都相等,公差记作 d ;这个数列称为等差数列,其和记作 S ;则求和公式是 $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$,通项公式是 $a_n = a_1 + (n-1)d$,求项数公式是 $n = (a_n - a_1) \div d + 1$.如果数列从第3项起,每项是它前面两项之和,这个数列称为斐波那契数列,前 n 项之和记作 S_n ,第 n 项记作 a_n ,则 $S_n = a_{n+2} - a_2$.许多数列可以推导出相应的计算公式.



【典型例题】

例1 1966、1976、1986、1996、2006 这五个数的总和是多少?(第1届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题)

解 $1986 \times 5 = 9930$.

点拨 灵活运用等差数列求和公式.

例2 在所有的两位数中,十位数字比个位数字大的两位数有多少个?(第3届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题)

解 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{(1+9) \times 9}{2} = 45$.

点拨 满足题意的十位数字与对应个位数字构成的两位数个数,正好是等差数列.

例3 将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸片,如果要分成不少于50个小纸片,至少要画多少条直线?请说明.(第3届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛试题)

解 新画的直线与原有直线都在圆内相交,且交点互不相同,这时新增小纸片个数等于直线条数.圆内画 n 条直线时,小纸片个数用 a_n 表示,则 $a_0 = 1, a_1 = a_0 + 1, a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_2 + 3, a_4 = a_3 + 4, \dots, a_n = a_{n-1} + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$. 可知 $a_9 = 46, a_{10} = 56$. 至少要画10条直线才能分成不少于50个小纸片.



点拨 新画的第 n 条直线被原有的直线分成 n 段, 每段对应增加 1 个小纸片.

例 4 “火树银花楼七层, 层层红灯倍加增, 共有红灯三八一, 试问四层几红灯?” (第 7 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题)

解 七层红灯总数是第一层的 $1+2+4+8+16+32+64=127$ (倍), 共有红灯 381 盏, 第 1 层有 $381 \div 127 = 3$ (盏), 第 4 层有 $3 \times 8 = 24$ (盏).

答 第 4 层有 24 盏红灯.

例 5 计算: $1 + 3 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{12} + 7 \frac{1}{20} + 9 \frac{1}{30} + 11 \frac{1}{42} + 13 \frac{1}{56} + 15 \frac{1}{72} + 17 \frac{1}{90}$. (第 4 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛复赛试题)

解 原式 $= (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right) = 9 \times 9 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 81 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = 81 \frac{2}{5}$.

点拨 运用公式 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

例 6 我们知道, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, 这里, 9、16 叫做“完全平方数”, 在前 300 个自然数中 (注: 不包括 0), 去掉所有的“完全平方数”, 剩下的自然数的和是多少? (第 3 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛复赛试题)

解 $(1 + 2 + 3 + \cdots + 300) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 17^2) = \frac{1+300}{2} \times 300 - \frac{17 \times (17+1) \times (2 \times 17 + 1)}{6} = 45150 - 1785 = 43365$.

答 剩下自然数的和是 43365.

点拨 运用公式 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

例 7 在下面一系列数中, 从第二个数开始, 每个数都比它前面相邻的数大 7; 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...

它们前 $n-1$ 个数相乘的积的末尾 0 的个数比前 n 个数相乘的积的末尾 0 的个数少 3 个, 求 n 的最小值. (第 9 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛总决赛试题)

解 数列中因子 2 的个数多于因子 5 的个数, 所以连乘积中 0 的个数等于因子 5 的个数. 第 n 项的数 $a_n = 125k$, k 不含因子 5 时, 前 $n-1$ 项相乘的积的末尾 0 的个数比前 n 项相乘的积的末尾的个数少 3 个. 又 $a_n = 8 + (n-1) \times 7 = 7n + 1$, 所以 $7n + 1 = 125k$, $n = 17k + \frac{6k-1}{7}$, 当 $k=6$ 时, 可得 $n=107$ 是符合题意的最小值.



答 n 的最小值是 107.

点拨 $10 = 2 \times 5$, 因子 2 和因子 5 的个数(两者中较少的)决定连乘积末尾的 0 的个数.

例 8 计算: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 20 \times 21$.

解 原式 $= \frac{1}{3} \times 20 \times 21 \times 22 = 3080$.

点拨 运用公式 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

例 9 计算: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10 \times 11}$.

解 原式 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 \times 10} - \frac{1}{10 \times 11} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10 \times 11} \right) = \frac{55-1}{2 \times 110} = \frac{27}{110}$.

点拨 运用公式 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$.

例 10 数列 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... 的前 10 项之和是多少?

解 设第 n 项的数是 a_n , 前 n 项之和为 S_n , $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$, $a_2 = 2$, $S_{10} = a_{12} - a_2 = 233 - 2 = 231$.

点拨 运用斐波那契数列前 n 项之和的公式 $S_n = a_{n+2} - a_2$.



【分级训练】

A 级

1. “华罗庚金杯”少年数学邀请赛每隔一年举行一次, 今年(1988 年)是第二届, 问 2000 年是第几届? (第 2 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题)

2. 所有两位奇数的和是多少?

3. 李明在小学一年级时捐款 10 元, 以后每年捐款数额都是前一年的 2 倍. 他在读小学的六年中共捐款多少元?

4. 小华在暑假第一天看了 1 页故事书, 以后每天都比前一天多看 3 页, 十天共看多少页?

5. 计算: $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots - 1999 + 2001$. (第 3 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛复赛试题)

6. 某影院有 858 个座位, 从第 2 排开始, 每排都比前一排多 2 个座位, 共 22 排. 问第一排有多少个座位?



7. 一个数列有 9 个数, 总和是 330, 中间的数最大. 从中间的数往前看, 各数依次减少 5; 从中间的数往后看, 各数依次减少 7. 中间的数是多少?

8. 在 9 和 81 之间插入 1 个数, 使得这个数除以第 1 个数的商等于第 3 个数除以这个数的商, 这个数是多少?

9. 已知斐波那契数列 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, ...; 这个数列的第 10 个数是多少?

10. 被 7 除余 2 的所有三位数之和是多少?

B 级

1. 在 12 与 60 之间插入 3 个数, 使它们同这两个数成等差数列. 该数列五个数的总和是多少?

2. 某种细菌每 30 分钟分裂一次, 每次分裂都能使细菌个数增加一倍. 一个细菌经过 4 小时变成多少个?

3. 小马虎练习打算盘, 按自然数的顺序从 1 开始累加, 总和达到 888 时, 发现其中 1 个数多加 1 次. 重复计算的那个数是多少?

4. 计算: $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$. (第 3 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛试题)

5. 计算: $1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 - 7 + 8 + 9 + 10 - 11 + 12 + \cdots + 1997 + 1998 - 1999 + 2000$.

6. 计算: $\frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \cdots + \frac{1}{19 \times 21 \times 23}$.

7. 计算: $21 \times 22 + 22 \times 23 + 23 \times 24 + \cdots + 30 \times 31$.

8. 计算: $18^2 + 19^2 + 20^2 + \cdots + 30^2$.

9. 已知斐波那契数列 2, 5, 7, 12, 19, 31, ...; 求这个数列前 8 个数的和.

10. 若干个同样的盒子排成一排, 小明把 50 多个同样的棋子分装在盒中, 其中只有一个盒子没有装棋子, 然后他外出了. 小光从每个有棋子的盒子里各拿一个棋子放在空盒内, 再把盒子重新排了一下. 小明回来仔细查看了一番, 没有发现有人动过这些盒子和棋子. 问共有多少个盒子? (第 1 届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛试题)



第三讲 图形的计数



【知识导入】

简单图形用枚举法直接计数,常用基本图形可以推导出计数公式,复杂图形分类计数.计数时要保证不重复和不遗漏.



【典型例题】

例1 图3-1中有多少条线段?

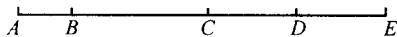


图3-1

解 以A点为左端点的有4条(AB、AC、AD、AE),以B点为左端点的有3条(BC、BD、BE),以C点为左端点的有2条(CD、CE),以D点为左端点的有1条(DE);共 $4 + 3 + 2 + 1 = \frac{(4+1) \times 4}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ (条).

答 有10条线段.

点拨 线段上有 n 个点($n \geq 2$)时,以这 n 个点为端点的线段共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条.

例2 图3-2中有多少个锐角?

解 以射线OA为一边的锐角有3个($\angle AOB$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOD$),以射线OB为一边的锐角(已算过的除外)有2个($\angle BOC$ 、 $\angle BOD$),以射线OC为一边的锐角(已算过的除外)有1个($\angle COD$),共 $3 + 2 + 1 = \frac{3+1}{2} \times 3 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ (个).

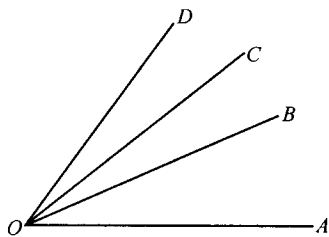


图3-2

答 有6个锐角.

点拨 有公共顶点的 n 条射线能组成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个锐角.

例3 图3-3中有多少个长方形?

解 下面一层长方形ABFE中有6个长方形($\square AGJE$ 、 $\square AHIE$ 、 $\square ABFE$ 、 $\square GHIJ$ 、 $\square GBFJ$ 、 $\square HBFJ$).同理,上面一层长方形EFCD中有6个长

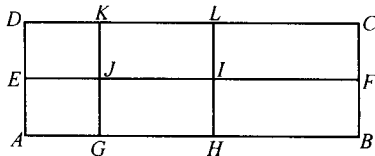


图3-3