

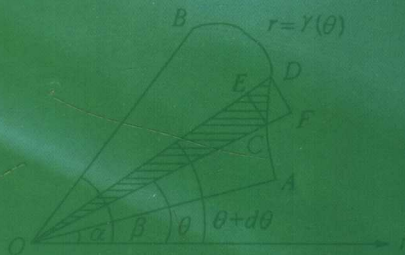
大学数学系列丛书

微积分 (上)

calculus

北京交通大学数学系微积分组 编著

(修订本)



$$S_{\text{扇形}} = dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$CD = r + r d\theta$$

$$ED = r(\theta + d\theta) - r(\theta) = r d\theta$$

$$(CE)^2 + (ED)^2 = (CD)^2$$

$$(r d\theta)^2 + (r d\theta)^2 = (r d\theta)^2$$



清华大学出版社
<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

大学数学系列丛书

微 积 分(上)

(修订本)

北京交通大学数学系微积分组 编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书共分6章, 主要内容包括: 函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用。此外, 本书后附有各节习题的参考答案。

本书可作为高等院校的理工科专业和经济管理类专业微积分课程的教材, 也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分·上/北京交通大学数学系微积分组编著. —修订本. —北京: 清华大学出版社; 北京交通大学出版社, 2007.9

(大学数学系列丛书)

ISBN 978-7-81082-168-1

I. 微… II. 北… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 136399 号

责任编辑: 黎 丹

出版发行: 清华大学出版社 邮编: 100084 电话: 010-62776969

北京交通大学出版社 邮编: 100044 电话: 010-51686414

印刷者: 北京瑞达方舟印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×230 印张: 22.5 字数: 504 千字

版 次: 2003年9月第1版 2007年9月第1次修订 2007年9月第5次印刷

书 号: ISBN 978-7-81082-168-1/O·7

印 数: 15 001~21 000 册 定价: 32.00 元

本书如有质量问题, 请向北京交通大学出版社质监局反映。对您的意见和批评, 我们表示欢迎和感谢。

投诉电话: 010-51686043, 51686008; 传真: 010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

“大学数学系列丛书” 编写委员会成员名单

主 任 刘彦佩

副主任 刘 晓

委 员 (按姓氏笔画为序)

王兵团 付 俐 陈治中 何卫力

季文铎 赵达夫 龚漫奇

总序

随着人类进入 21 世纪,科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中,各种竞争的关键就是科学技术的竞争,科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上,而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代,将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活,引发新的、深刻的变化。在知识经济时代,国家的竞争能力和综合国力的强弱,不仅取决于其拥有的自然资源,更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平,尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源,拥有智力资源的是人才,人才来自教育。要提高民族的创新能力,归根到底要提高全体民众的教育水平,培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中,数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出,数学教育在人类的精神营养中,确实有“精神钙质”的作用,因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像,一个数学知识贫乏的人,会在科学上有所建树。因此,全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平,将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力,关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力,是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑,我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革,特别是数学教学改革的经验,借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法,组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师,在精心筹划、多方面研讨的基础上,编写了这一套“大学数学系列丛书”。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大工夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章的内容,而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验;同时注意编写了与主教材配套的辅导教材,这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上,我们注重对主教材内容知识的扩展,同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是,我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为,这种做法

是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的的大力支持，在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助，在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和管理类专业专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会

2007年8月

修订本前言

高等教育的本质在于素质教育,2007年教育部的2号文件“关于进一步深化本科教学改革全面提高教学质量的若干意见”再一次提出深化教育、教学改革、全面加强大学生素质和能力培养的本科教学宗旨。微积分教学改革实际上是大学教育改革的重要一环,因为微积分课程是最重要的数学类基础课,也是新生入学后最先学习的数学课程,这门课程学习的效果直接影响着大学生后续课程的学习。

微积分教材是微积分课程教学的重要依托,它应该怎样编写才能有利于教师教学,并使学生易于接受一直是广大教育工作者研究探索的课题。我们认为,没有改革就没有发展,即使是非常成熟的基础课也是如此,因为我们面对的学生对象发生了变化,这些学生思考问题的方式和行为取向与以往是不同的。编写适合当今大学生特点的微积分教材不但非常必要,而且也是一件非常有意义的事情,本书就是我们对微积分教材编写的一个探索。

在保证微积分教学知识点和要求的前提下,本书采用一种新型的编写模式。本书各章节知识点编排方法和风格的差异是我们有意所为,目的是找出学生最适合接受的模式。书中的每章都配有自测题,以帮助学生自己检查本章内容的掌握情况。本书由北京交通大学10名教师共同编写,这些教师都有多年讲授微积分课程的丰富经验并一直关注于微积分教学改革。王兵团、刘迎东、汪成咏对本书作了最后的定稿。本书编写人员如下。

- 第1章 龚漫奇 1.1~1.3节,邵吉光 1.4~1.11节
- 第2章 冯国臣 2.1~2.7节,黎传琦 (2.8节)
- 第3章 汪成咏 3.1~3.3节和3.5节,俞勤 3.4节、3.6~3.8节
- 第4章 王兵团 4.1~4.2节,吴鹄 4.3~4.4节
- 第5章 聂君祥
- 第6章 刘迎东

本教材的编写是我们数学探索式教学的一种尝试，也是北京交通大学数学基地和微积分课程建设的一项工作。本次修订中，北京交通大学数学系讲授过微积分课程的广大教师积极参与，并提出了宝贵意见和建议，在此表示感谢。

编者

2007年8月

目 录

第 1 章 函数与极限	(1)
1.1 微积分简介	(3)
习题 1-1	(4)
1.2 函数及其性质	(6)
习题 1-2	(19)
1.3 极坐标	(21)
习题 1-3	(24)
1.4 数列的极限	(26)
习题 1-4	(31)
1.5 函数的极限及性质	(33)
习题 1-5	(38)
1.6 无穷小与无穷大	(40)
习题 1-6	(42)
1.7 极限的运算法则	(43)
习题 1-7	(46)
1.8 极限存在准则与两个重要极限	(48)
习题 1-8	(52)
1.9 无穷小的比较	(54)
习题 1-9	(56)
1.10 函数的连续性及其运算	(58)
习题 1-10	(64)
1.11 闭区间上连续函数的性质	(65)
习题 1-11	(66)
1.12 自测题	(68)
第 2 章 导数与微分	(69)
2.1 导数的概念	(71)

习题 2-1	(83)
2.2 导数的四则运算	(85)
习题 2-2	(88)
2.3 反函数、复合函数求导法则	(89)
习题 2-3	(94)
2.4 初等函数求导问题、双曲函数与反双曲函数的导数	(96)
习题 2-4	(98)
2.5 高阶导数	(100)
习题 2-5	(103)
2.6 隐函数、由参数方程所确定的函数的导数	(105)
习题 2-6	(111)
2.7 函数的微分及其应用	(113)
习题 2-7	(122)
2.8 边际与弹性	(124)
习题 2-8	(130)
2.9 自测题	(132)
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	(135)
3.1 微分中值定理	(137)
习题 3-1	(143)
3.2 洛必达法则	(145)
习题 3-2	(150)
3.3 泰勒公式	(152)
习题 3-3	(157)
3.4 函数的单调性	(158)
习题 3-4	(161)
3.5 函数的极值及其求法	(162)
习题 3-5	(170)
3.6 曲线的凹凸与拐点	(171)
习题 3-6	(173)
3.7 函数图形的描绘	(175)
习题 3-7	(180)
3.8 曲率	(181)
习题 3-8	(187)
3.9 自测题	(188)

第 4 章	不定积分	(189)
4.1	基本概念	(191)
	习题 4-1	(198)
4.2	换元积分法	(200)
	习题 4-2	(209)
4.3	分部积分法	(210)
	习题 4-3	(214)
4.4	几种特殊类型函数的积分	(215)
	习题 4-4	(221)
4.5	自测题	(222)
第 5 章	定积分	(223)
5.1	定积分的概念与性质	(225)
	习题 5-1	(235)
5.2	微积分基本定理	(237)
	习题 5-2	(242)
5.3	定积分的换元积分法与分部积分法	(244)
	习题 5-3	(251)
5.4	广义积分	(254)
	习题 5-4	(259)
5.5	自测题	(260)
第 6 章	定积分的应用	(263)
6.1	微元法的基本思想	(265)
6.2	平面图形的面积	(268)
	习题 6-2	(273)
6.3	体积	(275)
	习题 6-3	(282)
6.4	平面曲线的弧长	(283)
	习题 6-4	(287)
6.5	功、水压力和引力	(289)
	习题 6-5	(296)
6.6	函数的平均值	(298)
	习题 6-6	(301)
6.7	空间曲线的弧长和旋转体的侧面积	(303)
	习题 6-7	(307)

6.8 质量、质心和转动惯量	(308)
习题 6-8	(319)
6.9 定积分在经济学及其他方面的应用	(321)
习题 6-9	(323)
6.10 自测题.....	(325)
习题参考答案	(327)

DI YI ZHANG

第 1 章

函数与极限

关键词：极限 (limit)、连续 (continuity)、函数 (function)、极坐标 (polar coordinate)、数列极限、函数极限、无穷小、无穷大、等价无穷小、连续函数、间断点、最值、零点

1.1 微积分简介

本节的内容主要是让学生自学的，目的是让学生在学习本课程之前，对本课程所教的内容有一个概括的了解。能够从整体上更加全面地理解微积分的思想，同时也能够更加鲜活而生动地理解所学的内容。

1. 微积分的思想

【例 1-1】 如图 1-1 所示， $V=V_1(t)$ ， $V=V_2(t)$ 分别是两辆车的速度 V 关于时间 t 的函数曲线。分别说明两个阴影的面积物理意义。

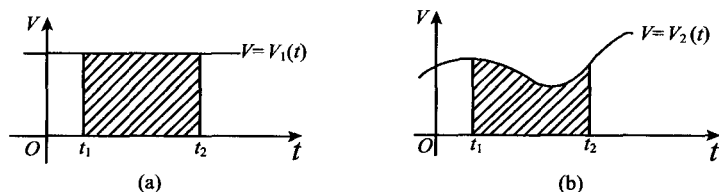


图 1-1

解 图 1-1 (a) 的阴影的面积 $=V_1 \times (t_2 - t_1)$ ，是第一辆车在 $[t_1, t_2]$ 时间段内走过的路程。

再看图 1-1 (b)，首先把阴影分成一个一个的小竖条，显然小竖条越分越细时（这就是“微分”），每个小竖条的面积与对应时段内走过的路程的相对误差越来越小。又因为求和不增加相对误差（例如在造汽车时，如果造出的每个零件的重量与它的标准重量的相对误差都小于 $m\%$ ，则用这些零件组装的汽车的重量与汽车的标准重量的相对误差也小于 $m\%$ ），所以所有小竖条的面积之和（这就是“积分”）就是所有时段内车走过的路程之和，即图 1-1 (b) 中阴影的面积就是第二辆车在 $[t_1, t_2]$ 时段内走过的路程。

【例 1-2】 已知圆的周长与圆的直径之比为 π ，利用微积分思想证明：半径为 R 的圆的面积为 πR^2 。

解 首先将圆分成一个一个的小扇形，然后用小三角形近似小扇形，其中小三角形的底边等于小扇形的弧长，小三角形的高等于小扇形半径。显然小扇形的圆心角越小时，用小三角形的面积代替小扇形面积的相对误差越来越小。再根据求和不增加相对误差可知

$$\begin{aligned}
 \text{圆的面积} &= \text{所有小三角形的面积之和} \\
 &= \frac{1}{2} \times R \times (\text{所有小三角形的底边长}) \\
 &= \frac{1}{2} \times R \times (\text{所有小扇形的底边长}) \\
 &= \frac{1}{2} \times R \times (2\pi R) = \pi R^2
 \end{aligned}$$

作为作业 (见习题 1-1 第 1 题), 请读者在已知球的表面积为 $4\pi R^2$ 的前提下, 仿此例用微积分的思想计算半径为 R 的球的体积.

2. 微积分的历史和微积分的理论

早在两千多年以前, Archimedes (阿基米德, 前 287—前 212, 古希腊数学家、力学家) 已经有了微积分的基本思想 (2006 年阳光卫视的一档节目《阿基米德的秘密》的开头是这样写的“除了伟大的牛顿与爱因斯坦, 再没有一个人像阿基米德那样为人类进步做出如此伟大的贡献. 他的手稿遗失了一千年, 直到今天才得以复原, 如果我们几百年前就发现了他的著作, 那么预计一百年以后才能做到的事情, 可能今天已全部实现.”). 然而直到 17 世纪中叶, 当 Newton (牛顿, 1642—1727, 英国物理学家、数学家) 和 Leibniz (莱布尼兹, 1646—1716, 德国数学家、哲学家) 给出微积分基本定理时, 人类才算有了比较完整的微积分思想. 此后, 微积分得到了迅猛的发展和广泛的应用. 但是由于微积分思想中所使用的“越来越”、“微小”等语言不是严格的数学语言, 使得微积分的理论基础受到广泛的质疑. 为了弥补这一缺陷, 人类又耗去了近 200 年的时间, 直到 19 世纪中叶, 才由 Cauchy (柯西, 1785—1857, 法国数学家) 和 Weierstrass (魏尔斯特拉斯, 1815—1897, 德国数学家) 等人建立了严格的微积分理论体系. 这个理论一般称为数学分析理论. 本书的理论部分 (如极限的 ϵ - δ 语言) 就是按这个理论体系编写的.

因为微积分的理论较为抽象, 本书在讲述这个理论时, 尽可能加入一些介绍微积分思想的内容, 希望能够提高读者对微积分的兴趣和热情, 同时也使读者能够更多地了解微积分的思想和微积分的历史.

最后需要强调一点, 由于“微积分思想”不是严格的数学理论, 不能用作证明题的论证依据, 只能在应用题和客观题中使用.

习题 1-1

1. 已知半径为 R 的球的表面积为 $4\pi R^2$, 试用微积分思想求该球的体积 V .

2. 试用微积分思想按下述步骤求半径为 R 的球的表面积 A . 步骤 1, 将球切成一片一片的厚度为 dx 的薄片 (即微分); 步骤 2, 计算图 1-2 中位于 $[x, x+dx]$ 内的球体薄片上的球表面积 dA , 注意薄片足够薄时, 曲线 \widehat{AB} 变为直线 AB (以直代曲, $\triangle ABC$ 就是著名的微观三角形, 满足 $(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$), 所以 $dA = 2\pi r ds$, 其中 $r = AD = \sqrt{R^2 - x^2}$, $ds = AB$, 由 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle OAD$, 可得 $dA = 2\pi R dx$; 步骤 3, 将各薄片上的球表面积 dA 加到一起 (即积分) 可得整体球的表面积 A .

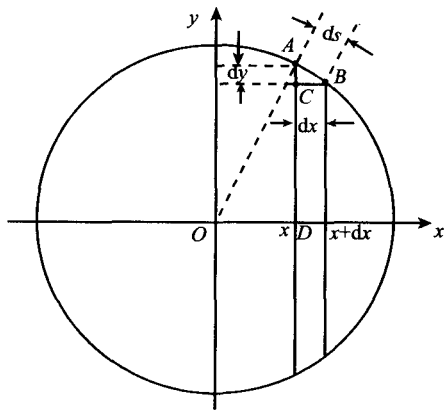


图 1-2

3. 甲船以 6 km/h 的速度向东行驶, 乙船以 8 km/h 的速度向南行驶. 中午 12 点整乙船位于甲船之北 16 km 处, 求下午 1 点整两船的相离速度 (提示: 步骤 1, 先算下午 1 点整的相离速度的一个近似值; 步骤 2, 再计算一个比上一步更准确的相离速度的近似值; 步骤 3, 估计或猜测相离速度的精确值).