面向21 CENTURY 高等学校数学教材系列

线性代数

钱焕延　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

面向21世纪高等学校数学教材系列

线性代数

钱焕延 编著

西安电子科技大学出版社
2007

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钱焕延编著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2007.9

(面向21世纪高等学校数学教材系列)

ISBN 978-7-5606-1855-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 钱… Ⅲ. 线性代数一高等学校一教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088330 号

策　　划　毛红兵

责任编辑　郭　景　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071

http://www.xduph.com　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2007年9月第1版　2007年9月第1次印刷

开　　本　850毫米×1168毫米　1/32　印　张　6

字　　数　143千字

印　　数　1～4000册

定　　价　9.00元

ISBN 978-7-5606-1855-5/O・0083

XDUP 2147001-1

前　言

在科学技术迅猛发展的数字时代，随着计算机的普及和应用，线性代数已成为从事自然科学、工程技术和经济管理等方面技术人员必须具备的基础理论知识.

本书立足于高等学校理工科和经济管理等专业的线性代数教学，根据高等学校线性代数课程的教学大纲，并结合作者多年的教学实践经验编写而成. 全书系统地介绍了线性代数方面的基础知识，其主要内容包括行列式、向量、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和实二次型等.

本书深浅适度，例题丰富，文字叙述通俗易懂，便于自学. 各章均配备了相应的习题，以便读者理解和掌握相关的知识. 本书适合各类高等学校相关专业本科及专科生选用，参考学时数为50学时左右.

本书由南京理工大学钱焕延教授编写，书中若有不妥之处，恳望读者批评指正.

编　者

2007年6月于南京

目　录

第1章 行列式

科学研究与工程设计等许多实际问题都可归结到求解线性方程组的问题. 所谓**线性方程组**，是指一组含有若干个未知数的一次方程式.

在中学里，我们已学过二元一次方程组和三元一次方程组的求解，本章将以此引出二阶和三阶行列式，然后再推广到高阶行列式，并介绍行列式的性质、展开和运算.

1.1 行列式的基本概念

1.1.1 行列式的定义

1. 二阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x_i(i=1,2)$为未知数，$a_{ij}(i,j=1,2)$为方程组未知数的系数，$b_i(i=1,2)$为方程组的右端常量.

对于方程组(1)，首先用a_{22}乘以第一个方程的两边，用a_{12}乘以第二个方程的两边，可得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12} \end{cases} \tag{2}$$

将方程组(2)中的两式相减消去 x_2，便得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{3}$$

对于方程组(1)，若用 a_{21} 乘以第一个方程的两边，用 a_{11} 乘以第二个方程的两边，然后两式相减，可得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{4}$$

我们将式(3)和式(4)中 x_1 或 x_2 的系数

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

称为**二阶行列式**，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{5}$$

并将 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为**行列式的元素**.

二阶行列式即是由 4 个元素排成两行两列，并按一定规则得到的一个值.

二阶行列式的计算可按下列规则给出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

即二阶行列式的值为实线上两个元素的乘积减去虚线上两个元素的乘积.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-3\times2=4-6=-2$$

不难看出，式(3)的右边是把行列式 D 中的 a_{11} 和 a_{21} 分别换成 b_1 和 b_2，同样式(4)中的右边是把 D 中的 a_{12} 和 a_{22} 分别换成 b_1 和 b_2，于是式(3)和式(4)的右边分别为二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，由式(3)和式(4)可见，若 $D\neq0$，则方程组(1)的解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}} \tag{6}$$

用式(6)求解二元一次方程组的法则称为**克莱姆**(Cramer)法则.

例 1 用克莱姆法则求解下列线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1+4x_2=8\\ x_1+3x_2=5\end{cases}$$

解 根据行列式的定义，有

$$D=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-4=2$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=24-20=4$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10-8=2$$

则由克莱姆法则得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{2}=1$$

2. 三阶行列式

对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{7}$$

其中，$x_i(i=1,2,3)$为未知数，$a_{ij}(i,j=1,2,3)$为方程组未知数的系数，$b_i(i=1,2,3)$为方程组的右端常量.

如同前述求解二元一次方程组的方法，首先从第一和第二个方程中消去 x_3，再从第一和第三个方程中也消去 x_3，最后从所得到的两个方程中消去 x_2，便得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13})x_1 \\
&\quad =b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{32}a_{23}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

我们将式(8)中 x_1 的系数

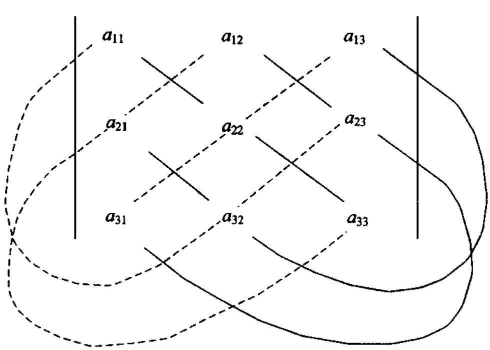
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

称为**三阶行列式**，记为

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\tag{9}
$$

三阶行列式即是由 9 个元素排成三行三列，并按一定规则得到的一个值.

三阶行列式的计算可按下列规则给出



即三阶行列式的值为实线上三个元素的乘积的代数和减去虚线上三个元素的乘积的代数和.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times1\times3+2\times2\times1+1\times2\times2$$

$$-1\times2\times2-2\times2\times3-1\times1\times1$$

$$=3+4+4-4-12-1=-6$$

不难看出，式(8)的右边是把 D 中的第一列元素 a_{11}、a_{21} 和 a_{31} 分别换为常量 b_1、b_2 和 b_3 而得到的结果，于是式(8)右边为三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

从而式(8)可改写为

$$Dx_1=D_1$$

同理可得到

$$Dx_2=D_2,\quad Dx_3=D_3$$

其中，D_2 是把 D 中的第二列元素分别换为常量 b_1、b_2 和 b_3 而得到的行列式；D_3 是把 D 中的第三列元素分别换为常量 b_1、b_2 和 b_3 而得到的行列式. 即

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

若 $D\neq0$，则三元一次方程组(7)的解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{10}$$

这就是求解三元一次方程组的克莱姆法则.

例 2 用克莱姆法则求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

解 根据行列式的定义，有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 8 = -4$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 7 + 18 - 8 - 28 - 9 = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 18 + 8 - 9 - 32 - 7 = -8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 16 + 14 - 7 - 36 - 8 = -12$$

因此，用克莱姆法则得方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

3. n 阶行列式

定义 n 阶行列式为由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成 n 行 n 列，并按一定规则得到的一个值，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地，当 $n=1$ 时有一阶行列式，例如

$$|a|=a$$

必须引为注意的是，行列式的结果为一个值，这与后面将要介绍的矩阵是完全不同的.

1.1.2 子行列式

1. 子式

定义 由 n 阶行列式 D 中 k 行 k 列($k\leqslant n$)交点处的元素得到的 k 阶行列式称为原行列式的**子式**，记为 M.

例如，设有行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

为 D 的二阶子式；而

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

为 D 的三阶子式.

2. 余子式

定义 设 M 是 n 阶行列式 D 中的 k 阶子式，剩下的 $n-k$ 行 $n-k$ 列交点处的元素得到的行列式称为 M 的**余子式**，记为 $\overline{M}$.

例如，设有行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若子式为

$$M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则 M 的余子式为

$$\overline{M}=| a_{31} |$$

若子式为

$$M=| a_{23} |$$

则 M 的余子式为

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. 代数余子式

定义 设行列式 D 中的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列得到的子式为 M，余子式为 $\overline{M}$，则 M 的**代数余子式**为

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\overline{M}$$

例如，设有行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若子式 M 为

$$M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则 M 的代数余子式为

$$A=(-1)^{1+2+2+3}\ | a_{31} |$$

若子式 M 为

$$M = | a_{23} |$$

则 M 的代数余子式为

$$A = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

一般地，子式 a_{ij} 的代数余子式记为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M} \tag{11}$$

其中

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

子式 a_{11} 的代数余子式为

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

子式 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

1.1.3 行列式的展开式

对于二阶行列式和三阶行列式，由定义容易得到它们的展开式为