

21
面体CENTURY

高等学校数学教材系列

线性代数

钱焕延 编著

第 1 章 行列式

1.1 行列式的定义

1.2 行列式的性质

1.3 行列式的计算

1.4 行列式的应用

第 2 章 矩阵

2.1 矩阵的概念

2.2 矩阵的运算

2.3 逆矩阵

2.4 分块矩阵

2.5 矩阵的秩

2.6 初等变换与初等矩阵

2.7 矩阵的等价

2.8 矩阵的相似

2.9 矩阵的合同

2.10 矩阵的迹

2.11 矩阵的范数

2.12 矩阵的分解

2.13 矩阵的广义逆

2.14 矩阵的奇异值分解

2.15 矩阵的 Jordan 标准形

2.16 矩阵的谱分解

2.17 矩阵的幂级数

2.18 矩阵的指数函数

2.19 矩阵的函数

2.20 矩阵的微商

2.21 矩阵的积分

2.22 矩阵的极限

2.23 矩阵的收敛性

2.24 矩阵的稳定性

2.25 矩阵的周期性

2.26 矩阵的对称性

2.27 矩阵的反对称性

2.28 矩阵的正定性

2.29 矩阵的半正定性

2.30 矩阵的半负定性

2.31 矩阵的负定性

2.32 矩阵的不定性

2.33 矩阵的零度

2.34 矩阵的秩

2.35 矩阵的秩

2.36 矩阵的秩

2.37 矩阵的秩

2.38 矩阵的秩

2.39 矩阵的秩

2.40 矩阵的秩

2.41 矩阵的秩

2.42 矩阵的秩

2.43 矩阵的秩

2.44 矩阵的秩

2.45 矩阵的秩

2.46 矩阵的秩

2.47 矩阵的秩

2.48 矩阵的秩

2.49 矩阵的秩

2.50 矩阵的秩

2.51 矩阵的秩

2.52 矩阵的秩

2.53 矩阵的秩

2.54 矩阵的秩

2.55 矩阵的秩

2.56 矩阵的秩

2.57 矩阵的秩

2.58 矩阵的秩

2.59 矩阵的秩

2.60 矩阵的秩

2.61 矩阵的秩

2.62 矩阵的秩

2.63 矩阵的秩

2.64 矩阵的秩

2.65 矩阵的秩

2.66 矩阵的秩

2.67 矩阵的秩

2.68 矩阵的秩

2.69 矩阵的秩

2.70 矩阵的秩

2.71 矩阵的秩

2.72 矩阵的秩

2.73 矩阵的秩

2.74 矩阵的秩

2.75 矩阵的秩

2.76 矩阵的秩

2.77 矩阵的秩

2.78 矩阵的秩

2.79 矩阵的秩

2.80 矩阵的秩

2.81 矩阵的秩

2.82 矩阵的秩

2.83 矩阵的秩

2.84 矩阵的秩

2.85 矩阵的秩

2.86 矩阵的秩

2.87 矩阵的秩

2.88 矩阵的秩

2.89 矩阵的秩

2.90 矩阵的秩

2.91 矩阵的秩

2.92 矩阵的秩

2.93 矩阵的秩

2.94 矩阵的秩

2.95 矩阵的秩

2.96 矩阵的秩

2.97 矩阵的秩

2.98 矩阵的秩

2.99 矩阵的秩

2.100 矩阵的秩



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

0151.2/306

2007

面向 21 世纪高等学校数字教材系列

线 性 代 数

钱焕延 编著

西安电子科技大学出版社

2007

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钱焕延编著.—西安:西安电子科技大学出版社,2007.9
(面向21世纪高等学校数学教材系列)

ISBN 978-7-5606-1855-5

I. 线… II. 钱… III. 线性代数—高等学校—教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088330 号

策 划 毛红兵

责任编辑 郭 景 毛红兵

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2007年9月第1版 2007年9月第1次印刷

开 本 850毫米×1168毫米 1/32 印 张 6

字 数 143千字

印 数 1~4000册

定 价 9.00元

ISBN 978-7-5606-1855-5/O·0083

XDUP 2147001-1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版.

前 言

在科学技术迅猛发展的数字时代,随着计算机的普及和应用,线性代数已成为从事自然科学、工程技术和经济管理等方面技术人员必须具备的基础理论知识.

本书立足于高等学校理工科和经济管理等专业的线性代数教学,根据高等学校线性代数课程的教学大纲,并结合作者多年的教学实践经验编写而成.全书系统地介绍了线性代数方面的基础知识,其主要内容包括行列式、向量、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和实二次型等.

本书深浅适度,例题丰富,文字叙述通俗易懂,便于自学.各章均配备了相应的习题,以便读者理解和掌握相关的知识.本书适合各类高等学校相关专业本科及专科生选用,参考学时数为50学时左右.

本书由南京理工大学钱焕延教授编写,书中若有不妥之处,恳望读者批评指正.

编 者

2007年6月于南京

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 行列式的基本概念	1
1.1.1 行列式的定义	1
1.1.2 子行列式	7
1.1.3 行列式的展开式	9
1.2 行列式的性质	13
1.2.1 行列式的转置	13
1.2.2 行列式的基本性质	14
1.2.3 范德蒙行列式	19
1.3 行列式的展开和运算	21
1.3.1 特殊行列式的展开式	21
1.3.2 拉普拉斯展式	24
1.3.3 乘法公式	25
习题	27
第 2 章 向量	30
2.1 向量与 n 维向量空间	30
2.1.1 向量的基本概念	30
2.1.2 n 维向量空间	33
2.2 向量运算	33
2.2.1 向量运算法则	33
2.2.2 向量运算性质	36
2.3 零向量、单位坐标向量和向量的长度	37
2.3.1 零向量	37
2.3.2 单位坐标向量	37
2.3.3 向量的长度	38

2.3.4 向量长度的性质	40
2.4 向量的内积	41
2.4.1 向量内积的定义	41
2.4.2 向量内积的性质	43
2.5 向量相关性	44
2.5.1 向量相关性的定义	44
2.5.2 相关向量系的性质	47
2.5.3 向量系的秩	49
2.5.4 向量系的基底	50
2.5.5 空间的基底	51
2.6 直交向量系	53
2.6.1 向量的直交性	53
2.6.2 直交向量系的定义	53
2.6.3 向量的直交化	54
习题	57

第3章 矩阵

3.1 矩阵及特殊矩阵	60
3.1.1 矩阵的基本概念	60
3.1.2 特殊矩阵	62
3.2 矩阵运算	66
3.2.1 矩阵相等	66
3.2.2 矩阵相加减	67
3.2.3 数乘矩阵	68
3.2.4 矩阵的乘法	70
3.2.5 矩阵的转置	75
3.3 逆矩阵	78
3.3.1 逆矩阵的基本概念	78
3.3.2 乘积和转置矩阵的逆矩阵	83
3.3.3 线性变换与逆变换	84
3.4 矩阵的初等变换	87

3.4.1	初等变换的基本概念	87
3.4.2	初等变换求逆矩阵	92
3.5	分块矩阵	95
3.5.1	分块矩阵的定义	95
3.5.2	分块矩阵的运算	96
3.6	直交矩阵	105
3.6.1	直交矩阵的定义	105
3.6.2	直交矩阵的性质	106
	习题	108
第 4 章	矩阵的秩与线性方程组	112
4.1	矩阵的秩	112
4.1.1	矩阵的子式	112
4.1.2	秩的基本概念	113
4.1.3	矩阵的行秩和列秩	114
4.2	线性方程组	115
4.2.1	线性方程组的定义	115
4.2.2	线性方程组的相容性	116
4.3	线性方程组的解	119
4.3.1	齐次线性方程组的解	119
4.3.2	非齐次线性方程组的解	129
	习题	134
第 5 章	矩阵的特征值	136
5.1	特征值的基本概念	136
5.1.1	特征值问题	136
5.1.2	特征多项式	137
5.1.3	求矩阵的特征值和特征向量	138
5.2	相似矩阵及其特征值	142
5.2.1	相似矩阵的定义及性质	142

5.2.2	相似矩阵的特征值	142
5.2.3	实对称矩阵的特征值与特征向量	143
5.3	实对称矩阵的对角化	145
5.3.1	实矩阵的三角化	145
5.3.2	实对称矩阵的对角化	147
5.4	约当标准型	151
5.4.1	约当块和约当型矩阵	151
5.4.2	约当矩阵的特征值	153
	习题	154
第 6 章	实二次型	157
6.1	实二次型的定义	157
6.2	矩阵的合同	158
6.3	实二次型的简化	159
6.3.1	实二次型的简化定理	159
6.3.2	二次型的简化方法	161
6.4	惯性定律	165
6.4.1	规范标准型	165
6.4.2	惯性定理	166
6.5	矩阵的正定性	171
6.5.1	正定性的定义	171
6.5.2	正定矩阵的性质	173
6.5.3	正定矩阵的判别	175
6.6	矩阵的变换	179
	习题	180
	参考文献	182

第1章 行列式

科学研究与工程设计等许多实际问题都可归结到求解线性方程组的问题. 所谓**线性方程组**, 是指一组含有若干个未知数的一次方程式.

在中学里, 我们已学过二元一次方程组和三元一次方程组的求解, 本章将以此引出二阶和三阶行列式, 然后再推广到高阶行列式, 并介绍行列式的性质、展开和运算.

1.1 行列式的基本概念

1.1.1 行列式的定义

1. 二阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x_i (i=1, 2)$ 为未知数, $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 为方程组未知数的系数, $b_i (i=1, 2)$ 为方程组的右端常量.

对于方程组(1), 首先用 a_{22} 乘以第一个方程的两边, 用 a_{12} 乘以第二个方程的两边, 可得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12} \end{cases} \quad (2)$$

将方程组(2)中的两式相减消去 x_2 , 便得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (3)$$

对于方程组(1), 若用 a_{21} 乘以第一个方程的两边, 用 a_{11} 乘以第二个方程的两边, 然后两式相减, 可得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \quad (4)$$

我们将式(3)和式(4)中 x_1 或 x_2 的系数

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

称为二阶行列式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (5)$$

并将 a_{ij} ($i, j=1, 2$) 称为行列式的元素.

二阶行列式即是由 4 个元素排成两行两列, 并按一定规则得到的一个值.

二阶行列式的计算可按下列规则给出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

即二阶行列式的值为实线上两个元素的乘积减去虚线上两个元素的乘积.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$$

不难看出, 式(3)的右边是把行列式 D 中的 a_{11} 和 a_{21} 分别换成 b_1 和 b_2 , 同样式(4)中的右边是把 D 中的 a_{12} 和 a_{22} 分别换成 b_1 和 b_2 , 于是式(3)和式(4)的右边分别为二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此, 由式(3)和式(4)可见, 若 $D \neq 0$, 则方程组(1)的解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (6)$$

用式(6)求解二元一次方程组的法则称为**克莱姆(Cramer)法则**.

例 1 用克莱姆法则求解下列线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

解 根据行列式的定义, 有

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 20 = 4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2$$

则由克莱姆法则得方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{2} = 1$$

2. 三阶行列式

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $x_i (i=1, 2, 3)$ 为未知数, $a_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 为方程组未知数的系数, $b_i (i=1, 2, 3)$ 为方程组的右端常量。

如同前述求解二元一次方程组的方法, 首先从第一和第二个方程中消去 x_3 , 再从第一和第三个方程中也消去 x_3 , 最后从所得到的两个方程中消去 x_2 , 便得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13})x_1 \\ & = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13} \end{aligned} \quad (8)$$

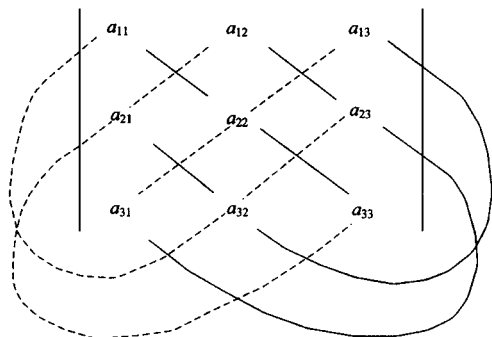
我们将式(8)中 x_1 的系数

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$ 称为三阶行列式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

三阶行列式即是由 9 个元素排成三行三列, 并按一定规则得到的一个值。

三阶行列式的计算可按下列规则给出



即三阶行列式的值为实线上三个元素的乘积的代数和减去虚线上三个元素的乘积的代数和。

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 + 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 \\ - 1 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 1 \\ = 3 + 4 + 4 - 4 - 12 - 1 = -6$$

不难看出, 式(8)的右边是把 D 中的第一列元素 a_{11} 、 a_{21} 和 a_{31} 分别换为常量 b_1 、 b_2 和 b_3 而得到的结果, 于是式(8)右边为三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

从而式(8)可改写为

$$Dx_1 = D_1$$

同理可得到

$$Dx_2 = D_2, \quad Dx_3 = D_3$$

其中, D_2 是把 D 中的第二列元素分别换为常量 b_1 、 b_2 和 b_3 而得到的行列式; D_3 是把 D 中的第三列元素分别换为常量 b_1 、 b_2 和 b_3 而得到的行列式. 即

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

若 $D \neq 0$, 则三元一次方程组(7)的解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (10)$$

这就是求解三元一次方程组的克莱姆法则.

例 2 用克莱姆法则求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

解 根据行列式的定义, 有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 8 = -4$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 7 + 18 - 8 - 28 - 9 = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 18 + 8 - 9 - 32 - 7 = -8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 16 + 14 - 7 - 36 - 8 = -12$$

因此, 用克莱姆法则得方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

3. n 阶行列式

定义 n 阶行列式为由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 排成 n 行 n 列, 并按一定规则得到的一个值, 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地, 当 $n=1$ 时有一阶行列式, 例如

$$|a| = a$$

必须引为注意的是, 行列式的结果为一个值, 这与后面将要介绍的矩阵是完全不同的.

1.1.2 子行列式

1. 子式

定义 由 n 阶行列式 D 中 k 行 k 列 ($k \leq n$) 交点处的元素得到的 k 阶行列式称为原行列式的子式, 记为 M .

例如, 设有行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

为 D 的二阶子式; 而

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

为 D 的三阶子式.

2. 余子式

定义 设 M 是 n 阶行列式 D 中的 k 阶子式, 剩下的 $n-k$ 行 $n-k$ 列交点处的元素得到的行列式称为 M 的余子式, 记为 $\bar{M}$.

例如, 设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若子式为

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则 M 的余子式为

$$\bar{M} = | a_{31} |$$

若子式为

$$M = | a_{23} |$$

则 M 的余子式为

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. 代数余子式

定义 设行列式 D 中的 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行和 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列得到的子式为 M , 余子式为 $\bar{M}$, 则 M 的代数余子式为

$$A = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} \bar{M}$$

例如, 设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若子式 M 为

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则 M 的代数余子式为

$$A = (-1)^{1+2+2+3} | a_{31} |$$

若子式 M 为

$$M = |a_{23}|$$

则 M 的代数余子式为

$$A = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

一般地, 子式 a_{ij} 的代数余子式记为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M} \quad (11)$$

其中

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如, 设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

子式 a_{11} 的代数余子式为

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

子式 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

1.1.3 行列式的展开式

对于二阶行列式和三阶行列式, 由定义容易得到它们的展开式为